Teoría de Circuitos

Práctico 3
Régimen sinusoidal

2012

Cada ejercicio comienza con un símbolo el cual indica su dificultad de acuerdo a la siguiente escala: ✦ básica, ★ media, ✷ avanzada, y ✹ difícil.

✦ Ejercicio 1

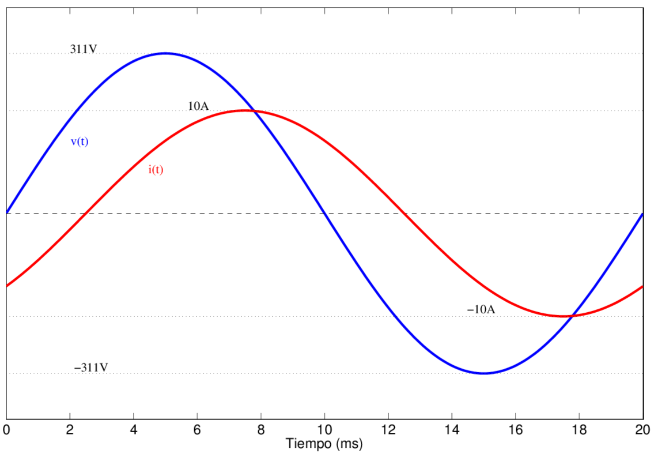

Figura 1: Señales del ejercicio 1

En bornes de un elemento lineal Z se observan las siguientes formas de onda de corriente i(t) y tensión v(t). ¿El elemento es capacitivo, inductivo o resistivo? Calcule la impedancia $Z(j\omega)$.

✦ Ejercicio 2

Graficar la impedancia de los circuitos que se muestran en la figura 2 en función de la frecuencia. Esos circuitos se conectan a una fuente de tensión sinusoidal $v(t) = V.sen(\omega t)$. Realice un diagrama fasorial de la magnitudes eléctricas relevantes. Se sabe que $\omega = 314rad/s$, $V = 311volts$ $L = 1mHy$, $C = 20\mu F$, $R = 100\Omega$. Calcule las potencias activa, reactiva y aparente que entrega la fuente.

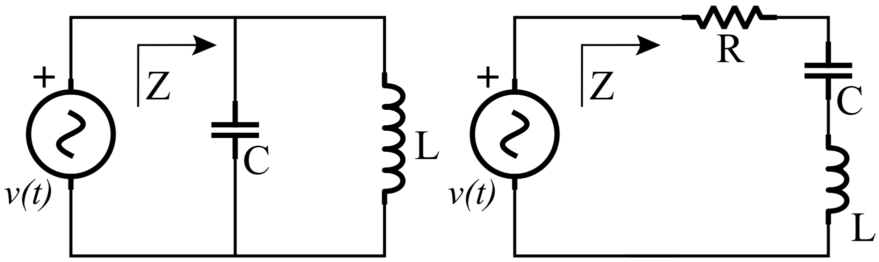

Figura 2: Circuitos del ejercicio 2.

⋆Ejercicio 3

La fuente de tensión en el circuito de la figura 3 es $v(t) = 40.sen(3000t)$. Realice un diagrama fasorial describiendo la relación de fase de las corrientes i_1, i_2, i y las tensiones v_1 y v. Sugerencia: comience por v_1, i_1 e i_2; luego determine i.

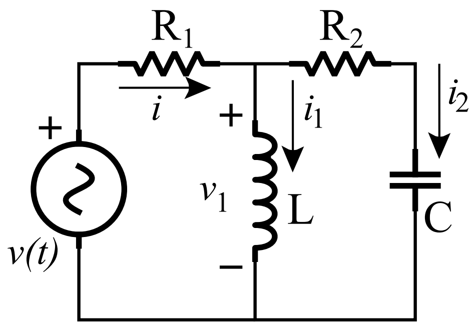

Figura 3: Circuito del Ejercicio 3

- $R_1 = 1.5k\Omega$
- $R_2 = 1k\Omega$
- $C = \frac{1}{6}\mu F$
- $L = \frac{1}{3}Hy$
- $\omega = 3000rad$

✦Ejercicio 4

Halle la potencia media entregada o absorbida por cada elemento del circuito de la figura 4. Realice el correspondiente diagrama fasorial.

- $Lj\omega = 2j\Omega$
- $\frac{1}{Cj\omega} = -2j\Omega$
- $R = 2\Omega$

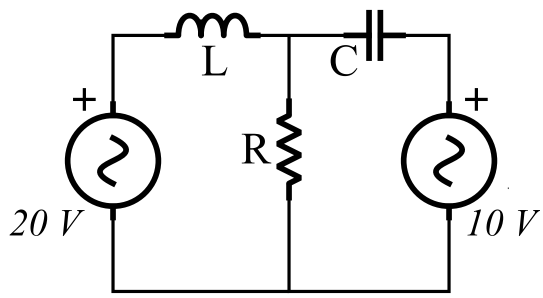

Figura 4: Circuito del Ejercicio 4

⋆ Ejercicio 5

En el circuito de la figura 5, $\bar{I}_1 = 1A$ y $\bar{I}_2 = 0.5A\mathrm{e}^{-j\frac{\pi}{2}}$. Hallar V_1 y V_2.

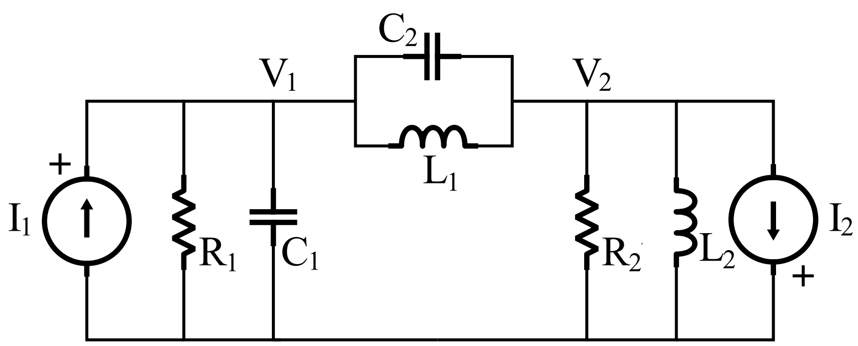

Figura 5: Circuito del ejercicio 5

- $R_1 = 5\Omega$
- $R_2 = 10\Omega$
- $\frac{1}{C_1 j\omega} = -j10\Omega$
- $\frac{1}{C_2 j\omega} = -j5\Omega$
- $L_1 j\omega = j10\Omega$
- $L_2 j\omega = j5\Omega$

⋆ Ejercicio 6

En el circuito de la figura 6, utilizando el principio de superposición, halle la parte de la corriente $i(t)$ que corresponde a cada una de las fuentes $v_1(t) = 4.cos(10^5 t)$, $i_1(t) = 2.cos\left(10^5 t - \frac{\pi}{4}\right)$, $i_2(t) = 2.cos(10^5 t)$.

