

Notas sobre estabilidad

Pablo Flores, Ignacio Irigaray

2012

1. Introducción

Para entrar en sintonía con el concepto de estabilidad, considérese a un amplificador de audio como un sistema en el que su entrada es la señal de audio previamente convertida en voltajes, y su salida la tensión aplicada al parlante.

Es lógico suponer que este sistema deberá comportarse dentro ciertos márgenes; si la corriente aplicada a los parlantes creciera de manera descontrolada, estos saturarían e incluso podrían dañarse. Se concluye entonces que a la hora de diseñar un sistema de estas características es importante conocer, además de la relación funcional entre la entrada y la salida, si esta última se mantendrá acotada para toda entrada acotada; o en otras palabras, si el sistema es estable.

Este razonamiento es aplicable a la gran mayoría de los sistemas y en particular a los circuitos eléctricos. Sin embargo, nosotros enfocaremos nuestro estudio a sistemas **lineales, causales e invariantes en el tiempo**, cuya respuesta al impulso $h(t)$ sea descrita por una **función**.

2. Definición y algunos ejemplos conceptuales

2.1. Definición

Un sistema lineal e invariante en el tiempo (SLIT) es estable **si y sólo si** para toda entrada acotada, su salida también es acotada.

2.2. Respuesta de un SLIT

Sea un sistema S como los antes mencionados: lineal, causal, invariante en el tiempo y con respuesta al impulso una función $h(t)$. Su respuesta $y(t)$ a una entrada cualquiera $x(t)$ puede ser expresada como la convolución entre esta última y $h(t)$:

$$S\{x\}(t) = y(t) = x(t) * h(t)$$

en este punto resulta importante aclarar que a lo largo de las presentes notas se hablará indistintamente de $S\{x\}(t)$ e $y(t)$ como la respuesta de un sistema S a una entrada $x(t)$.

2.3. Ejemplos

2.3.1. Suma de sistemas estables

Es fácil ver que si dos SLITs S_1 y S_2 son estables, su suma también lo será:

$$(S_1 + S_2)\{x\}(t) = (h_1(t) + h_2(t)) * x(t) = h_1(t) * x(t) + h_2(t) * x(t)$$

2.3.2. Composición de sistemas estables

Resulta igual de sencillo ver que la composición de dos SLITs estables también será estable:

$$S_2\{S_1\{x\}\}(t) = h_2(t) * (h_1(t) * x(t)) = h_2(t) * S_1(x)(t)$$

donde $S_1\{x\}(t)$ es acotada si $x(t)$ también lo es, por ser S_1 estable. El razonamiento es idéntico para $S_2\{S_1\{x\}\}(t)$.

2.3.3. Sistema derivador ideal

Un sistema derivador ideal tiene una respuesta al impulso $h(t) = \delta'(t)$. No es muy complicado probar la inestabilidad de este tipo de sistemas; basta con hallar una entrada acotada que produzca en él una salida divergente. Tómese como ejemplo el escalón de Heavyside $Y(t)$:

$$Y(t) = \begin{cases} 1, & t \geq 0, \\ 0, & t < 0, \end{cases}$$

Esta función, si bien es acotada por la unidad, produce en el sistema derivador ideal un valor infinito en $t = 0$. Se concluye rápidamente que dicho sistema no es estable.

Vemos que para probar que un sistema es inestable es suficiente (aunque en ocasiones resulta un tanto complicado) buscar una entrada acotada que produzca en éste una salida no acotada. Sin embargo, no vimos hasta el momento un método utilizable en la práctica para probar que un sistema **sí** es estable; ¡deberíamos probar con todas las entradas acotadas existentes y eso es imposible! Resulta entonces necesario trabajar con criterios prácticos que, bajo ciertas hipótesis, garanticen la estabilidad de los sistemas.

