Teoría de Circuitos

Práctico 7
Cuadripolos

2012

Cada ejercicio comienza con un símbolo el cual indica su dificultad de acuerdo a la siguiente escala: ✦ básica, ★ media, ✷ avanzada, y ✹ difícil.

✦ Ejercicio 1

Hallar los parḿetros Z y las constantes generales (A,B,C,D) de los cuadripolos que se indican en la figura 1.

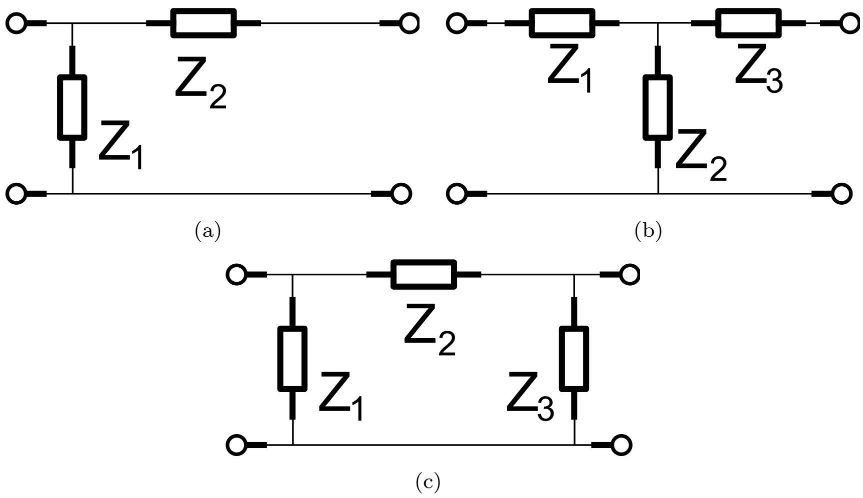

Figura 1:

★ Ejercicio 2

Dado un cuadripolo de constantes generales (A,B,C,D), calcular la impedancia vista desde el lado 1 y la transferencia I_2/V_1 cuando esta cargado en el lado 2 con una impedancia Z.

★ Ejercicio 3

Los convertidores de impedancia negativa (N.I.C.) son cuadripolos que tienen la propiedad de presentar una impedancia de entrada de signo opuesto a la aplicada a la salida. Hallar los parámetros híbridos h y las constantes generales (A,B,C,D) de dicho cuadripolo. Ver figura 2.

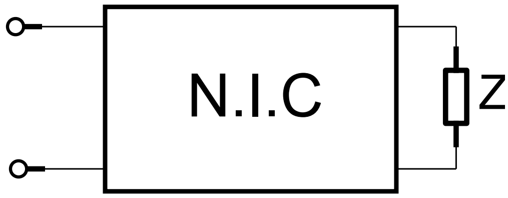

Figura 2:

✷Ejercicio 4

Hallar las constantes generales del cuadripolo de la figura 3:

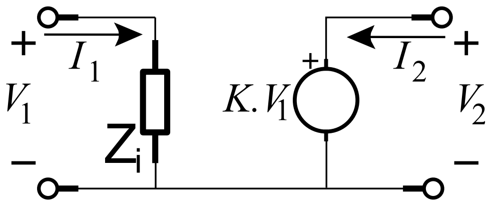

Figura 3:

Obsérvese que cuando $K = \infty$ se verifica que necesariamente V_1 e I_1 deben ser nulas y no es posible conocer V_2 en función de V_1 basándose sólo en el cuadripolo.

✷Ejercicio 5

(Ejercicio 1 - Examen Febrero de 2011)

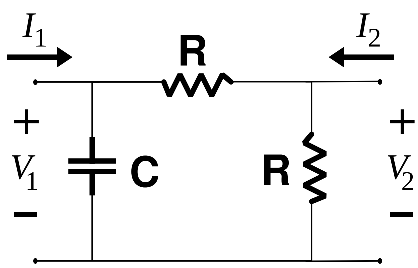

Figura 4:

(a) Calcular las impedancias de vací para el cuadripolo de la figura 4

(b) Calcular el equivalente thevenin desde el secundario

(c) Calcular $v_o(t)$ y la corriente $i_L(t)$ en régimen si $v_i(t) = 10cos(\omega_0 t)$.