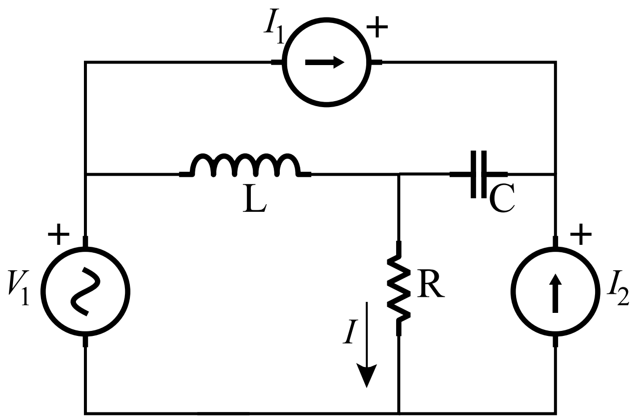

Figura 6: Circuito del Ejercicio 6

- $R = 2\Omega$
- $L = 20\mu H$
- $C = 10\mu F$

⋆ Ejercicio 7

En el circuito de la figura 7, halle Z_S en función de Z_L para que haya máxima transferencia de potencia a Z_S.

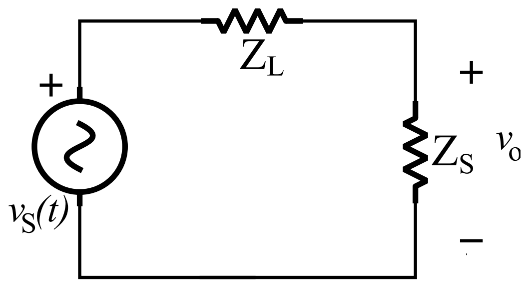

Figura 7: Circuito del Ejercicio 7

✶Ejercicio 8

(Segundo Parcial, Sistemas Lineales 1, 2003). En el circuito de la figura 8:

(a) Hallar la corriente $i(t)$, escrita como función del tiempo.

(b) Calcular la potencia instantánea $p(t)$ en R_1.

(c) Mostrar que dicha potencia consta de términos constantes y términos periódicos, cuya frecuencia se determinará.

(d) Deducir el valor medio de dicha potencia (potencia activa en R_1).

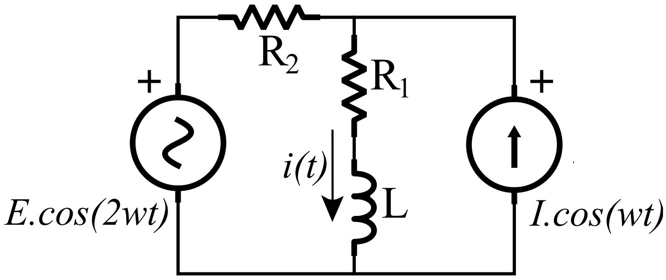

Figura 8: Circuito del Ejercicio 8

✶Ejercicio 9

A la izquierda de la figura 9 muestra un modelo simplificado de un motor de inducción monofásico (sistema electromecánico) operando en régimen sinusoidal. La potencia disipada en R representa la potencia mecánica entregada a la carga más pérdidas rotacionales de vacío (fricción en rodamientos, histéresis, etc.) (figura 9 - derecha). El campo inducido por la inductancia L es el que magnetiza el circuito magnético del motor, y se mantiene constante. Se pide:

(a) Diagrama fasorial tensión-corriente.

(b) Potencias activa, reactiva y aparente entregadas por la fuente.

(c) Si se coloca un condensador C en bornes del motor, calcular analíticamente, ayudándose con el diagrama fasorial, el valor del condensador que anule la potencia reactiva consumida por el motor a la fuente.

Los datos del modelo son: $v(t) = 311\sin(\omega t)$, $R = 33\Omega$, $L = 0.4Hy$ y $f = 50Hz$.

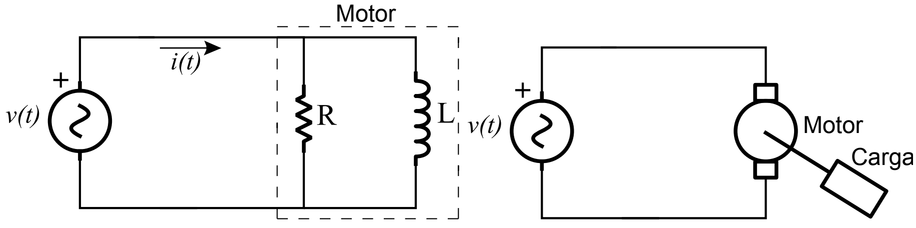

Figura 9: Modelo eléctrico del motor de inducción del ejercicio 9.

⋆ Ejercicio 10

Compensación serie de una carga capacitiva: en el circuito de la figura 10, se desea compensar el factor de potencia mediante un elemento Z insertado en serie con la carga. Determine el elemento Z (inductor, capacitor o resistor) y su impedancia, en función de C y R. Realice los diagramas fasoriales de antes y después de compensar.

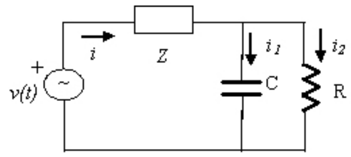

Figura 10: Circuito del ejercicio 11

✶ Ejercicio 11

La figura 11 representa el modelo de un amplificador transistorizado trabajando a altas frecuencias, con una fuente de tensión $v_i(t)$ (la señal) y una resistencia de carga R. Halle la transferencia $H(j\omega) = \frac{V_l(j\omega)}{V_i(j\omega)}$. Halle la tensión entregada a la carga. Se sabe que $v_i(t) = 10\, cos(\omega\, t)$, $\omega = 108 rad/s$.

