Práctico 1. Ecuaciones de Lagrange.
Dinámica Clásica. CURE 2017.

1. (Taylor 7.1) Escriba la Lagrangiana para un proyectil de masa m (ignorando la resistencia del aire) en términos de sus coordenadas cartesianas (x, y, z), con z medido verticalmente y positivo hacia arriba. Determine las ecuaciones de Lagrange correspondientes.

2. (Taylor 7.8) a. Escriba la Lagrangiana $L(x_1, x_2, \dot{x}_1, \dot{x}_2)$ para dos partículas de igual masa $m_1 = m_2 = m$ confinadas a moverse horizontalmente y sin rozamiento en una dimensión (el eje x) y unidas por un resorte con energía potencial $U(x) = \frac{kx^2}{2}$, donde $x = x_2 - x_1 - l$ es la extensión del resorte desde su longitud natural l, en términos de sus coordenadas x_1 y x_2 y sus velocidades. Asuma que la masa 2 permanece a la derecha de la masa 1 en todo instante.
b. Reescriba L en términos de las nuevas variables $X = \frac{1}{2}(x_2 + x_1)$ (posición del centro de masas) y la extensión del resorte x. Escriba las dos ecuaciones de Lagrange en estas nuevas variables.
c. Resuelva las ecuaciones del movimiento para $X(t)$ y $x(t)$. Discuta.

3. (Taylor 7.11) Considere un péndulo suspendido del techo de un vagón y que puede moverse solo en un plano vertical paralelo a las vías. El vagón se mueve hacia adelante y atrás en una va recta, de modo que el punto de suspensión del péndulo tiene coordenada vertical constante $y_s(t) = 0$ y coordenada horizontal $x_s(t) = A\cos(\omega t)$, con A y ω constantes. Utilizando el ángulo θ del péndulo con respecto a la vertical como coordenada generalizada, determine la Lagrangiana y la ecuación del movimiento.

4. (Taylor 7.12) Para tener una idea de como modificar las ecuaciones de Lagrange para incluir fuerzas disipativas (fricción) , considere la siguiente situación: Una partícula en una dimensión está sujeta a varias fuerzas conservativas (con la fuerza conservativa total $F_{cons} = -\frac{\partial V}{\partial x}$) y una fuerza no conservativa total F_{fric}. Si la Lagrangiana es $L = T - V$, pruebe que las ecuaciones de Lagrange deben modificarse como $\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} - \frac{\partial L}{\partial x} = F_{fric}$.

5. (Taylor 7.23) Un carrito de masa m se puede mover horizontalmente en un riel recto en el interior de un vagón, que se mueve a su vez en una via recta en la misma dirección. El carrito está unido por un resorte de constante elástica k, al extremo izquierdo del vagón, de modo que el carrito está en equilibrio (o el resorte en su longitud natural) en el punto medio del interior del vagón. La distancia del carrito a su posición de equilibrio se denota x, mientras que la distancia del punto medio del vagón a un punto fijo en tierra es X. Si el vagón es forzado a moverse de modo que $X(t) = A\cos(\omega t)$, con A y ω constantes, determine la Lagrangiana y la ecuación de movimiento del sistema.

6. (Taylor 7.29) Una rueda con centro fijo O y radio R es obligada a girar con velocidad angular constante ω en torno a un eje horizontal fijo que pasa por su centro y es perpendicular al plano vertical que contiene la rueda. Un punto P del borde de la rueda sirve como soporte (móvil) de un péndulo de longitud l (con $l > R$) y masa m. La articulación del soporte en P es lisa y tal que el péndulo puede oscilar libremente en el plano de la rueda (o, mas precisamente, un plano vertical paralelo al de la rueda a una pequeña distancia de este). Asuma que en $t = 0$ el punto P está a la misma altura que O (la recta OP es horizontal en ese instante). Escriba la Lagrangiana y la ecuación del movimiento con el ángulo ϕ entre el péndulo y la vertical como coordenada generalizada.