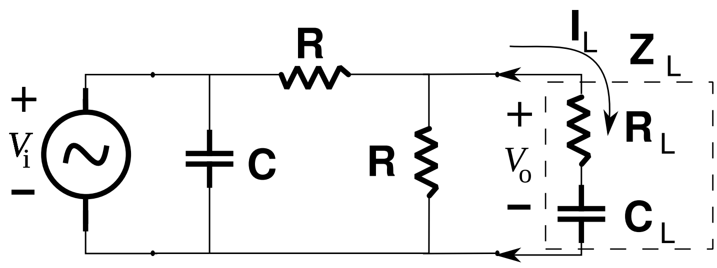

Figura 5:

Datos:

- $R = R_L = 10\Omega$
- $C = C_L = 10\mu F$
- $\omega = 1000\frac{Rad}{S}$

(d) Realizar un diagrama fasorial incluyendo V_i,V_o e I_L

(e) Calcular la potencia activa disipada por la impedancia Z_L

(f) Si quisiéramos maximizar la potencia activa disipada en Z_L: ¿Qué valor tendría que tener esa impedancia?

Solución

Ejercicio 1

Definimos los parámetros Z de un cuadripolo, de la siguiente manera:

$$\begin{pmatrix} V_1 \\ V_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Z_{11} & Z_{12} \\ Z_{21} & Z_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_1 \\ I_2 \end{pmatrix}$$

(a) $\frac{V_1}{I_1}\Big|_{I_2=0} = Z_{11}$
$V_1 = Z_1 I_1$

$$Z_{11} = Z_1$$

$\frac{V_2}{I_1}\Big|_{I_2=0} = Z_{21}$
$V_2 = V_1 = Z_1 I_1$

$$Z_{21} = Z_1$$

$\frac{V_2}{I_2}\Big|_{I_1=0} = Z_{22}$
$V_2 = (Z_1 + Z_2)I_2$

$$Z_{22} = (Z_1 + Z_2)$$

$\frac{V_1}{I_2}\Big|_{I_1=0} = Z_{12}$
$V_1 = \frac{Z_1}{Z_1+Z_2}V_2 = \frac{Z_1}{Z_1+Z_2}(Z_1 + Z_2)I_2 = Z_1 I_2$

$$Z_{12} = Z_1$$

(b) $\frac{V_1}{I_1}\Big|_{I_2=0} = Z_{11}$
$V_1 = (Z_1 + Z_2)I_1$

$$Z_{11} = (Z_1 + Z_2)$$

$\frac{V_2}{I_1}\Big|_{I_2=0} = Z_{21}$
$V_2 = Z_2 I_1$

$$Z_{21} = Z_2$$

$\frac{V_2}{I_2}\Big|_{I_1=0} = Z_{22}$
$V_2 = (Z_2 + Z_3)I_2$

$$Z_{22} = (Z_2 + Z_3)$$

$\frac{V_1}{I_2}\Big|_{I_1=0} = Z_{12}$
$V_1 = Z_2 I_2$

$$Z_{12} = Z_2$$

(c) $\frac{V_1}{I_1}\Big|_{I_2=0} = Z_{11}$
$V_1 = [Z_1||(Z_2 + Z_3)]\, I_1 = \frac{Z_1(Z_2+Z_3)}{Z_1+Z_2+Z_3} I_1$

$$Z_{11} = \frac{Z_1(Z_2 + Z_3)}{Z_1 + Z_2 + Z_3}$$

$\left.\frac{V_2}{I_1}\right|_{I_2=0} = Z_{21}$
$V_2 = \frac{Z_3}{Z_2+Z_3}V_1 = \frac{Z_3}{Z_2+Z_3}.\frac{Z_1(Z_2+Z_3)}{Z_1+Z_2+Z_3}I_1 = \frac{Z_1.Z_3}{Z_1+Z_2+Z_3}I_1$

$$Z_{21} = \frac{Z_1.Z_3}{Z_1+Z_2+Z_3}$$

$\left.\frac{V_2}{I_2}\right|_{I_1=0} = Z_{22}$
$V_2 = [Z_3||(Z_1+Z_2)]\, I_2 = \frac{Z_3(Z_1+Z_2)}{Z_1+Z_2+Z_3}I_2$

$$Z_{22} = \frac{Z_3(Z_1+Z_2)}{Z_1+Z_2+Z_3}$$

$\left.\frac{V_1}{I_2}\right|_{I_1=0} = Z_{12}$
$V_1 = \frac{Z_1}{Z_1+Z_2}V_2 = \frac{Z_1}{Z_1+Z_2}.\frac{Z_3(Z_1+Z_2)}{Z_1+Z_2+Z_3}I_2$

$$Z_{12} = \frac{Z_1.Z_3}{Z_1+Z_2+Z_3}I_2$$

Definimos las constantes generales (A, B, C, D) de un cuadripolo, de la siguiente manera:

$$\begin{pmatrix} V_1 \\ I_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \begin{pmatrix} V_2 \\ -I_2 \end{pmatrix}$$