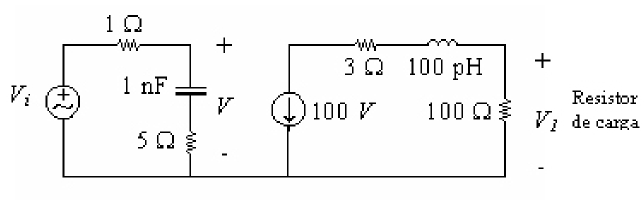

Figura 11: Circuito del ejercicio 12

Solución

Ejercicio 1

En primer lugar veamos como se comporta la corriente en bornes de un elemento lineal $Z(j\omega)$. Sea este capacitivo, resistivo o inductivo:

(i) Capacitivo:

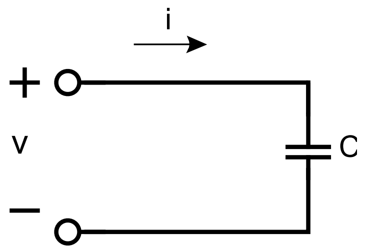

Figura 12: Circuito puramente capacitivo.

$$V = \frac{I}{Cj\omega} \Rightarrow I = V.Cj\omega$$

Vemos que la corriente por la carga tiene un desfasaje de $+\frac{\pi}{2}$ respecto del voltaje en bornes de la misma.
Cuando el elemento es CAPACITIVO, la corriente "adelanta" al voltaje.

(ii) Inductivo

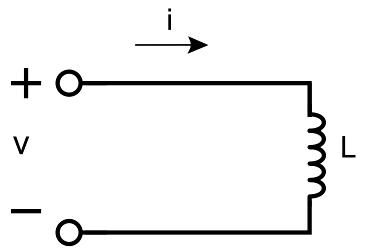

Figura 13: Circuito puramente inductivo.

$$V = I.Lj\omega \Rightarrow I = \frac{V}{Lj\omega}$$

Vemos que, en este segundo caso, la corriente por la carga tiene un desfasaje de $-\frac{\pi}{2}$ respecto del voltaje en bornes de la misma.
Cuando el elemento es INDUCTIVO, el voltaje "adelanta" a la corriente.

(iii) Resistivo

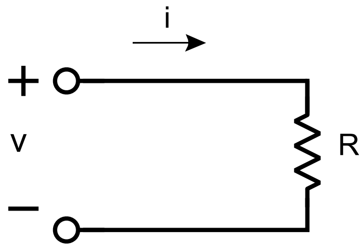

Figura 14: Circuito puramente resistivo.

$$V = R.I$$

Con R real.
Cuando el elemento es RESISTIVO, el voltaje y la corriente están en fase.

$\Rightarrow$ El estudiante notará entonces que en el presente ejercicio la carga es inductiva ya que en el gráfico adjunto el voltaje "adelanta" a la corriente. Calculemos a continuación, para evacuar posibles dudas remanentes, $Z(j\omega)$:

$$|Z(j\omega)| = \frac{|V(j\omega)|}{|I(j\omega)|} = 31.1\Omega$$

Asumo que el retardo de $i(t)$ respecto de v(t) es de $3ms$. Resultado logrado a "ojo"; se aceptan otras versiones siempre y cuando sean lógicas.
Mediante una regla de tres obtenemos:

$$\phi = \frac{3\pi}{10}$$

$$Z(j\omega) = 31.1\Omega e^{j\frac{3\pi}{10}}$$

Ejercicio 2

(i)

$$Z(j\omega) = Lj\omega || \frac{1}{Cj\omega} = \frac{j\omega}{(j\omega)^2 + \omega_o^2}\frac{1}{C}$$

Con $\omega_o^2 = \frac{1}{LC}$

$$v(t) = V.sen(\omega t) \Rightarrow \begin{cases} v(t) = Re\{\bar{V}.e^{j\omega t}\} \\ \bar{V} = V.e^{-j\frac{\pi}{2}} \end{cases}$$

$$\left.\begin{array}{c} \omega \approx 100\pi rad \\ V = 311V \\ L = 1mHy \\ C = 20\mu F \end{array}\right\} \Rightarrow Z(j\omega)|_{\omega=100\pi} = \frac{\pi}{10}j$$

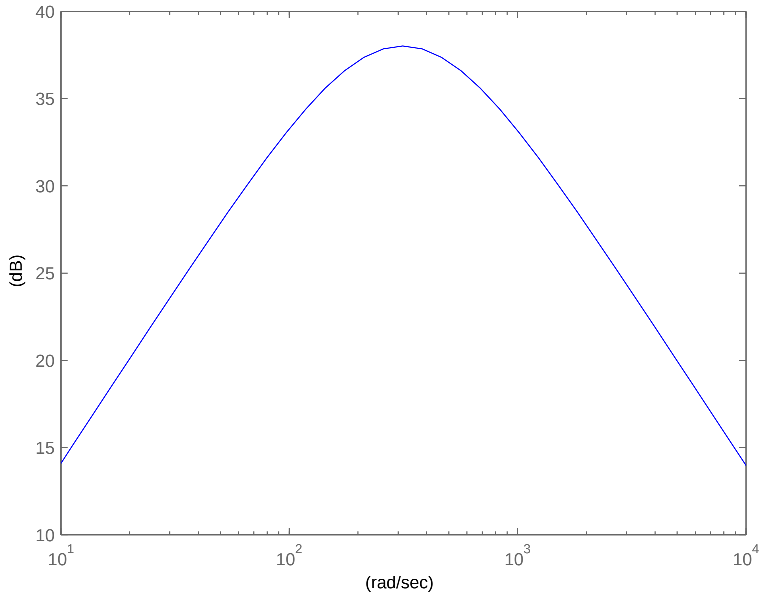

Figura 15:

Escrinimos a la corriente total del circuito de manera fasorial:

$$i(t) = Re\{\bar{I}.\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega \mathrm{t}}\}$$

Entonces:

$$\bar{V} = Z(j\omega).\bar{I}$$

$$\bar{I} = \frac{3110}{\pi}\mathrm{e}^{-j\pi}$$

Diagrama fasorial:

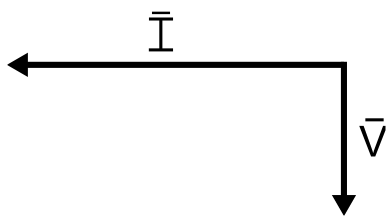

Figura 16:

Vemos que como la carga es 100 % inductiva, el voltaje "adelanta" $\frac{\pi}{2}$ radianes a la corriente.

$$\bar{S} = \frac{\bar{V}.\bar{I}^*}{2} = 153936.3jVA$$

Vemos que la potencia aparente es 100 % reactiva por ser una carga puramente inductiva. Tenemos entonces:

$$P = 0 \quad , \quad Q = 153936.3Var$$

(ii)

$$Z(j\omega) = L\frac{(j\omega)^2 + (\frac{R}{L})j\omega + \frac{1}{LC}}{j\omega}$$

$$\omega_{1,2} = \frac{-\frac{R}{L} \pm \sqrt{(\frac{R}{L})^2 + \frac{4}{LC}}}{2}$$
$$\omega_1 < 0 < \omega_2$$

$$Z(j\omega) = L\frac{(j\omega - \omega_1)(j\omega - \omega_2)}{j\omega}$$

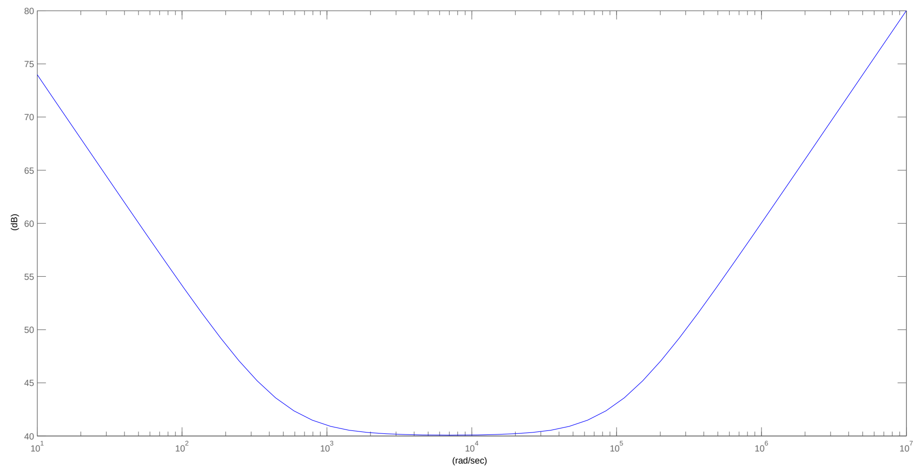

Figura 17:

$$|Z(j\omega)| = \left[\frac{(RC\omega)^2 + (1 - LC\omega^2)^2}{C^2\omega^2}\right]^{\frac{1}{2}} = 187.8\Omega$$
$$Z(j\omega)_{\angle} = Arctg\left[\frac{RC\omega}{1 - LC\omega^2}\right] - \frac{\pi}{2} = -0.32\pi$$

$$Z(j\omega) = 187.8\Omega \mathrm{e}^{-j0.32\pi}$$

$$\bar{V} = Z(j\omega).\bar{I}$$
$$\bar{I} = 1.66A\mathrm{e}^{-j0.18\pi}$$

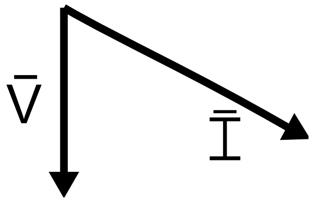

Figura 18:

Diagrama fasorial:
Como la corriente "adelanta" al voltaje, decimos que el circuito es capacitivo.

$$\bar{S} = \frac{\bar{V}.\bar{I}^*}{2} = 258.13VA\mathrm{e}^{-j0.32\pi}$$

$$P = 138.31W \quad , \quad Q = -217.95Var$$

Ejercicio 3

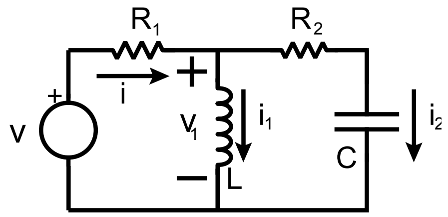

Figura 19:

Tabajamos con fasores:

$$v(t) = Re\{\bar{V}.\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega\mathrm{t}}\}$$

con $\bar{V} = V.\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\frac{\pi}{2}}$

$$v_1(t) = Re\{\bar{V}_1.\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega\mathrm{t}}\}$$
$$i_1(t) = Re\{\bar{I}_1.\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega\mathrm{t}}\}$$
$$i_2(t) = Re\{\bar{I}_2.\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega\mathrm{t}}\}$$
$$i(t) = Re\{\bar{I}.\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega\mathrm{t}}\}$$

$\Rightarrow$ En primer lugar calculamos una impedancia equivalente en serie con R_1 para así poder calcular v_1:

$$Z_{eq} = (C + R_2)||L$$

$$Z_{eq} = \frac{R_2LC(j\omega)^2 + Lj\omega}{LC(j\omega)^2 + RCj\omega + 1}$$

$\bar{V}_1 = \frac{Z_{eq}}{R_1+Z_{eq}}\bar{V}$

$\bar{V}_1 = \frac{R_2LC(j\omega)^2+Lj\omega}{(R_1+R_2)LC(j\omega)^2+(R_1R_2C+L)j\omega+R_1}\bar{V}$

Reemplazando las componentes por sus valores numéricos:

$$\bar{V_1} = \frac{40000j - 20000}{1750j + 250}\mathrm{e}^{-j\frac{\pi}{2}}$$

$$\left|\bar{V_1}\right| = \sqrt{640}$$

$$\bar{V_1}_{\angle} = Arctg(\tfrac{4000}{-2000}) - Arctg(\tfrac{1750}{250}) - \tfrac{\pi}{2} = 0.19\pi - \tfrac{\pi}{2}$$

$$\bar{V_1} = \sqrt{640}V.\mathrm{e}^{\mathrm{j}(0.19\pi - \frac{\pi}{2})}$$

$\bar{I_1} = \frac{\bar{V_1}}{Lj\omega} = \frac{\sqrt{640}A.\mathrm{e}^{\mathrm{j}(0.19\pi - \frac{\pi}{2})}}{1000j}$

$$\bar{I_1} = \frac{\sqrt{640}}{1000}A\mathrm{e}^{j(0.19\pi - \pi)}$$

$\bar{I_2} = \frac{\bar{V_1}}{R_2 + \frac{1}{Cj\omega}} = \frac{Cj\omega\bar{V_1}}{1 + R_2Cj\omega}$

$$\bar{I_2} = 11.3x10^{-3}A.\mathrm{e}^{\mathrm{j}0.04\pi}$$

$\bar{I} = \bar{I_1} + \bar{I_2}$

$$\bar{I} = 16x10^{-3}A.\mathrm{e}^{-\mathrm{j}0.71\pi}$$

Diagrama fasorial:

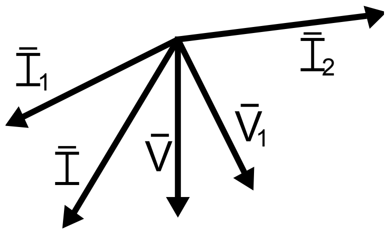

Figura 20: Diagrama fasorial. Ejercicio 3.

Ejercicio 4

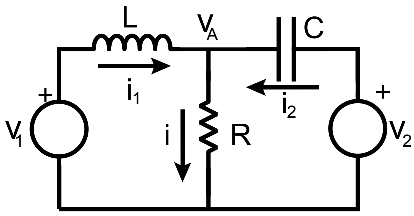

Figura 21:

Trabajamos con fasores:

- $v_1(t) = Re\{\bar{V_1} e^{j\omega t}\}$, donde $\bar{V_1} = 20V$
- $v_2(t) = Re\{\bar{V_2} e^{j\omega t}\}$, donde $\bar{V_2} = 10V$

Planteamos nudos y mallas:

$$\begin{gathered} \bar{I} = \bar{I_1} + \bar{I_2} \\ \bar{V_1} = \bar{I} 2\Omega + \bar{I_1} 2j\Omega \\ \bar{V_2} = \bar{I} 2\Omega - \bar{I_2} 2j\Omega \end{gathered}$$

$\bar{V_2} = \bar{I} 2\Omega - (\bar{I} - \bar{I_1}) 2j\Omega = (2-2j)\Omega \bar{I} + \bar{I_1} 2j\Omega$

$$\bar{I_1} = \frac{\bar{V_2} + (2j-2)\Omega \bar{I}}{2j}$$

$$\bar{V_1} = \bar{V_2} + (2j-2)\Omega \bar{I} + \bar{I} 2\Omega$$

$$\bar{I} = -5jA = 5A.\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\frac{\pi}{2}} \tag{1}$$

$$\bar{I_1} = (5-10j)A = \sqrt{125}A.\mathrm{e}^{-\mathrm{jArctg}(2)} \tag{2}$$

$$\bar{I_2} = (-5+5j)A = \frac{10}{\sqrt{2}} A\mathrm{e}^{j\frac{3\pi}{4}} \tag{3}$$

Calculamos la potencia aparente en bornes de un componente eléctrico mediante la siguiente ecuación:

$$W = \frac{\bar{V}.\bar{I}^*}{2}$$

Sea la potencia activa la parte real de la potencia aparente.
Potencia consumida en cada componente:

- Fuente v_1:
$$W_1 = -\frac{20V.\sqrt{125}A}{2}cos(Arctg(2)) = -50W$$
Entrega potencia

- Fuente v_2:
$$W_2 = -\frac{10V.\frac{10}{\sqrt{2}}A}{2}cos\left(\frac{3\pi}{4}\right) = 25W$$
Consume potencia

- Resistor R:
$$W_R = \frac{5A.5A.2\Omega}{2} = 25W$$
Consume potencia

Ejercicio 5

Trabajamos con fasores:

- $i_1(t) = Re\{\bar{I}_1.\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega \mathrm{t}}\}$, donde $\bar{I}_1 = 1A$
- $i_2(t) = Re\{\bar{I}_2.\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega \mathrm{t}}\}$, donde $\bar{I}_2 = 0.5A.\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\frac{\pi}{2}}$

Hallamos las 3 impedancias equivalentes de la figura 22:
Donde:

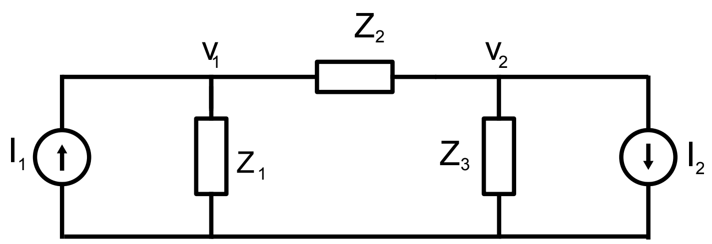

Figura 22:

- $Z_1 = -\frac{50j}{5-j10}\Omega$
- $Z_2 = -10j\Omega$
- $Z_3 = \frac{50j}{10+j5}\Omega$

Aplicando ley de nudos de Kirchhoff:

$1A = \frac{\bar{V_1}}{Z_1} + \frac{\bar{V_1}-\bar{V_2}}{Z_2}$
$-0.5jA = -\frac{\bar{V_2}}{Z_3} - \frac{\bar{V_1}}{Z_1} + 1A$

Operando...

$$\bar{V_2} = \frac{(Z_1+Z_2)}{Z_1}\bar{V_1} - Z_2 = (2-j2)\bar{V_1} + 10jV$$

$$\bar{V_1} = Z_1 1.5A - \frac{Z_1}{Z_3}\bar{V_2} = -\frac{50j\Omega}{5-j10}1.5A + \frac{(10+j5)}{5-j10}\bar{V_2}$$

Despejando...

$$\bar{V_1} = (1-j2)V = \sqrt{5}V.\mathrm{e}^{-\mathrm{jArctg(2)}}$$

$$\bar{V_2} = (4j-2)V = \sqrt{20}V.\mathrm{e}^{\mathrm{j(Arctg(2)}-\pi)}$$

Ejercicio 6

Trabajamos con fasores:

- $v_1(t) = Re\{\bar{V_1}.\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega\mathrm{t}}\}$, donde $\bar{V_1} = 4V$
- $i_1(t) = Re\{\bar{I_1}.\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega\mathrm{t}}\}$, donde $\bar{I_1} = 2A.\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\frac{\pi}{4}}$
- $i_2(t) = Re\{\bar{I_2}.\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega\mathrm{t}}\}$, donde $\bar{I_2} = 2A$
- $\omega = 10^5 \frac{rad}{s}$

(i) Hallamos la respuesta del circuito a $v_1(t)$. El circuito nos queda como en la figura 23.

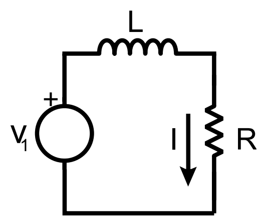

Figura 23:

$$\bar{I_i} = \frac{\bar{V_1}}{Lj\omega + R} = \frac{4}{2+j2}A$$

$$\bar{I_i} = \sqrt{2}.\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\frac{\pi}{4}}$$

(ii) Hallamos la respuesta del circuito a $i_1(t)$. El circuito nos queda como en la figura 24.

$$\bar{I_{ii}} = \frac{Lj\omega}{R + Lj\omega}\bar{I_1} = \frac{2j}{2+2j}\bar{I_1}$$

$$\bar{I_{ii}} = \sqrt{2}$$

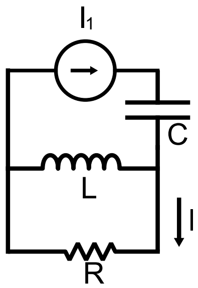

Figura 24:

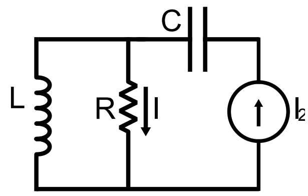

Figura 25:

(iii) Hallamos la respuesta del circuito a $i_2(t)$. El circuito nos queda como en la figura 25.

$$\bar{I_{iii}} = \frac{Lj\omega}{Lj\omega + R}\bar{I_2} = \frac{2j}{2+j2}\bar{I_2}$$

$$\bar{I_{iii}} = \sqrt{2}.\mathrm{e}^{\mathrm{j}\frac{\pi}{4}}$$

Podemos calcular entonces la respuesta total como <u>la suma de las tres contribuciones:</u>

$$\bar{I} = \bar{I_i} + \bar{I_{ii}} + \bar{I_{iii}} = \sqrt{2}.\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\frac{\pi}{4}} + \sqrt{2} + \sqrt{2}.\mathrm{e}^{\mathrm{j}\frac{\pi}{4}}$$

$$\bar{I} = \sqrt{2} + 2\sqrt{2}cos(\frac{\pi}{4}) = \sqrt{2} + 2\sqrt{2}.\frac{1}{\sqrt{2}} = \sqrt{2} + 2$$

$$i(t) = (2+\sqrt{2})cos(\omega t)$$

Ejercicio 7

Trabajamos en fasores.
Sea $\bar{V_s}$ un fasor genérico asociado a $v_s(t)$, el cual vamos a suponer en valores eficaces. Si llamamos $v_o(t)$ al voltaje en bornes de Z_s tenemos:

$$\bar{V_o} = \frac{Z_s}{Z_L + Z_s}\bar{V_s} \quad ; \quad \bar{I} = \frac{\bar{V_s}}{Z_L + Z_s}$$

La potencia aparente consumida por Z_S será:

$$S_s = \bar{V_o}.\bar{I}^* = \frac{Z_s}{Z_L + Z_s}\bar{V_s}.\frac{\bar{V_s}^*}{(Z_L + Z_s)^*} = \frac{Z_s}{|Z_L + Z_s|^2}.|\bar{V_s}|^2$$

Desde que la potencia activa es la parte real de la potencia aparente; es fácil ver que P_s será máxima cuando $Re\{\frac{Z_s}{|Z_L+Z_s|^2}\}$ es máxima. ¡Y eso pasa cuando Z_s y Z_L son complejos conjugados!
No me crean: ¡hagan las cuentas!
Concluímos entonces que para tener máxima transferencia de potencia:

$$Z_s = {Z_L}^*$$

Y además, para este caso:

$$P_s = \frac{|\bar{V}_s|^2}{4.Re\{Z_L\}}$$

Ejercicio 8

(a) Ver que como se tienen dos fuentes trabajando a frecuencias distintas no se puede trabajar con fasores.; pues la frecuencia de trabajo debe ser única. Sin embargo, como el sistema es lineal podemos aplicar superposición y tratar a cada fuente por separado. Entonces sí podríamos trabajar en fasores:

$$i(t) = Re\left\{\bar{I}_1.\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega \mathrm{t}} + \bar{\mathrm{I}}_2.\mathrm{e}^{\mathrm{j}2\omega \mathrm{t}}\right\}$$

- Primero apagamos la fuente de corriente. Obtenemos el circuito de la figura 26.

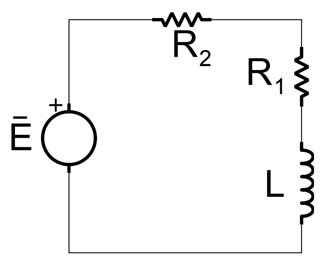

Figura 26:

$$\bar{I}_2 = \frac{\bar{E}}{R_1 + R_2 + Li\omega}$$

- Luego apagamos la fuente de voltaje. Obtenemos el circuito de la figura 27.

$$\bar{I}_1 = \frac{R_2}{R_1 + R_2 + Li\omega}\bar{I}$$

- Finalmente obtenemos $i(t)$:

$$i(t) = \frac{R_2 I}{\sqrt{(R_1+R_2)^2+(L\omega)^2}}.cos\left(\omega t - arctg\left(\frac{L\omega}{R_1+R_2}\right)\right)$$
$$+\frac{E}{\sqrt{(R_1+R_2)^2+(L\omega)^2}}.cos\left(2\omega t - arctg\left(\frac{L\omega}{R_1+R_2}\right)\right)$$

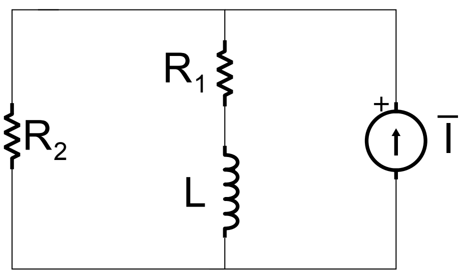

Figura 27:

(b) Si llamamos $v_1(t)$ al voltaje en bornes de R_1, tenemos que la potencia instantánea disipada en R_1 será:

$$p(t) = v_1(t).i(t) = R_1.i^2(t)$$

$$\begin{array}{c} p(t) = \frac{R_1 {R_2}^2 I^2}{(R_1+R_2)^2+(L\omega)^2} cos^2(\omega t - \phi_1) + \frac{R_1 E^2}{(R_1+R_2)^2+(L\omega)^2} cos^2(2\omega t - \phi_2) \\ +2\frac{R_1 R_2 EI}{(R_1+R_2)^2+(L\omega)^2} cos(\omega t - \phi_1) cos(2\omega t - \phi_2) \end{array}$$

(c) Si recordamos que: $cos(a)cos(b) = \frac{cos(a+b)+cos(a-b)}{2}$ obtenemos el siguiente resultado:

$$\begin{array}{c} p(t) = \frac{1}{2}\frac{R_1 {R_2}^2 I^2}{(R_1+R_2)^2+(L\omega)^2} \left[cos(2\omega t - 2\phi_1) + 1\right] + \frac{1}{2}\frac{R_1 E^2}{(R_1+R_2)^2+(L\omega)^2} \left[cos(4\omega t - 2\phi_2) + 1\right] \\ +\frac{R_1 R_2 EI}{(R_1+R_2)^2+(L\omega)^2} \left[cos(3\omega t - (\phi_1 + \phi_2)) + cos(\omega t + \phi_1 - \phi_2)\right] \end{array}$$

Nótese que efectivamante la potencia instantánea calculada en la parte (b) consta de dos términos constantes.

(d) El valor medio de la potencia será igual a la suma de los valores constantes; ya que los términos sinusoidales tienen valor medio nulo.

$$\bar{p(t)} = \frac{2\pi}{\omega}\int_0^{\frac{2\pi}{\omega}} p(t)dt = \frac{1}{2}\frac{R_1 {R_2}^2 I^2}{(R_1+R_2)^2+(L\omega)^2} + \frac{1}{2}\frac{R_1 E^2}{(R_1+R_2)^2+(L\omega)^2}$$

Ejercicio 9

(a) Como el sistema opera en régimen sinusoidal, podemos trabajar con fasores. Tomemos entonces:

$$v(t) = Re\left\{\bar{V}.\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega\mathrm{t}}\right\}; \qquad \bar{V} = \frac{311}{j}V$$

$$\begin{array}{c} Z_{eq} = \frac{RLj\omega}{R+Lj\omega} \\ \bar{V} = \bar{I}.Z_{eq} \end{array}$$

$$\bar{I} = \frac{R+Lj\omega}{RLj\omega}\bar{V} = \frac{(33+j125,66)\Omega^{-1}}{4146.9j}.\frac{311V}{j} = -(2.48+j9.42)A$$

$$i(t) = Re\left\{\bar{I}.\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega\mathrm{t}}\right\};$$

$$\bar{I}_{\angle} = -104,71^o$$
$$\left|\bar{I}\right| = 9.74A$$

En la figura 28 se muestra el diagrama fasorial:

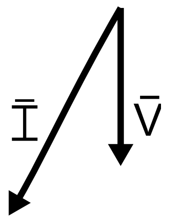

Figura 28: Diagrama fasorial. Ejercicio 9.

(b)

$$S = \frac{\bar{V}\bar{I}^*}{2} = \frac{\left|\bar{V}\right|^2}{2Z_{eq}^*} = \frac{(311V)^2 j}{2 \times 4146.9\Omega}(33 - j125.66) = (1465.43 + j384.84)VA$$

$$P = 1465.43W$$
$$Q = 384.84Var$$

Lo que acabamos de calcular son las potencias activa, reactiva y aparente entregadas por la fuente. Por conservación de la energía podemos estar seguros que la potencia activa entregada por la fuente debe ser igual a la potencia activa consumida con la resitencia (R); mientras que la potencia reactiva entregada por la fuente debe ser igual a la potencia reactiva consumida por la bobina (L).

- Calculamos primero la potencia aparente consumida por la resistencia:

$$S_R = \frac{(311V)^2}{2 \times 33\Omega} = 1465.46VA$$

- Calculamos ahora la potencia aparente consumida por la bobina:

$$S_L = \frac{(311V)^2}{-j125.66\Omega} = 769.70jVA$$

Como era de suponer la potencia aparente consumida por la resistencia es puramente real e igual a la potencia activa entregada por la fuente. Por su parte, la potencia aparente consumida por la bobina es puramente imaginaria e igual a la potencia reactiva entregada por la fuente.

(c) La idea es colorar un condensador C en bornes del motor para que entregue la potencia reactiva consumida por la inductancia L. Una forma sencilla de resolver este problema es colocar a C en paralelo con Z_{eq} de manera que Z_v por la fuente sea 100 % real. Entonces:

$$Z_v = \frac{\frac{1}{Cj\omega} \cdot \frac{RLj\omega}{R+Lj\omega}}{\frac{1}{Cj\omega} + \frac{RLj\omega}{R+Lj\omega}} = \frac{RLj\omega}{R(1 - LC\omega^2) + Lj\omega}$$

$$Z_v = \frac{RLj\omega}{R(1 - LC\omega^2) + Lj\omega} \cdot \frac{R(1 - LC\omega^2) - Lj\omega}{R(1 - LC\omega^2) - Lj\omega} = \frac{R(L\omega)^2 + R^2 Lj\omega(1 - LC\omega^2)}{R^2(1 - LC\omega^2)^2 + (L\omega)^2}$$

Para que Z_v sea puramente real:

$$C = \frac{1}{L\omega^2}$$

Ejercicio 10

Primero realicemos el diagrama fasorial del circuito antes de ser compensado.

$$v(t) = Re\left\{\bar{V}\mathrm{e}^{j\omega t}\right\}$$

Suponemos a $\bar{V}$ puramente real y de mólulo V. Además definimos a Z_{eq} como:

$$Z_{eq} = \frac{1}{Cj\omega}||R = \frac{R}{1+RCj\omega}$$

$$\bar{I} = \frac{1+RCj\omega}{R}\bar{V}$$

$$\left|\bar{I}\right| = \frac{\sqrt{1+(RC\omega)^2}}{R}V$$
$$\bar{I}_\angle = Arctg(RC\omega)$$

$$\bar{I}_1 = Cj\omega\bar{V}$$

$$\left|\bar{I}_1\right| = C\omega V$$
$$\bar{I}_{1\angle} = \frac{\pi}{2}$$

$$\bar{I}_2 = \frac{\bar{V}}{R}$$

$$\left|\bar{I}_2\right| = \frac{V}{R}$$
$$\bar{I}_{2\angle} = 0$$

Obtenemos entonces el diagrama fasorial de la figura 29.

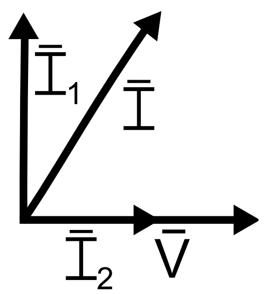

Figura 29: Diagrama fasorial inicial. Ejercicio 11.

Para compensar buscamos poner una Z en serie con Z_{eq} de manera que la $Z_v = Z + Z_{eq}$ vista por la fuente sea puramente real:

$$Z_v = \frac{R}{1+RCj\omega} + Z = \frac{R+Z+RCZj\omega}{1+RCj\omega} = \frac{R+Z+RCZj\omega}{1+RCj\omega}\cdot\frac{1-RCj\omega}{1-RCj\omega}$$
$$Z_v = \frac{R+Z+RCZj\omega-R^2Cj\omega-RZCj\omega+(RC\omega)^2Z}{1+(RC\omega)^2}$$

Ahora bien, si suponemos $Z = Xj$ puramente imaginaria obtenemos:

$$Z_v = \frac{R + j(X + (RC\omega)^2 X - R^2 C\omega)}{1 + (RC\omega)^2}$$

Y para que este resultado sea puramente real:

$$X = \frac{R^2 C\omega}{1 + (RC\omega)^2}$$

A partir de este momento:

$$Z_v = \frac{R}{1 + (RC\omega)^2}$$

Por lo tanto, como estamos trabajando en régimen fasorial despejamos:

$$\bar{I} = \frac{\bar{V}}{Z_v} = \frac{1 + (RC\omega)^2}{R}\bar{V}$$

$$\left|\bar{I}\right| = \tfrac{1+(RC\omega)^2}{R}V$$
$$\bar{I}_{\angle} = 0$$

$$\bar{I}_1 = \frac{R}{R + \frac{1}{Cj\omega}}\bar{I} = \frac{R}{R + \frac{1}{Cj\omega}}.\frac{1 + (RC\omega)^2}{R}\bar{V} = (RC^2\omega^2 + Cj\omega)\bar{V}$$

$$\left|\bar{I}_1\right| = \sqrt{[(RC\omega)^2 + 1]}C\omega V$$
$$\bar{I}_{1\angle} = Arctg(\tfrac{1}{RC\omega})$$

$$\bar{I}_2 = \frac{\frac{1}{Cj\omega}}{R + \frac{1}{Cj\omega}}\bar{I} = \frac{1}{RCj\omega + 1}.\frac{1 + (RC\omega)^2}{R}\bar{V} = \frac{1 - RCj\omega}{R}\bar{V}$$

$$\left|\bar{I}_2\right| = \sqrt{[(RC\omega)^2 + 1]}\tfrac{V}{R}$$
$$\bar{I}_{2\angle} = -Arctg(RC\omega)$$

Obtenemos finalmente el diagrama fasorial de la figura 30.

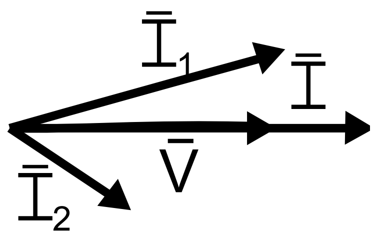

Figura 30: Diagrama fasorial final. Ejercicio 11.

Ejercicio 11

Para facilitar la notación durante el ejercicio tomaremos:

- $R_1 = 1\Omega$
- $R_2 = 3\Omega$
- $R_C = 100\Omega$
- $L = 100pH$
- $C = 1nF$

Además como se trabaja en régimen sinusoidal podemos trabajar en fasores:

$$v_i(t) = Re\left\{\bar{V}_i.\mathrm{e}^{\mathrm{j\omega t}}\right\}, \qquad \bar{V}_i = 10V$$

Calculamos primero el voltaje en bornes del condensador $\bar{V}$:

$$\bar{V} = \frac{\frac{1}{Cj\omega}}{R_1 + \frac{1}{Cj\omega}}\bar{V}_i = \frac{1}{R_1Cj\omega + 1}\bar{V}_i$$

Si llamamos $\bar{I}$ a la corriente impuesta por la fuente en la malla de la derecha (¡ojo el sentido!):

$$\bar{I} = 100\bar{V} = \frac{100}{R_1Cj\omega + 1}\bar{V}_i$$

Podemos entonces despejar facilmente el voltaje $\bar{V}_l$ en bornes de la resistencia de carga R_c y la transferencia $H(j\omega)$:

$$\bar{V}_l = -\frac{100}{R_1Cj\omega + 1}R_c\bar{V}_i$$

$$H(j\omega) = -\frac{100}{R_1Cj\omega + 1}R_c$$