7. (Taylor 7.31) Se considera un carrito de masa m que se mueve horizontalmente en una dimensión y sin pérdida de energía por rozamiento. El carrito está unido a una pared a través de un resorte horizontal de constante elástica k, y se toma el desplazamiento horizontal del carrito desde la posición correspondiente a la longitud natural del resorte como coordenada x. Además, del carrito cuelga un péndulo de longitud L y masa M que puede oscilar libremente en el plano vertical que contiene la recta de desplazamiento del carrito. El ángulo entre el péndulo y la vertical se denomina ϕ.
a. Escriba la Lagrangiana del sistema en términos de las coordenadas generalizadas x y ϕ.
b. Determine las ecuaciones del movimiento.
c. Halle la forma aproximada simplificada de las ecuaciones del movimiento en el caso de que x y ϕ son chicos (aproximación de pequeñas oscilaciones).

8. (Taylor 7.36) Se considera un péndulo elástico, consistente de un resorte (de constante elática k y longitud natural l_0) suspendido en uno de sus extremos de un pivote fijo O y con una masa m unida a su otro extremo libre. El resorte puede estirarse o comprimirse, pero no puede doblarse, y el sistema esta confinado a un plano vertical.
a. Escriba la Lagrangiana del sistema en términos de las cordenadas generalizadas dadas por el ángulo ϕ entre el resorte y la vertical y la longitud r del resorte.
b. Halle las dos ecuaciones de Lagrange del sistema e interpretelas en términos de la segunda Ley de Newton.
c. Las ecuaciones de la parte b. no pueden resolverse analiticamente en general, pero si pueden resolverse en la aproximación de pequeñas oscilaciones mencionada en el problema anterior, que en este caso correponde a $\epsilon = r - l_0$ y ϕ chicos. Determine las ecuaciones en esta aproximación, resuelvalas y describa el movimiento.

9. (Taylor 7.40) Un péndulo esférico de longitud l y masa m es un péndulo simple pero sin la restricción de que debe estar contenido en un plano vertical. Estosignifica que su extremo libre se puede mover sobre una esfera de radio l en vez de sobre una circunferencia de radio l. Usando coordenadas esféricas

(r, θ, ϕ) (con origen en el soporte fijo) para el extremo libre tenemos que $r = l$ constante, y que θ y ϕ pueden usarse como coordenadas generalizadas.
a. Halle la Lagrangiana y las dos ecuaciones de Lagrange.
b. Explique que implica la ecuación correspondiente a ϕ para la componente z del momento angular L_z.
c. Para el caso particular $\phi = constante$ interprete la ecuación en θ.
d. Use la ecuación en ϕ para reemplazar $\dot{\phi}$ por L_z en la ecuación en θ. Discuta la existencia de soluciones con $\theta = \theta_0$ constante (llamadas de "péndulo cónico").
e. Estudie el caso $\theta = \theta_0 + \epsilon$, con ϵ chico (pequeñas oscilaciones), resuelva las ecuaciones en este caso, y describa el movimiento.

10. (Taylor 7.41) Se considera una cuenta (una bolita con un agujero) de masa m enhebrada en un alambre en el que desliza sin fricción. El alambre tiene la forma de una parábola con ecuación $z = k\rho^2$, donde z es un eje vertical, ρ es la distancia a ese eje, y k es una constante. Si el alambre rota en torno al eje z con velocidad angular constante ω.
a. Use coordenadas cilíndricas para expresar la Lagrangiana del sistema en términos de la coordenada generalizada ρ.
b. Determine las ecuaciones del movimiento.
c. Determine si existen soluciones de las ecuaciones del movimiento con ρ constante. Discuta. Discuta si estas soluciones son estables, en caso de que existan.