3. Criterios de estabilidad

3.1. Condición necesaria y suficiente

La condición necesaria y suficiente para que un SLIT sea estable es que su respuesta al impulso $h(t)$ sea absolutamente sumable:

$$\int_0^{+\infty} |h(t)| dt = S < \infty \quad (1)$$

Demostración:

(\Leftarrow)

Veamos en primer lugar que la condición (1) es suficiente. Probaremos que si ésta se

cumple, el sistema es estable.

Sea $x(t)$ una entrada acotada:

$$|x(t)| < M, \quad \forall t$$

La salida del sistema será entonces:

$$y(t) = h(t) * x(t) = \int_0^{+\infty} h(\tau) \cdot x(t - \tau) d\tau$$

En módulo:

$$|y(t)| = \left| \int_0^{+\infty} h(\tau) \cdot x(t - \tau) d\tau \right| \leq \int_0^{+\infty} |h(\tau)| \cdot |x(t - \tau)| d\tau \leq M \cdot \int_0^{+\infty} |h(\tau)| d\tau$$

Y por la ecuación (1) concluimos que:

$$|y(t)| \leq M \cdot S < \infty \quad \forall t$$

(\Rightarrow)

Buscamos ahora probar que la condición (1) es además necesaria. Para este fin, procederemos por el absurdo: supongamos que no se cumple dicha condición, o, lo que es lo mismo, que $S = \infty$. Veremos que si esto ocurre, siempre podremos encontrar una entrada acotada tal que el sistema arroje una salida no acotada, por lo que éste no será estable.

Para ello considérese la siguiente función de entrada:

$$x(t) = \begin{cases} \frac{h^*(-t)}{|h(-t)|} & \text{si } h(-t) \neq 0, \\ 0 & \text{si } h(-t) = 0, \end{cases}$$

donde $h^*(t)$ es el complejo conjugado de $h(t)$.

Como el sistema en cuestión es un SLIT, su salida se puede calcular de la siguiente manera:

$$y(t) = h(t) * x(t) = \int_0^{+\infty} h(\tau) \cdot x(t - \tau) d\tau$$

en particular,

$$y(0) = \int_0^{+\infty} h(\tau) \cdot x(-\tau) d\tau = \int_0^{+\infty} h(\tau) \cdot \frac{h^*(\tau)}{|h(\tau)|} d\tau = \int_0^{+\infty} \frac{|h(\tau)|^2}{|h(\tau)|} d\tau = S$$

Vemos entonces que si no se cumple la ecuación (1), siempre podremos encontrar una entrada acotada tal que el sistema arroje una salida no acotada. Basándonos en la definición de estabilidad concluimos que el sistema no será estable.

3.2. Una condición muy útil

Para esta parte limitaremos el estudio únicamente a SLITs cuyas transferencias sean reales, racionales y estrictamente propias. Sea:

$$H(s) = \frac{P(s)}{Q(s)} = L\{h(t)\}(s)$$

la transferencia del sistema en cuestión. Además como esta es estrictamente propia, se cumple que $gr(P) < gr(Q)$.

⇒ Decimos que bajo las hipótesis mencionadas, **el sistema es estable si y sólo si $H(s)$ no tiene polos en \mathbb{C}^+** .

Demostración

Como nuestra transferencia es real, racional y estrictamente propia, ésta puede ser expresada de la siguiente manera:

$$H(s) = \sum_{i=1}^l \sum_{j=1}^{v_i} \frac{k_{ij}}{(s - s_i)^j}$$

donde s_i representa a cada una de las l raíces de $Q(s)$ y v_i su multiplicidad.