(a) $\left.\frac{V_1}{V_2}\right|_{I_2=0} = A$
$V_1 = V_2$

$$A = 1$$

$\left.\frac{I_1}{V_2}\right|_{I_2=0} = C$
$I_1 = \frac{1}{Z_1}V_1 = \frac{1}{Z_1}V_2$

$$C = \frac{1}{Z_1}$$

$-\left.\frac{V_1}{I_2}\right|_{V_2=0} = B$
$V_1 = -I_2.Z_2$

$$B = Z_2$$

$-\left.\frac{I_1}{I_2}\right|_{V_2=0} = D$
$I_1 = \frac{1}{(Z_1||Z_2)}V_1 = -\frac{Z_1+Z_2}{Z_1.Z_2}.Z_2 I_2 = -\frac{Z_1+Z_2}{Z_1}I_2$

$$D = \frac{Z_1+Z_2}{Z_1}$$

(b) $\left.\frac{V_1}{V_2}\right|_{I_2=0} = A$
$V_1 = \frac{Z_1+Z_2}{Z_2}V_2$

$$A = \frac{Z_1+Z_2}{Z_2}$$

$\left.\frac{I_1}{V_2}\right|_{I_2=0} = C$
$I_1 = \frac{1}{Z_1+Z_2}V_1 = \frac{1}{Z_1+Z_2}.\frac{Z_1+Z_2}{Z_2}.V_2 = \frac{1}{Z_2}.V_2$

$$C = \frac{1}{Z_2}$$

$-\left.\frac{I_1}{I_2}\right|_{V_2=0} = D$
$I_1 = -\frac{Z_3}{(Z_2||Z_3)}I_2 = -\frac{Z_2+Z_3}{Z_2}I_2$

$$D = \frac{Z_2+Z_3}{Z_2}$$

$-\left.\frac{V_1}{I_2}\right|_{V_2=0} = B$
$V_1 = [Z_1 + (Z_2||Z_3)]\,I_1 = -\frac{Z_1.Z_2+Z_2.Z_3+Z_3.Z_1}{Z_2+Z_3}.\frac{Z_2+Z_3}{Z_2}I_2 = -\frac{Z_1.Z_2+Z_2.Z_3+Z_3.Z_1}{Z_2}I_2$

$$B = \frac{Z_1.Z_2+Z_2.Z_3+Z_3.Z_1}{Z_2}$$

(c) $\left.\frac{V_1}{V_2}\right|_{I_2=0} = A$
$V_1 = \frac{Z_2+Z_3}{Z_3}V_2$

$$A = \frac{Z_2+Z_3}{Z_3}$$

$\left.\frac{I_1}{V_2}\right|_{I_2=0} = C$
$I_1 = \frac{1}{Z_1||(Z_2+Z_3)}V_1 = \left(\frac{Z_1+Z_2+Z_3}{Z_1(Z_2+Z_3)}\right).\left(\frac{Z_2+Z_3}{Z_3}\right)V_2$

$$C = \frac{Z_1+Z_2+Z_3}{Z_1Z_3}$$

$-\left.\frac{I_1}{I_2}\right|_{V_2=0} = D$
$I_1 = -\frac{Z_1+Z_2}{Z_1}I_2$

$$D = \frac{Z_1+Z_2}{Z_1}$$

$-\left.\frac{V_1}{I_2}\right|_{V_2=0} = B$
$V_1 = -I_2.Z_2$

$$B = Z_2$$

Ejercicio 2

El problema se refiere a un circuito como el de la figura **??**. Las constantes generales del cuadripolo se suponen un dato del problema, por lo que son conocidos los coeficientes (A, B, C, D) del siguiente sistema de ecuaciones:

$$V_1 = A.V_2 - B.I_2$$
$$I_1 = C.V_2 - D.I_2$$

Basándonos en la figura **??**, deducimos que:

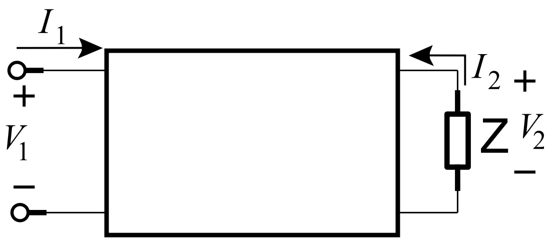

Figura 6:

$$V_2 = -I_2.Z$$

Por lo que el sistema de ecuaciones anterior toma la siguiente forma:

$$V_1 = -(AZ + B)I_2$$
$$I_1 = -(CZ + D)I_2$$

Por definición de impedancia vista:

$$Z_v = \frac{V_1}{I_1} = \frac{AZ + B}{CZ + D}$$

Y sea $H(s) = \frac{I_2}{V_1}$:

$$H(s) = -\frac{1}{AZ + B}$$

Ejercicio 3

<u>Parámetros híbridos:</u>
Los parámetros híbridos se definen como a continuación:

$$\begin{pmatrix} V_1 \\ I_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} h_{11} & h_{12} \\ h_{21} & h_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_1 \\ V_2 \end{pmatrix}$$