11.(Gregory 12.3, doble máquina de Atwood) Una polea de masa despreciable puede rotar libremente en torno a su eje de simetría, el cual se mantiene fijo y horizontal. Una cuerda flexible, inextensible y sin peso (f.i.s.p. en lo que sigue) pasa sobre la polea. De un extremo de la cuerda cuelga una masa $4m$, mientras que el otro extremo sostiene una segunda polea de masa despreciable, que rota libremente en torno a su eje de simetría paralelo al de la primera. Una segunda cuerda f.i.s.p. pasa sobre la segunda polea, y de sus extremos cuelgan masas m y $4m$. Todos los elementos del sistema se mueven en un plano vertical, y el movimiento de todas las masas es vertical, estando ademas las cuerdas siempre tensas.
a. Escriba la Lagrangiana del sistema.
b. Escriba las ecuaciones del movimiento y entonces las aceleraciones de cada masa.

12. (Gregory 12.7) Una esfera uniforme de masa m rueda sin deslizar sobre una cuña de masa M y ángulo α (por lo que el contacto es rugoso). La cuña puede además deslizar libremente sin rozamiento sobre un plano horizontal. El movimiento del sistema está contenido en un plano vertical.
a. Escriba la Lagrangiana del sistema y las ecuaciones de Lagrange.
b. En el caso particular $M = 3M/2$ determine la aceleración de la cuña y la aceleración de la esfera relativa a la cuña.

13. (Gregory 12.10) Una cuenta de masa m está enhebrada en en un alambre recto por el que desliza sin rozamiento. El alambre tiene uno de sus puntos

fijo en el origen O y es forzado a girar en el plano horizontal xOy con velocidad angular constante Ω. Use la distancia r de la cuenta al origen como coordenada generalizada.
a. Halle la Lagrangiana y la ecuación de Lagrange.
b. Si inicialmente la masa está en reposo en $r(0) = a$ determine $r(t)$.
c. Determine la función de energía h y la energía E. Discuta si E y h coinciden, y si alguna de estas funciones se conserva.

14. (Gregory 12.11, yo-yo con soporte móvil) Un cilindro circular uniforme tiene una cuerda f.i.s.p. enrrollada alrededor de modo que no desliza. El otro extremo de la cuerda está sujeto a un soporte y el yo-to se mueve solo verticalmente con la parte vertical de la cuerda también vertical. El soporte al que está sujeto el extremo de la cuerda es obligado a moverse verticalmente con cordenada vertical respecto a un origen fijo dado por la función conocida $Z(t)$. Tome el ángulo de rotación del yo-yo con respecto a una dirección fija como coordenada generalizada.
a. Halle la Lagrangiana y escriba la ecuación de Lagrange.
b. Halle la aceleración del yo-yo.
c. Determine que valor debe tener la aceleración hacia arriba del soporte para que el centro del yo-yo permanezca en reposo.
d. Suponga que el sistema parte del reposo. Determine la energía total $E(t) = T + V$ como función del tiempo.

15. (Gregory 12.12, péndulo con cuerda que se acorta) Una partícula de masa m esta suspendida de una cuerda f.i.s.p. la cual pasa a través de un pequeño aro horizontal fijo y continúa verticalmente hacia arriba hasta unirse a un soporte móvil cuya coordenada vertical desde el aro es $Z(t)$. La partícula se mueve en un plano vertical y la cuerda está siempre tensa. El efecto neto es que la partícula oscila como un péndulo simple con una cuerda de longitud variable hasta el aro fijo dada por $l - Z(t)$, donde l es una constante positiva.
a. Tome el ángulo entre el segmento de cuerda entre la partícula y el aro fijo como coordenada generalizada y escriba la Lagrangiana y la ecuación de Lagrange del sistema.
b. Halle la energía total E y la función de energía h del sistema y muestre que $h = E - m\dot{Z}^2$. Determine si alguna de estas magnitudes físicas se conserva.

16. (Gregory 12.19) Una partícula de masa m y carga e Se mueve en el campo magnético producido por una corriente eléctrica I que fluye en un alambre conductor recto según el eje z. El potencial vector $\vec{A}$ está dado por las componentes $A_r = A_\theta = 0$, $A_z = -\frac{\mu_0 I}{2\pi} \ln r$ en coordenadas cilíndricas r, θ y z.
a. Determine la Lagrangiana de la partícula.
b. Muestre que θ y z son coordenadas cíclicas y calcule los momentos generalizados conservados correspondientes.