Antitransformando la ecuación anterior, obtenemos la respuesta al impulso del sistema:

$$h(t) = \sum_{i=1}^l \sum_{j=1}^{v_i} \frac{k_{ij}}{(j-1)!} t^{(j-1)} e^{s_i t}, \quad t \in \mathbb{R}^+$$

Tomando módulo de ambos lados de la igualdad:

$$|h(t)| \leq \sum_{i=1}^l \sum_{j=1}^{v_i} \frac{|k_{ij}|}{(j-1)!} t^{(j-1)} e^{\Re\{s_i\}t}, \quad t \in \mathbb{R}^+$$

Nótese que para este tipo de transferencias, $h(t)$ resulta absolutamente sumable si y sólo si la parte real de cada una de las raíces de $H(s)$ **no** pertenece a \mathbb{C}^+ . Finalmente, como un sistema de respuesta al impulso $h(t)$ es estable si y sólo si ésta es absolutamente sumable, queda demostrada la condición.

Nota: Este razonamiento puede extenderse fácilmente a respuestas al impulso dentro del cuerpo de las distribuciones, por lo que la condición anterior es, en rigor, aplicable a funciones reales, racionales y **propias** ($gr(P) \leq gr(Q)$). Sin entrar en los detalles formales de la demostración, será este un resultado a utilizar durante el curso.

4. Ejemplos prácticos

4.1. Circuito integrador

Estudiaremos la estabilidad de un circuito inversor-integrador como el de la figura 1.

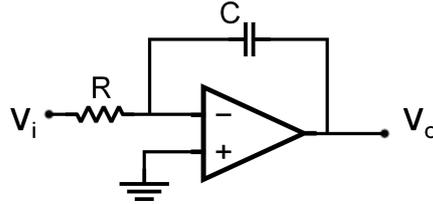


Figura 1: Circuito inversor-integrador

La transferencia del circuito anterior es bien conocida y vale:

$$H(s) = -\frac{1}{RCs}$$

Siendo ésta una función real, racional y estrictamente propia, podemos aplicar la condición necesaria y suficiente de estabilidad para transferencias de este tipo. Y como tiene un polo en el eje imaginario (que también pertenece a \mathbb{C}^+), concluimos que el sistema NO es estable.

Otra forma de estudiar la estabilidad del sistema hubiera sido antitransformar $H(s)$ y evaluar si $h(t)$ es absolutamente sumable. Los resultados obtenidos con uno y otro método deben coincidir:

$$L^{-1}\{H(s)\}(t) = h(t) = -Y(t) \cdot \frac{1}{RC}$$

$$\int_0^{+\infty} \left| -\frac{1}{RC} \right| dt = \infty$$

Concluimos nuevamente que el sistema en cuestión NO es estable.

4.2. Circuito RLC

Considérese ahora un circuito RLC como en la figura 2, en el que la salida del sistema es el voltaje en bornes de la bobina:

Para este circuito:

$$H(s) = \frac{s^2}{s^2 + 2\zeta\omega_0 s + \omega_0^2}$$

donde $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$ y $\zeta = \frac{R}{2} \cdot \sqrt{\frac{C}{L}} < 1$.

El sistema anterior tiene una transferencia real, racional y propia ($gr(P) = gr(Q)$); y sus polos son complejos conjugados con parte real negativa:

$$p_{1,2} = -\zeta\omega_0 \pm j\sqrt{(1-\zeta^2)}\omega_0$$

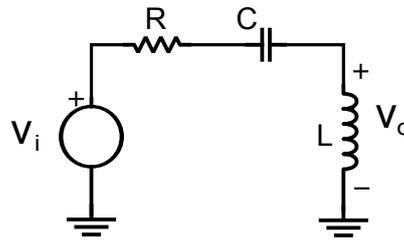


Figura 2: Circuito RLC

Ambos se encuentran a la izquierda del eje imaginario, por lo que es sistema SÍ es estable.

4.3. Circuito realimentado

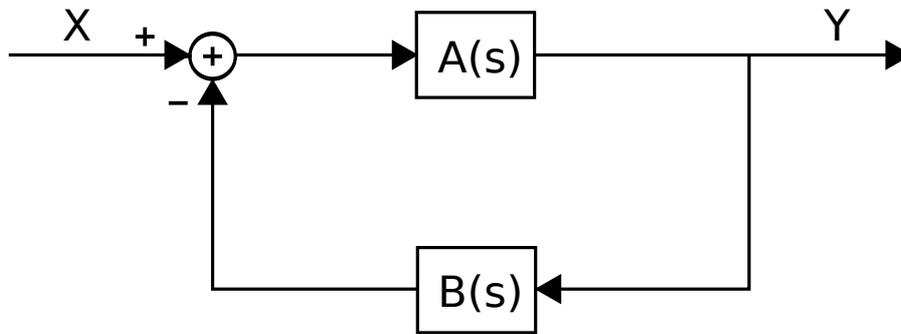


Figura 3: Diagrama de bloques

El diagrama de bloques de la figura 3 modela al circuito realimentado de la figura 4 y tiene una transferencia de la forma:

$$H(s) = \frac{A(s)}{1 + A(s) \cdot B(s)}$$

Realizando algunos cálculos, concluimos que para el circuito de la figura 4 en particular:

$$A(s) = k$$

$$B(s) = -\frac{Ls}{R}$$

Tenemos entonces:

$$H(s) = \frac{R/L}{\frac{R}{k} - s}$$

Si suponemos $k > 0$ obtenemos una transferencia con un polo en \mathbb{C}^+ y por lo tanto concluimos que el circuito NO es estable. Queda como ejercicio para el estudiante antitransformar $H(s)$ y probar que la respuesta al impulso del sistema $h(t)$ no es absolutamente sumable.

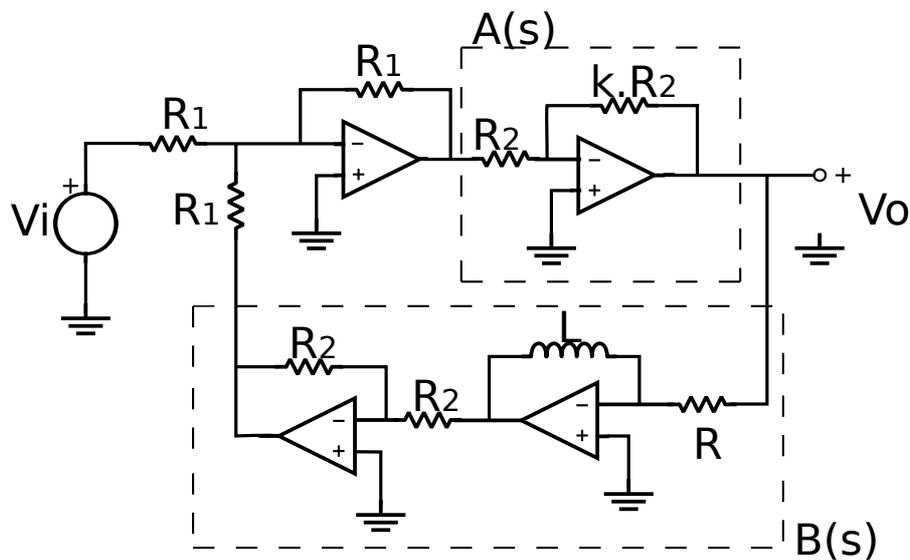


Figura 4: Circuito realimentado positivamente

5. Bibliografía

- Ogata, Katsuhiko. “Ingeniería de control moderna”.
- Piquinela, Juan; Monzon, Pablo. “Material de apoyo al curso de Sistemas Lineales II”, unidad 7.
<http://iie.fing.edu.uy/ense/assign/sislin2/interactivo/principal/notas.html> (Visitado 10/2011).
- Najson, Federico. “Notas (adicionales) sobre el Diagrama de Nyquist y el Criterio de Estabilidad de Nyquist [2007]”.
<http://iie.fing.edu.uy/cursos/course/view.php?id=39> (Visitado 10/2011).
- Alcarraz, Andrés. “Estabilidad de sistemas lineales y realimentación [2011]”.
<http://iie.fing.edu.uy/cursos/course/view.php?id=39> (Visitado 11/2011).