O lo que es lo mismo:

$$V_1 = h_{11}I_1 + h_{12}V_2$$
$$I_2 = h_{21}I_1 + h_{22}V_2$$

Basándonos en el circuito de la figura 2 y definiendo en el voltajes y corrientes como es costumbre, concluímos facilmente que:

$$V_2 = -Z.I_2$$

Además, como se trata de un circuito N.I.C.:

$$V_1 = -Z.I_1$$

Combinando todas las ecuaciones:

$$V_1 = -Z.I_1 + 0.V_2$$
$$I_2 = 0.I_1 + -\tfrac{1}{Z}.V_2$$

Finalmente:

$$\begin{gathered} h_{11} = -Z \\ h_{12} = 0 \\ h_{21} = 0 \\ h_{22} = -\frac{1}{Z} \end{gathered}$$

<u>Constantes generales:</u>
Recordamos la definición de las costantes generales del cuadripolo (A, B, C, D):

$$\begin{pmatrix} V_1 \\ I_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \begin{pmatrix} V_2 \\ -I_2 \end{pmatrix}$$

O lo que es lo mismo:

$$\begin{gathered} V_1 = AV_2 - BI_2 \\ I_1 = CV_2 - DI_2 \end{gathered}$$

Volvemos a plantear las 2 ecuaciónes obtenidas para el cuadripolo en cuastión (simpre definiendo voltajes y corrientes como es costumbre):

$$\begin{gathered} V_1 = -Z.I_1 \\ V_2 = -Z.I_2 \end{gathered}$$

Combinando todas las ecuaciones:

$$\begin{gathered} V_1 = -(Z.A + B)I_2 \\ I_1 = -(Z.C + D)I_2 = -\frac{1}{Z}.V_1 = \frac{1}{Z}.(Z.A + B)I_2 \end{gathered}$$

Obtenemos entonces la siguiente igualdad que se debe cumplir $\forall Z$:

$$C.Z^2 + D.Z = A.Z + B$$

Cuya única solución posible es:

$$\begin{gathered} C = 0 \\ B = 0 \\ A = D \end{gathered}$$

A y D cualesquiera.

Ejercicio 4

$$\begin{pmatrix} V_1 \\ I_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \begin{pmatrix} V_2 \\ -I_2 \end{pmatrix}$$

$\left.\frac{V_1}{V_2}\right|_{I_2=0} = A$
$V_2 = K.V_1$

$$A = \frac{1}{K}$$

$\left.\frac{I_1}{V_2}\right|_{I_2=0} = C$
$V_2 = K.V_1 = K.Z_i.I_1 =$

$$C = \frac{1}{KZ_i}$$

$- \left.\frac{I_1}{I_2}\right|_{V_2=0} = D$
$V_2 = K.V_1 = K.Z_i.I_1 = 0$
Como: $K \neq 0$ y $Z_i \neq 0 \Rightarrow\ I_1 = 0,\ \forall I_2$.

$$D = 0$$

$- \left.\frac{V_1}{I_2}\right|_{V_2=0} = B$
$V_= K.V_1 = 0$ Como: $K \neq 0 \Rightarrow\ V_1 = 0,\ \forall I_2$.

$$B = 0$$

Ejercicio 5

(a)

$$\begin{pmatrix} V_1 \\ V_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Z_{11} & Z_{12} \\ Z_{21} & Z_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_1 \\ I_2 \end{pmatrix}$$

$\left.\frac{V_1}{I_1}\right|_{I_2=0} = Z_{11}$
$V_1 = (2R||\frac{1}{Cs})I_1$

$$Z_{11} = \frac{2R}{2RCs+1}$$

$\left.\frac{V_2}{I_1}\right|_{I_2=0} = Z_{21}$
$V_2 = \frac{1}{2}V_1$

$$Z_{21} = \frac{R}{2RCs+1}$$

$\left.\frac{V_2}{I_2}\right|_{I_1=0} = Z_{22}$
$V_2 = ((R + \frac{1}{Cs})||R)I_2$

