Teoría de Circuitos

Práctico 1
Circuitos resistivos

2012

Cada ejercicio comienza con un símbolo el cual indica su dificultad de acuerdo a la siguiente escala: ✦ básica, ★ media, ✷ avanzada, y ✹ difícil.

✦ Ejercicio 1

Hallar bipolos equivalentes [1] a las componentes resistivas de la figura 1 de valores límite. Verificar que en cada caso, una de las magnitudes del bipolo (tensión o corriente) queda determinada, mientras que la otra no puede obtenerse mediante la ley de Ohm. ¿Cómo podrán determinarse las magnitudes desconocidas?

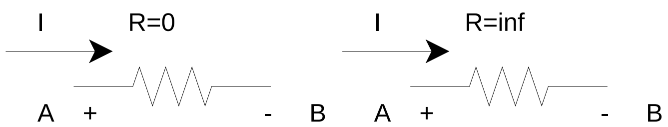


Figura 1: Casos límite de resistencias

✦ Ejercicio 2

(a) Para el circuito de la figura 2, hallar la resistencia equivalente entre A y B cuando $R1 = R$, $10R$, $0.1R$, $100R$ y $0.01R$.

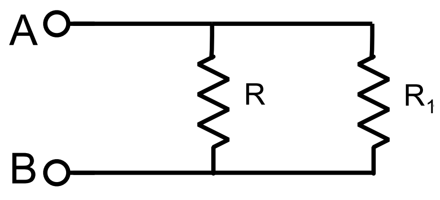


Figura 2: Resistencias en paralelo

(b) Deducir a cuánto tiende el valor de la resistencia equivalente a un paralelo, cuando una de las resistencias es de valor *mucho mayor* que la otra.

[1] Un bipolo equivalente es un elemento de dos terminales equivalente desde el punto de vista eléctrico, es decir igual función corriente-tensión, donde la corriente es la que circula a través del elemento y la tensión es la caída de voltaje entre los terminales.

(c) ¿Cuál le parece un criterio razonable para establecer la condición de *mucho mayor*?

(d) Demostrar que en el caso general el paralelo entre dos resistencias siempre es menos que cualquiera de las dos.

⋆ Ejercicio 3

En las figuras de la 3 a la 7 verificar si el circuito de la derecha es eléctricamente equivalente al de la izquierda visto desde los terminales A y B.

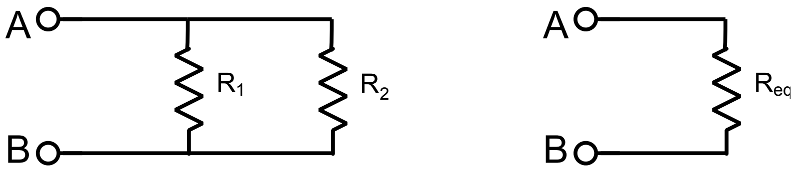


Figura 3: $R_{eq} = \frac{R_1 R_2}{R_1+R_2}$

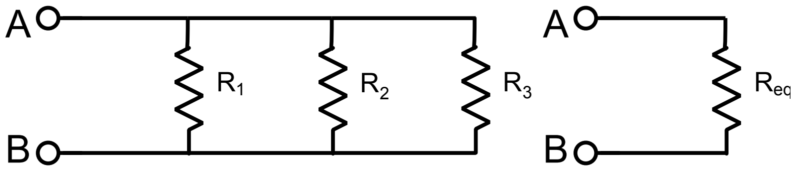


Figura 4: $R_{eq} = \frac{R_1 R_2 R_3}{R_1+R_2+R_3}$

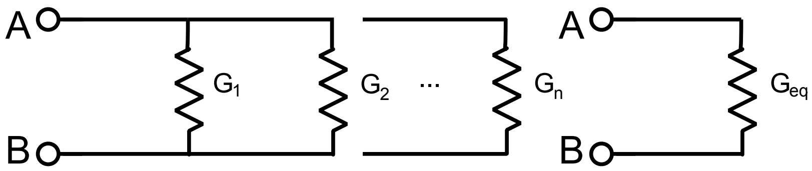


Figura 5: $G_{eq} = \sum_{i=1}^{n} G_i$

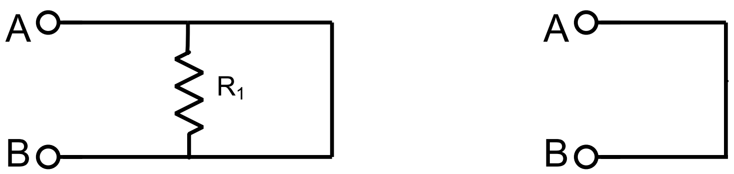


Figura 6:

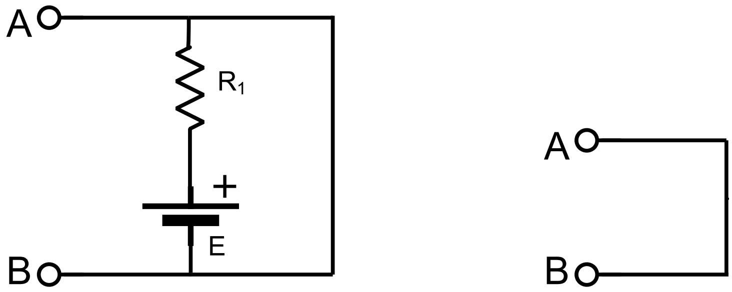
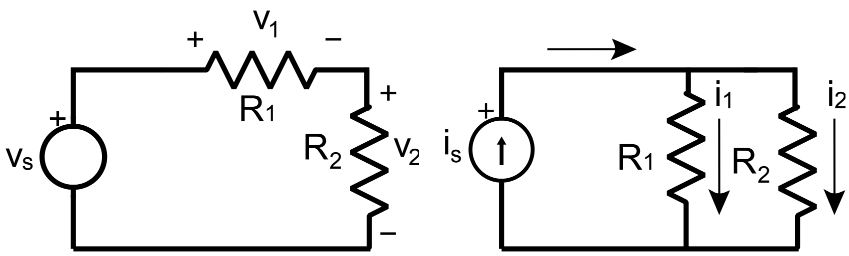


Figura 7:

✦ Ejercicio 4

(a) Divisor de tensión
Hallar la relación entre las caídas de voltaje en cada resistencia y v_s en la figura 8(a).



(a) Divisor de Voltaje (b) Divisor de Corriente

Figura 8: Divisores

(b) Divisor de corriente
Hallar la relación entre las corrientes por cada resistencia e I_s en la figura 8(b)

(c) Discutir los resultados de las partes anteriores para los casos en que $R_2 \gg R_1$ y $R_2 \ll R_1$

(d) Repetir la parte (b) pero con conductancias G1 y G2 en paralelo. Comparar con lo obtenido en la parte (a).

(e) En el circuito de la figura 9, aplicar los resultados de las partes anteriores para calcular v_1, v_o e i_1 en función de v_s

(f) Caso general del divisor de tensión
Consideremos ahora un caso general: calcular la caída de voltaje en la resistencia R_i donde $1 \leq i \leq n$, sabiendo que la caída total de voltaje es v_s.

(g) Caso general del divisor de corriente
Calcular la corriente que circula por la resistencia R_i donde $1 \leq i \leq n$, sabiendo que la corriente que circula a través de todas es I_s.
Sugerencia: Calcular en función de las admitancias $G_i = R_i^{-1}$ y luego reemplazar.

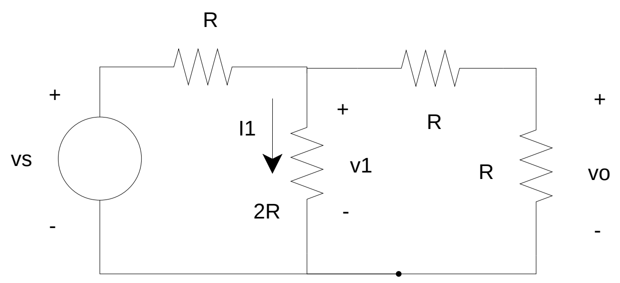


Figura 9: Aplicación de divisores

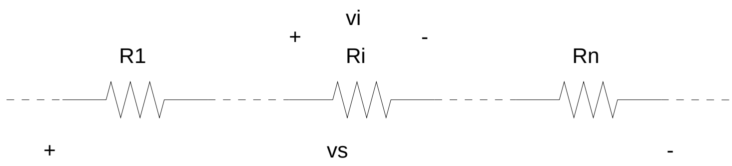


Figura 10: Caso general del divisor de tensión

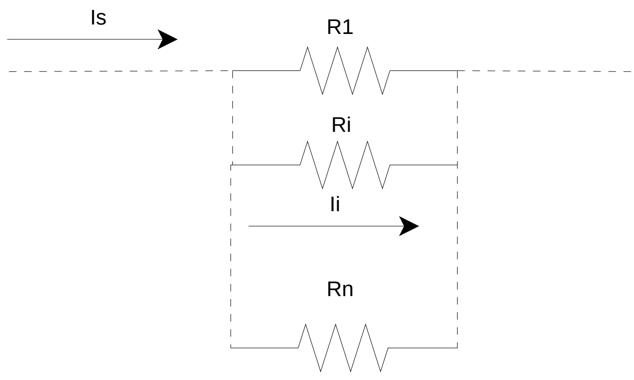


Figura 11: Caso general del divisor de corriente

✶Ejercicio 5

Usando los resultados de los problemas anteriores hallar las caídas de voltaje y las potencias instantáneas en todos los elementos del circuito de la figura 12.

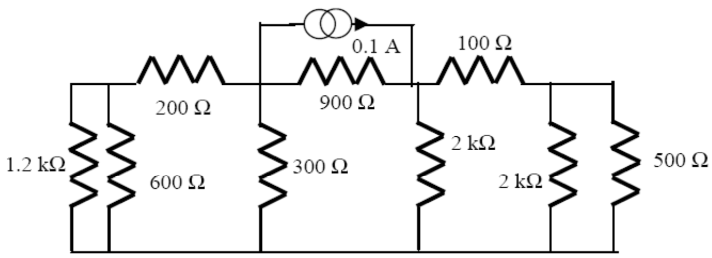


Figura 12:

✷Ejercicio 6

Hallar las tensiones y potencias instantáneas en todos los elementos de los circuitos de la figura 13.

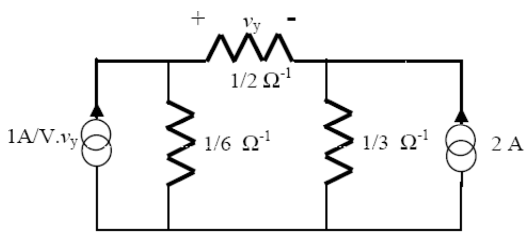


Figura 13:

Solución

Ejercicio 1

(i) Tomemos $R \to 0$ y prestemos atención a la Ley de Ohm: $V = R \times I$. Vemos que para cualquier corriente I, la caída de potencial en R es igual a cero. La resistencia se comporta entonces como un cable. Si queremos medir la corriente podemos usar un amperímetro ideal y conectarlo en serie con R.

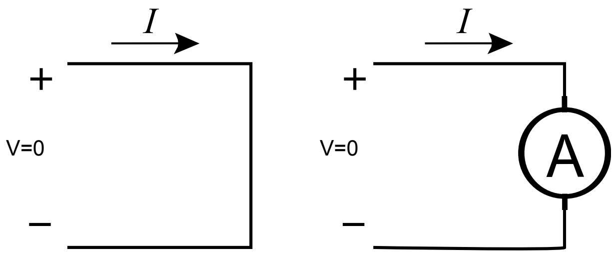


Figura 14:

(ii) Tomando ahora $R \to \infty$ vemos que la Ley de Ohm queda indeterminada. Como sabemos que $V \neq \infty$, ocurre que para levantar la indeterminación la corriente por la resistencia debe ser igual a 0. El circuito tiende a comportarse como un circuito abierto en R. Para medir la caída de potencial V colocamos un voltímetro ideal en bornes de R.

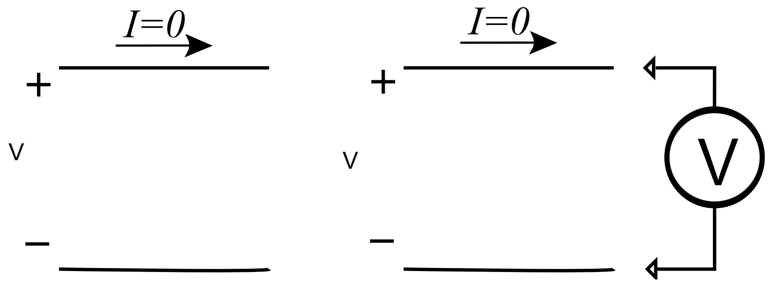


Figura 15:

Ejercicio 2

(a) En todos los casos la resistencia equivalente vale:

$$R_{eq} = R_1 || R \Rightarrow R_{eq} = \frac{1}{\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R}} = \frac{R_1 R}{R_1 + R}$$

Si $R_1 = R \Rightarrow R_{eq} = \frac{R}{2}$.
Si $R_1 = 10R \Rightarrow R_{eq} = \frac{10R}{11}$.
Si $R_1 = 0.1R \Rightarrow R_{eq} = \frac{0.1R}{1.1}$.

Si $R_1 = 100R \Rightarrow R_{eq} = \frac{100R}{101}$.
Si $R_1 = 0.01R \Rightarrow R_{eq} = \frac{0.01R}{1.01}$.

(b) Como $R_{eq} = \frac{R_1 R}{R_1+R}$, entonces: $\lim_{R_1 \to +\infty} \frac{R_1 R}{R_1+R} = R$
Idem para el caso $R \to +\infty$
Concluímos entonces que cuando tenemos un paralelo de dos resistencias, las cuales una es mucho mayor que la otra, la resistencia equivalente tiende a la menor de las dos. Verficar con los resultados obtenidos en (a).

(c) Basándonos en la parte (a); vemos que si una de las dos resistencias es 10 veces mayor que la otra, el error cometido si asumimos que el paralelo de ambas resistencias toma el valor de la menor de las dos, es menor al 10 %.
Este parece entonces ser un buen criterio para establecer la relación de "mucho mayor". Sin embargo, "depende"debe ser la respuesta más acertada. ¡Siempre y cuando esté bien justificada!

(d) Dadas dos resistencias en paralelo, siempre vamos a encontrar un α real tal que $R_1 = \alpha R$.
Entonces:

$$R_{eq} = \frac{R_1 R}{R_1 + R} = \frac{\alpha R^2}{(\alpha+1)R} = \frac{\alpha R}{\alpha + 1} < R \tag{1}$$

Ejercicio 3

- ✔ $R_1||R_2 = \frac{1}{\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}} = \frac{R_1 R_2}{R_1+R_2}$
- ✗ $R_1||R_2||R_3 = \frac{1}{\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}+\frac{1}{R_3}} = \frac{R_1 R_2 R_3}{R_1 R_2 + R_2 R_3 + R_3 R_1}$
  Notar que mediante un análisis dimensional ya podíamos afirmar que el equivalente estaba mal.
- ✔ $G = \frac{1}{R} = Conductancia$
  $R_1||R_2||...||R_n = R_{eq} = \frac{1}{\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}+...+\frac{1}{R_n}}$
  $\frac{1}{R_{eq}} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + ... + \frac{1}{R_n} \Rightarrow G_{eq} = G_1 + G_2 + ... + G_n$
  Finalemente: $G_{eq} = \sum_{i=1}^{n} G_n$
- ✔ Notar que es el primer caso, cuando $R_2 \to 0$.
  $R_{eq} = \frac{R_1 R_2}{R_1+R_2}|_{R_2=0}$
- ✔ Idem parte anterior. Ademas tomar en cuenta que para calcular una resitencia vista R_v debemos "apagar" las fuentes del circuito a estudiar. De esta manera nos queda exactamente lo mismo que en la parte anterior.

Ejercicio 4

(a)

- Por la ley de mallar de Kirchhoff:

$$v_s = v_1 + v_2 \tag{2}$$

- Por la ley de Ohm:
$$v_1 = R_1 i \tag{3}$$
$$v_2 = R_2 i \tag{4}$$
Con i la corriente por las resistencias.
De las ecuaciones (2), (3) y (4) tenemos que:
$$v_s = i(R_1 + R_2) \Rightarrow i = \frac{v_s}{R_1 + R_2} \tag{5}$$
Finalmente, reemplazando (5) en (3) y (4):
$$v_1 = \frac{R_1 v_s}{R_1 + R_2} \quad , \quad v_2 = \frac{R_2 v_s}{R_1 + R_2}$$

(b) Sea V_o la caída de potencial en las resistencias. Notar que al estar en paralelo, la caída de potencial en ambas debe ser la misma.

- Por la ley de nudos de Kirchhoff planteamos:
$$I_s = I_1 + I_2 \tag{6}$$
- Por la ley de Ohm:
$$I_1 R_1 = V_o \Rightarrow I_1 = \frac{V_o}{R_1} \tag{7}$$
$$I_2 R_2 = V_o \Rightarrow I_2 = \frac{V_o}{R_2} \tag{8}$$
Por las ecuaciones (6), (7) y (8):
$$I_s = \frac{V_o}{R_1} + \frac{V_o}{R_2} = \frac{R_1 + R_2}{R_1 R_2} V_o \Rightarrow V_o = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} I_s \tag{9}$$
Reemplazando la ecuación (9) en (6) y (7):
$$I_1 = \frac{R_2}{R_1 + R_2} I_s \quad , \quad I_2 = \frac{R_1}{R_1 + R_2} I_s$$

(c)

- <u>CASO DIVISOR DE TENSIÓN:</u>
$$v_1 = \frac{R_1 v_s}{R_1 + R_2} \quad , \quad v_2 = \frac{R_2 v_s}{R_1 + R_2}$$
$\Rightarrow$ Cuando $R_2 \gg R_1$:
$$v_1 \approx 0 \quad , \quad v_2 \approx v_s$$
$\Rightarrow$ Cuando $R_1 \gg R_2$:
$$v_1 \approx v_s \quad , \quad v_1 \approx 0$$
- <u>CASO DIVISOR DE CORRIENTE:</u>
$$I_1 = \frac{R_2}{R_1 + R_2} I_s \quad , \quad I_2 = \frac{R_1}{R_1 + R_2} I_s$$
$\Rightarrow$ Cuando $R_2 \gg R_1$:
$$I_1 \approx I_s \quad , \quad I_2 \approx 0$$
$\Rightarrow$ Cuando $R_1 \gg R_2$:
$$I_1 \approx 0 \quad , \quad I_2 \approx I_s$$

(d)

- Por ley de nudos de Kirchhoff:

$$I_s = I_1 + I_2 \tag{10}$$

- Por ley de Ohm:

$$I_1 = V_o G_1 \tag{11}$$

$$I_2 = V o G_2 \tag{12}$$

  Por las ecuaciones (10), (11) y (12):

$$I_s = V_o(G_1 + G_2) \Rightarrow V_o = \frac{I_s}{G_1 + G_2} \tag{13}$$

  Reemplazando (13) en (11) y (12):

$$I_1 = \frac{G_1}{G_1 + G_2} I_s \quad , \quad I_2 = \frac{G_2}{G_1 + G_2} I_s$$

(e) Tomamos la convención de signos y nombres como en la figura:

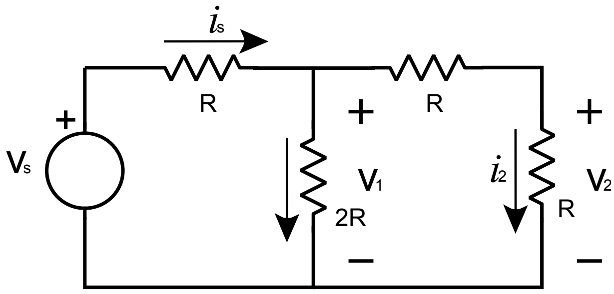


Figura 16: Circuito a estudiar

Aplicamos la ley de nudos de Kirchhoff:

$$I_s = I_1 + I_2 \tag{14}$$

Podemos simplificar el circuito calculando la siguiente resistencia equivalente:

$$R_{eq} = 2R||2R = R$$

¡Ante la duda hacer cuentas!
Obtenemos el siguiente circuito equivalente:

- Por divisor de tension:

$$v_1 = \frac{R}{R+R} v_s \Rightarrow v_1 = \frac{v_s}{2} \tag{15}$$

- Por divisor de corriente:

$$i_1 = \frac{2R}{2R+2R} I_s \Rightarrow i_1 = \frac{i_s}{2} \tag{16}$$

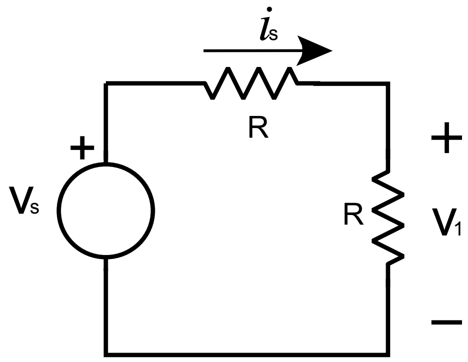


Figura 17: Circuito equivalente

- Por ley de Ohm, ley de mallas de Kirchhoff y la ecuación (15):

$$v_s = 2Ri_s \Rightarrow i_s = \frac{v_s}{2R} \Rightarrow i_1 = \frac{v_s}{4} \quad (17)$$

- Por (14) y (16):

$$i_s = \frac{i_s}{2} \quad (18)$$

- Por ley de Ohm y la ecuación anteiror:

$$v_o = \frac{i_s R}{2}$$

(f) Caso general del divisor de tensión:

Figura 18: Caso general de divisor de tensión

- Por ley de mallas de Kirchhoff:

$$v_s = v_1 + v_2 + \ldots + v_n$$

- Por ley de Ohm:

$$v_i = R_i i$$

Con i la corriente por las resistencias. Notar que es la misma para todas ellas.

$$\Rightarrow v_s = i(R_1 + R_2 + \ldots + R_n)$$

Podemos despejar i y hallar la caída de potencial en la resistecia n-ésima:

$$i = \frac{v_s}{R_1 + R_2 + \ldots + R_n} \Rightarrow v_i = \frac{R_i v_s}{\sum_{k=1}^{n} R_k}$$

(g) Caso general del divisor de corriente:

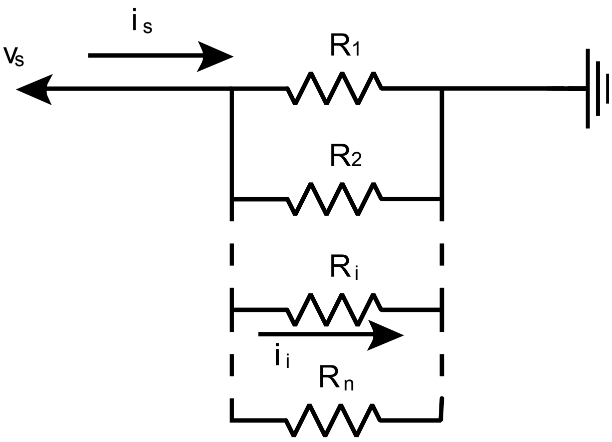


Figura 19: Caso general de divisor de corriente

Véase que la caída de potencial por cada resistencia vale lo mismo ya que estan en paralelo. LLamamos a esta caída de potencial v_s. Ver figura.

- Siguiendo la sugerencia ($G_i = \frac{1}{R_i}$):

$$i_i = G_i v_i$$

  Con v_i la caída de potencial en la i-ésima resistencia. Tenemos entonces que: $v_i = v_s$

$$\Rightarrow\ i_i = G_i v_s$$

- La ley de nudos de Kirchhoff nos afirma que:

$$i_s = i_1 + i_2 + \ldots + i_n \ \Rightarrow\ i_s = v_s(G_1 + G_2 + \ldots + G_n)$$

  Despejando v_s tenemos:

$$v_s = \frac{i_s}{\sum_{K=1}^{n} G_k}$$

  Finalmente, la corriente por la i-ésima resistencia será:

$$i_i = \frac{G_i i_s}{\sum_{K=1}^{n} G_k}$$

Ejercicio 5

- $R_1 = 900\Omega$
- $R_2 = 2000\Omega$

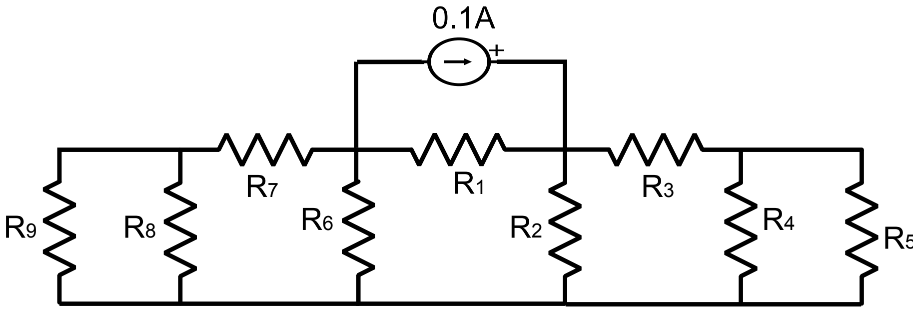


Figura 20: Circuito sin valores para facilitar los cálculos

- $R_3 = 100\Omega$
- $R_4 = 2000\Omega$
- $R_5 = 500\Omega$
- $R_6 = 300\Omega$
- $R_7 = 200\Omega$
- $R_8 = 600\Omega$
- $R_9 = 1200\Omega$

- Recordar que el *paralelo* de dos resistencias R_1 y R_2 vale:

$$R_{eq} = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}$$

- Recordar que la *serie* de dos resistencias R_1 y R_2 vale:

$$R_{eq} = R_1 + R_2$$

Obtenemos entonces los circuitos equivalentes de la figura **??**:

$R_{eq_1} = [(R_4||R_5)+R_3]||R_2 = 400\Omega, R_{eq_2} = [(R_8||R_9)+R_7]||R_6 = 200\Omega, R = (R_{eq_1}+R_{eq_2})||R_1] = 360\Omega$

$v = 0,1A.360\Omega = 36V$
Sean i_1 la corriente por R_1 e i_{eq} la corriente por los equivalentes resistivos:
$i_1 = 0,04A$

$$v_1 = 36v$$

$$P_1 = i_1 v_1 = 1,44W$$

$0,1A = i_{eq} + i_1 \;\Rightarrow\; i_{eq} = 0,06A$
$\Rightarrow\; v_{eq_1} = i_{eq}.400\Omega = 24V$

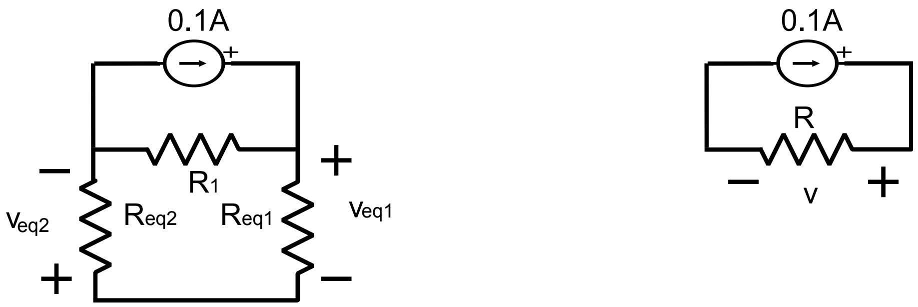


Figura 21: Circuitos equivalentes

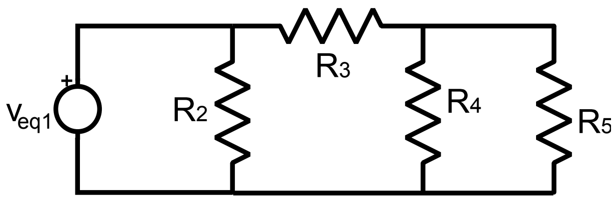


Figura 22: Circuito A

$\Rightarrow\ v_{eq_2} = i_{eq}.200\Omega = 12V$

Podemos ahora separar el problema en dos circuitos más simples:
En ambos circuitos llamaremos i_i a la corriente por la i-ésima resistencia y v_i al voltaje en bornes de la misma.
Circuito A:

$$v_2 = v_{eq_1} = 24V$$

$i_2 = \frac{24V}{2000\Omega} = 0,012A$

$$P_2 = i_2 v_2 = 0,288W$$

$i_{eq} = i_2 + i_3 \Rightarrow\ i_3 = 0,048A$

$$v_3 = R_3 i_3 = 4,8V$$

$$P_3 = v_3 i_3 = 0,2304W$$

$i_3(R_4||R_5) = v_4 = v_5$

$$v_4 = 19,2V$$

$$v_5 = 19,2V$$

¡Ver que $v_3 + v_4 = 24V = v_{eq_1}$! ✔

$i_4 = \frac{19,2V}{2000\Omega} = 0,0096A$
$i_5 = \frac{19,2V}{500\Omega} = 0,0384A$

¡Ver que $i_4 + i_5 = 0,048A = i_3$! ✔

$$P_4 = v_4 i_4 = 0,18432W$$

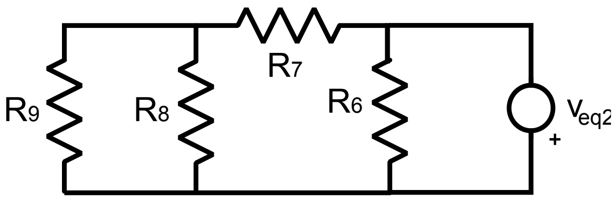


Figura 23: Circuito B

$$P_5 = v_5 i_5 = 0,73728W$$

¡Ver que $P_2 + P_3 + P_4 + P_5 = i_{eq} v_{eq_1} = P_{eq_1} = 1,44W$! ✔

Circuito B:

$$v_6 = v_{eq_2} = 12V$$

$i_6 = \frac{12V}{300\Omega} = 0,04A$

$$P_6 = i_6 v_6 = 0,48W$$

$i_{eq} = i_6 + i_7 \Rightarrow \ i_7 = 0,02A$

$$v_7 = R_7 i_7 = 4V$$

$$P_7 = V_7 i_7 = 0,08W$$

$i_7(R_8 || R_9) = v_8 = v_9$

$$v_8 = 8V$$
$$v_9 = 8V$$

¡Ver que $v_7 + v_8 = 12V = v_{eq_2}$! ✔

$i_8 = \frac{8V}{600\Omega} = 0,0133A$
$i_9 = \frac{8V}{1200\Omega} = 0,00674A$

¡Ver que $i_8 + i_9 = 0,02A = i_3$! ✔

$$P_8 = v_8 i_8 = 0,1067W$$

$$P_9 = v_9 i_9 = 0,0533W$$

¡Ver que $P_6 + P_7 + P_8 + P_9 = i_{eq} v_{eq_2} = P_{eq_2} = 0,72W$! ✔

Ejercicio 6

Sea el circuito de la figura ??. Tomaremos las corrientes como las definidas en la misma:

- $i_A = 1\frac{A}{V} v_y$
- $i_B = 2A$
- $R_1 = 6\Omega$
- $R_2 = 2\Omega$

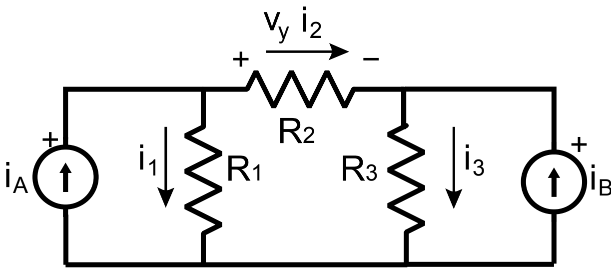


Figura 24:

- $R_3 = 3\Omega$
- Ley de nudos de Kirchhoff:

$$i_A = i_2 + i_B \quad , \quad v_y = i_2 R_2 \quad , \quad i_3 = i_2 + i_B$$

- Ley de mallas de Kirchhoff:

$$i_1 6\Omega - i_3 3\Omega - i_2 2\Omega = 0 \;\Rightarrow\; i_1 6\Omega = i_3 3\Omega + i_2 2\Omega$$

Operando:
$i_1 = i_2$
$i_1 = \frac{3}{4} i_3$
$i_3 - i_2 = i_B \;\Rightarrow\; (\frac{3}{4} - 1) i_2 = i_B = 2A \;\Rightarrow\; i_2 = 6A$
$\Rightarrow\; i_1 = 6A$
$\Rightarrow\; i_3 = 8A$

$$v_1 = 6A.6\Omega = 36V$$

$$P_1 = v_1 i_1 = 36V.6A = 216W$$

$$v_2 = 6A.2\Omega = 12V$$

$$P_2 = v_2 i_2 = 12V.6A = 72W$$

$$v_3 = 8A.3\Omega = 24V$$

$$P_3 = v_3 i_3 = 24V.8A = 192W$$

¡Ver que $v_1 = v_2 + v_3$! ✔
¡Ver que $P_1 + P_2 + P_3 = i_A v_1 + i_B v_3 = 480W$! ✔