$$Z_{22} = \frac{R(RCs+1)}{2RCs+1}$$

$\left.\frac{V_1}{I_2}\right|_{I_1=0} = Z_{12}$
$V_1 = (\frac{1}{RCs+1})V_2 = \frac{R(RCs+1)}{2RCs+1}\frac{1}{RCs+1}I_2$

$$Z_{12} = \frac{R}{2RCs+1}$$

(b) Basándonos en la figura **??**; obtenemos:

$$V_{AB} = \frac{V_1}{2}$$
$$Z_v = \frac{R}{2}$$

(c) Podemos usar la parte anterior para facilitar las cuentas. Obtenemos entonces la figura **??**. Trabajamos en fasores y planteamos:

$$v_i(t) = Re\{\bar{V}_i.\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega \mathrm{t}}\}; \qquad \bar{\mathrm{V}}_\mathrm{i} = 10\mathrm{V}$$

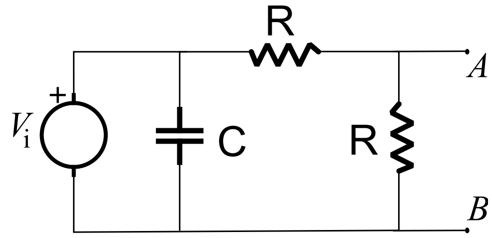

Figura 7:

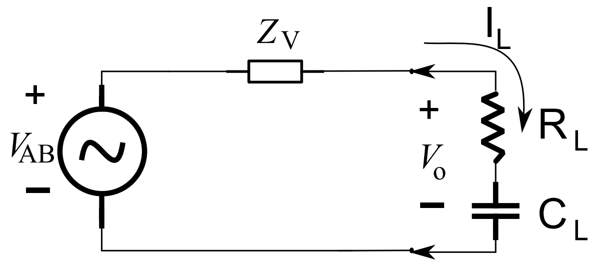

Figura 8:

$$\bar{I_L} = \frac{\bar{V_i}}{2(\frac{R}{2}+R_L+\frac{1}{j\omega C_L})} = \frac{j\omega C_L}{2+j\omega C_L(R+2R_L)}\bar{V_i}$$

$$\bar{V_o} = (\frac{1}{j\omega C_L}+R_L)\bar{I_L} = (\frac{1+j\omega R_L C_L}{j\omega C_L})(\frac{j\omega C_L}{Rj\omega C_L+2j\omega C_L R_L+2})\bar{V_i} = \frac{1+j\omega R_L C_L}{2+j\omega C_L(R+2R_L)}\bar{V_i}$$

Sustituyendo con los valores del problema:

$$\bar{I_L} = \tfrac{0.1j}{2+0.3j}A \qquad |\bar{I_L}| = 0.0497A \quad \angle\bar{I_L} = 81.47^o$$

$$i_L(t) = |\bar{I_L}|cos(\omega t + \angle\bar{I_L})$$

$$\bar{V_o} = \tfrac{1+0.1j}{2+0.3j}V \qquad |\bar{V_o}| = 0.4969V \quad \angle\bar{V_o} = -2.82^o$$

$$v_o = |\bar{V_o}|cos(\omega t + \angle\bar{V_o})$$

(d) Ver figura **??**. Ángulos y módulos en el diagrama son aproximados.

(e)

$$P = \frac{1}{2}Re\{\bar{V_o}.\bar{I_L}^*\} = \frac{1}{2}(0.4969V)(0.0497A)cos(84.29) = 1.2285\times10^{-3}W$$

(f) Para maximizar la potencia disipada en Z_L se probó en el teórico que:

$$Z_L = Z_v^* = \frac{R}{2}$$

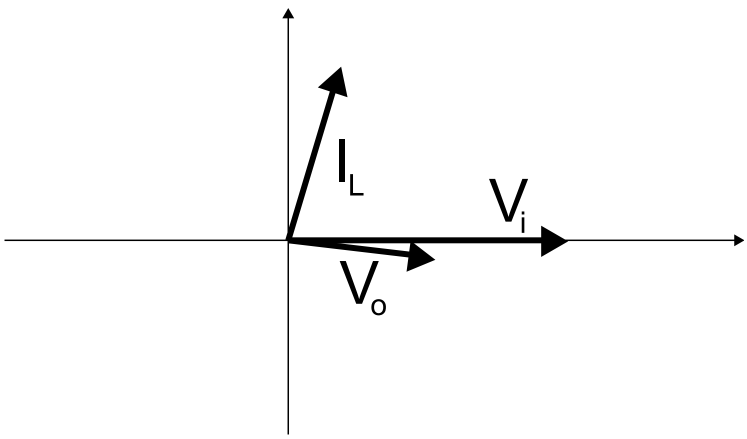

Figura 9: