Unidad 2

CIRCUITOS EN LAPLACE

Indice

1. Introducción.

En el presente módulo, veremos algunas aplicaciones de la Transformada de Laplace en el análisis de los circuitos eléctricos.
Una vez precisados el objeto y los alcances de la teoría de circuitos, definiremos las principales componentes con las que se trabaja.
Integraremos el empleo de la transformada de Laplace, al punto de dibujar circuitos en transformadas.
Con esta herramienta, es posible hallar la solución completa de cualquier circuito.
Mostraremos la fuerza de la teoría de Laplace en distribuciones, con ejemplos que muestran la resolución de circuitos a partir de sus datos previos.
Destacaremos la importancia de las consideraciones dimensionales, tanto en su aspecto conceptual como en su carácter de ayuda para verificar la coherencia dimensional de los resultados de un problema práctico.
Repasaremos y generalizaremos los conceptos de potencia y energía.
Enumeraremos las propiedades clásicas de circuitos: lineales, invariantes con el tiempo, pasivos o activos, y concentrados o distribuidos.
Finalmente, introduciremos las funciones básicas, que permiten asociar a un circuito, ciertas funciones analíticas de la variable s.

2. Nuestra Teoría de Circuitos.

En este punto trataremos de establecer una teoría axiomática cuyos resultados permitan interpretar los circuitos reales.
Esto se fundamenta en la dificultad de resolver las ecuaciones de Maxwell: un problema de circuitos es sustancialmente más sencillo que un problema de campos.
Por lo tanto, desarrollaremos una Teoría de Circuitos (T de C) a partir de sus propios postulados, y solo ocasionalmente haremos referencia a Maxwell.

Los resultados de la T de C están vinculados a las soluciones de Maxwell para frecuencias suficientemente bajas. En otras palabras: son válidos cuando las dimensiones de los elementos físicos son pequeñas frente a la longitud de onda correspondiente a la frecuencia a la que se estudia el circuito.
Hablamos en este sentido de componentes <u>condensadas</u>, (o concentradas - lumped); las componentes distribuidas se estudian de otra manera.

$$\lambda = \frac{c}{f} \qquad c = 300.000 \text{ Km/seg}$$

P.ej: si f = 1MHz (rango de frecuencia de broadcasting en AM)

$$\lambda = \frac{300 \times 10^6}{10^6} \ \frac{m}{seg}.seg = 300\text{m}$$

Como se observa en el ejemplo, mientras las dimensiones de los elementos físicos sean pequeñas frente a 300m, el estudio podemos realizarlo en Teoría de Circuitos, sin necesidad de recurrir a la Teoría de Campos.
En el caso de FM, f = 100MHz $\Rightarrow \lambda$ = 3m; ya no existe tanto margen.
Para las mismas dimensiones del circuito, se ve que la validez está asociada a frecuencias "bajas".

En un caso, (componentes concentradas) se tienen ecuaciones diferenciales ordinarias (derivadas respecto al tiempo).
En el otro caso (componentes distribuidas), hay que tener en cuenta las dimensiones: ecuaciones en derivadas parciales, respecto al tiempo y a la distancia (caso de las líneas de transmisión).

A su vez, la axiomática se puede hacer a dos niveles:
a) con la teoría clásica de ecuaciones diferenciales en funciones, poniendo restricciones sobre las componentes ("reales")
b) en distribuciones, sin restricciones sobre las componentes ("ideales")
Nosotros adoptamos éste último.
Es más simple y general (incluye a los reales como caso particular).
Todo dispositivo real podrá representarse por un elemento ideal, o por una interconexión de ellos, bajo ciertas condiciones. En otras condiciones, el mismo dispositivo tendrá que representarse por otro modelo (Por ejemplo incorporando el efecto de las capacidades parásitas).
El problema de las consideraciones físicas que llevan a elegir un modelo, no pertenece a este curso sino a un curso de componentes.

El otro planteo no aceptará componentes tan sencillos como una inductancia pura, una capacidad pura o un cable sin resistencias.
En ese caso, los circuitos "ideales" aparecen como límite de los "reales", y así es que aparecen las "funciones impulso", sin mucho rigor.
Nosotros trabajaremos con componentes <u>ideales</u> y <u>postuladas</u> (cuando definamos Transformador, no nos apoyaremos sobre las relaciones de flujo magnético para la definición).

El objeto de la Teoría de Circuitos será el estudio de voltajes y corrientes de un sistema de componentes, interconectadas según una cierta topología.

Las Tensiones y corrientes serán distribuciones de D'_+.

La topología puede cambiar con el tiempo (como veremos al introducir el concepto de llave).

3. Fuentes

En primer lugar, veremos las fuentes independientes, o propiamente dichas

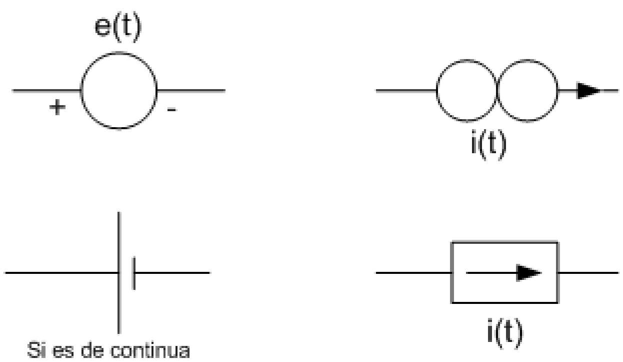
Una fuente independiente de $\begin{cases}\text{tensión}\\ \text{corriente}\end{cases}$ es un dispositivo tal que

$\begin{cases}\text{la tensión entre bornes}\\ \text{corriente que lo recorre}\end{cases}$ es una distribución

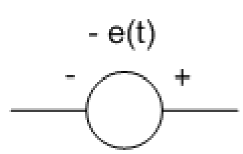
$\begin{cases}\text{e(t)}\\ \text{i(t)}\end{cases}$ en la variable tiempo, independiente de las tensiones y corrientes en otros elementos del circuito.

En particular, el voltaje en bornes de una fuente de tensión no depende de la corriente que ella suministra. Esto es claramente una fuente ideal.
Análogamente, la corriente de una fuente de corriente no depende del voltaje en sus bornes.

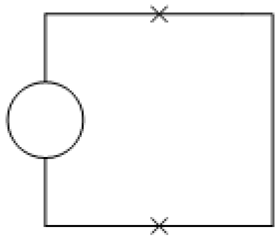
Símbolos



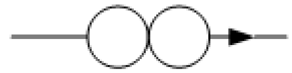
Para definir bien la fuente, no basta dar e(t); hay que dar la polaridad.
Cuando e(t) > 0, el borne + está a más voltaje que el -.
La misma fuente se puede representar así:



Operaciones prohibidas:
Cortocircuitar una fuente de tensión. Pues da dos condiciones contradictorias.
Aquí hay una doble idealización (no hay fuente ideal, ni cortocircuito ideal).
Dualmente, es incompatible una fuente de corriente en circuito abierto.



$$\begin{cases} v = e \\ v = 0 \end{cases}$$

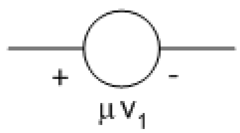


$$\begin{cases} I = i \\ I = 0 \end{cases}$$

e(t) e i(t) son cualquier distribución temperable, con soporte en alguna semirrecta derecha.

<u>Fuentes dependientes</u>
Una fuente dependiente de voltaje es un dispositivo tal que la tensión entre sus bornes es función del voltaje o corriente en algún elemento del circuito.
Análogamente se define una fuente dependiente de corriente.
El único tipo de dependencia que estudiaremos es la <u>lineal</u>.

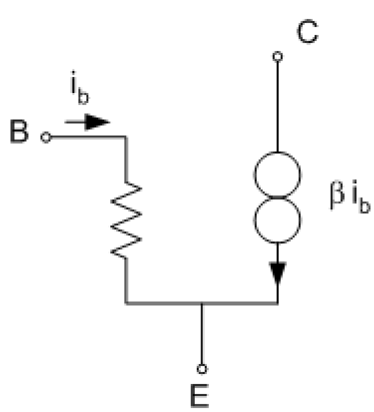
P. ej:



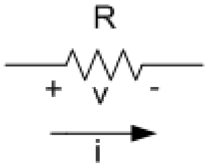
en que v_1 es la tensión en bornes de otro elemento.

Tubos y transistores se describen por circuitos equivalentes que incluyen fuentes dependientes, que permiten representar la capacidad de amplificar de esos dispositivos.

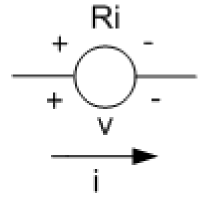
Por ejemplo, un transistor en configuración emisor común, posee este circuito equivalente:



Sin ir a esos casos, una simple resistencia la podemos interpretar como fuente dependiente:



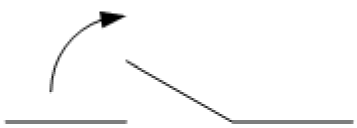
$v = Ri$ Equivale a poner:

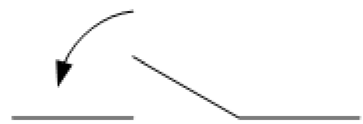


Si la definición de resistencia supone $R > 0$, como fuente dependiente nada impide considerar $R < 0$ (resistencia negativa).
En rigor las únicas fuentes son las independientes; las dependientes son más bien vínculos entre las variables.

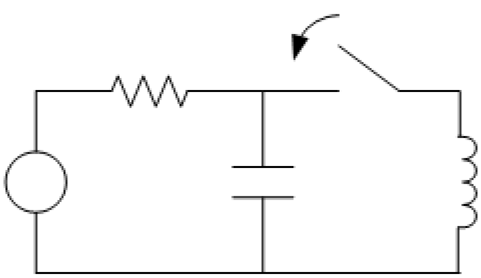
4. Llaves.

Dado un conjunto de componentes con una cierta topología, se llama 'llave' a una correspondencia asociada a un instante determinado, que lleva a las mismas componentes, dispuestas en una topología diferente.
En el instante en que acciona una llave, se puede definir el circuito previo y el circuito posterior.
Dibujamos:

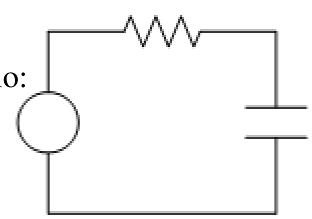




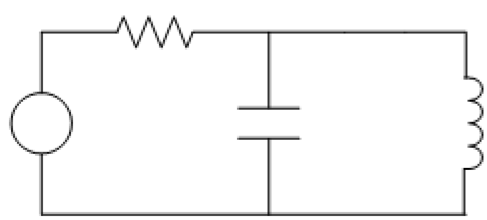
P.ej:



asocia un circuito previo:

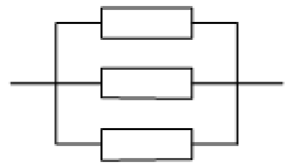


y uno posterior:



Usualmente el dibujo es claro, otras veces no (tampoco es necesario)

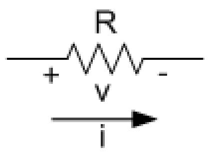
Ej: circuito previo circuito posterior



5. Componentes.

Las definiciones se pueden dar de tres maneras equivalentes:
a) ecuaciones diferenciales (en distribuciones).
b) ecuaciones de convolución.
c) transformadas de Laplace

Resistencia

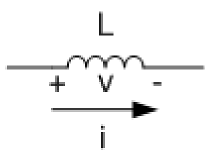


$v = Ri$ $\qquad v = R\delta * i$ $\qquad V = RI$

$V = V(s) = \mathcal{L}(v)$

$I = I(s) = \mathcal{L}(i)$

Self



$$v = L\frac{di}{dt} \quad (i_0)$$

$$v + Li_0\delta = L\frac{di}{dt} \qquad v + Li_0\delta = L\delta' * i \qquad V + Li_0 = LsI$$

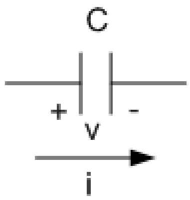
(venía de poner: $i_d = Yi_f$)

$$i_d = Yi_f \qquad \frac{di_d}{dt} = Y\frac{di_f}{dt} + i_o\delta$$

$$v_d = Yv_f \qquad L\frac{di_d}{dt} = Y\underbrace{L\frac{di_f}{dt}}_{v_f} + Li_o\delta$$

$$L\frac{di_d}{dt} = v_d + Li_o\delta$$

Capacidad



$$i = C\frac{dv}{dt}$$

$$i + Cv_0\delta = C\frac{dv}{dt} \qquad i + Cv_0\delta = C\delta'{*}v \qquad I{+}Cv_0 = CsV$$

R, L, C, son números positivos, dimensionados. (Ω, Hy, Fd).

¿Cuál es la dimensión de la δ? Recordando la δ como límite de funciones de área 1

$\int \delta dt = 1$, se ve que es la inversa de un tiempo.

Las 3 relaciones son invertibles en D'_+:

Así, recordando que Y es la inversa de la δ´:

$$v + Li_0\delta = L\delta'{*}i$$

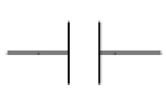
$$Y{*}v + Li_0\delta{*}Y = Li \quad \Rightarrow i = \frac{1}{L}Y{*}v{+}Yi_0$$

Y análogamente despejamos el voltaje en el condensador:

$$v = \frac{1}{C}Y{*}i{+}Yv_0$$

En Laplace, el despejar es todavía más sencillo:

$$V + Li_0 = LsI \Rightarrow I = \frac{1}{Ls}V + \frac{i_0}{s}$$



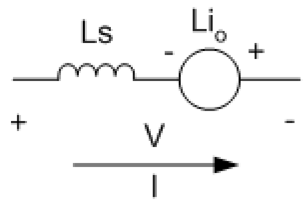
$$I + Cv_0 = CsV \Rightarrow V = \frac{1}{Cs}I + \frac{v_0}{s}$$

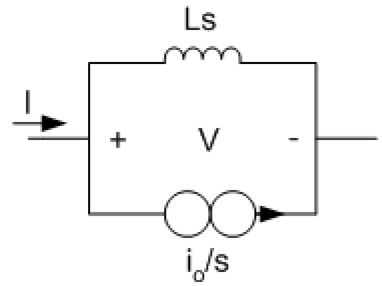
La conclusión es entonces: nos olvidamos de distribuciones y trabajamos con funciones analíticas.

6. Componentes en Laplace.

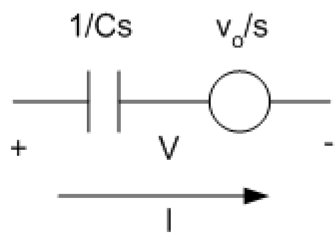
Directamente dibujamos el circuito en transformadas, es decir, interpretamos las ecuaciones de Laplace.

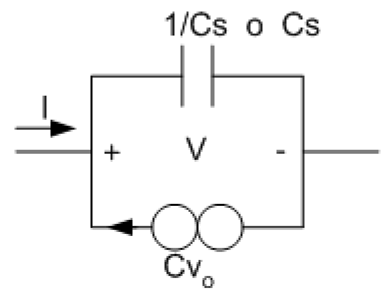
Self $\begin{cases} V = LsI - Li_0 \\ I = \dfrac{1}{Ls}V + \dfrac{i_0}{s} \end{cases}$



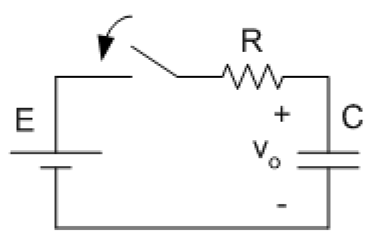


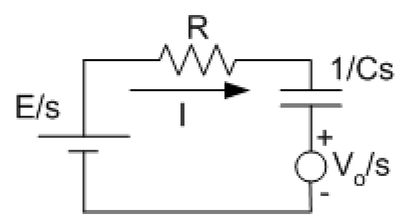
Capacidad $\begin{cases} V = \dfrac{1}{Cs}I + \dfrac{v_0}{s} \\ I = CsV - Cv_0 \end{cases}$





Ejemplos:
1)

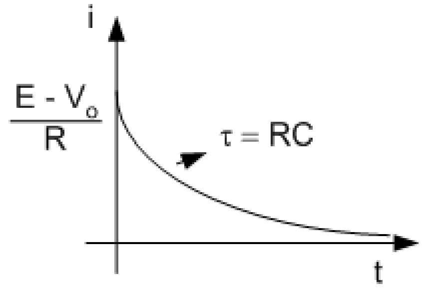




$$\frac{E}{s} - \frac{v_0}{s} = (R + \frac{1}{Cs})I$$

$$\frac{E - v_0}{s} = \frac{RCs + 1}{Cs}I$$

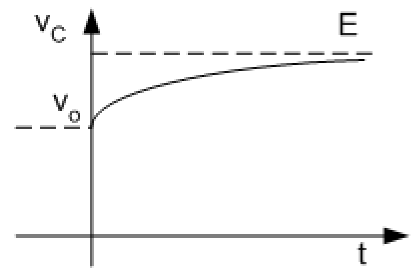
$$I = \frac{C(E - v_0)}{RCs + 1} = \frac{\frac{E - v_0}{R}}{s + \frac{1}{RC}} \Rightarrow i(t) = Y(t)\frac{(E - v_0)}{R}e^{-\frac{t}{\tau}}, \quad \text{con } \tau = RC$$



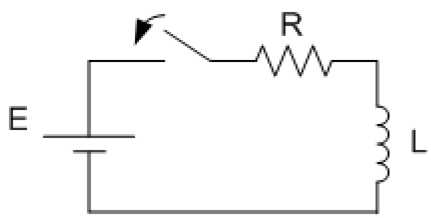
En bornes de C:

$$V_c = \frac{1}{Cs}I + \frac{V_0}{s} = \frac{\frac{E-V_0}{RC}}{s(s+\frac{1}{RC})} + \frac{V_0}{s} = \frac{E-V_0}{s} + \frac{V_0-E}{s+\frac{1}{RC}} + \frac{V_0}{s}$$

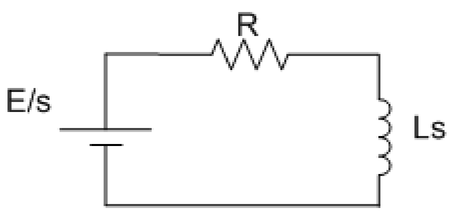
$$V_c = \frac{E}{s} + \frac{V_0-E}{s+\frac{1}{RC}} \Rightarrow v_c(t) = Y(t)\left[E + (V_0 - E)e^{-t/\tau}\right]$$



2)



$$\frac{E}{s} = (R + Ls)I$$

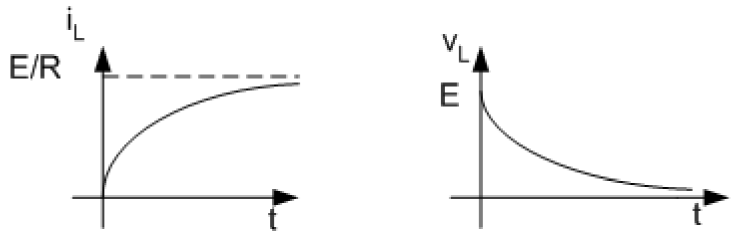


$$I = \frac{E}{s(Ls+R)} = \frac{\frac{E}{L}}{s(s+\frac{R}{L})} = \frac{\frac{E}{R}}{s} - \frac{\frac{E}{R}}{s+\frac{R}{L}}$$

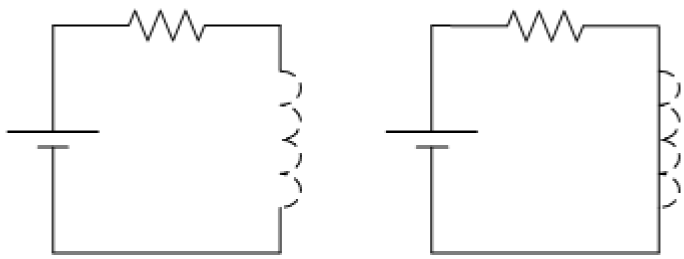
$$\Rightarrow i(t) = Y(t)\frac{E}{R}\left[1 - e^{-t/\tau}\right]$$

$$V_L = LsI = \frac{E}{s+\frac{R}{L}} \Rightarrow v_L = Y(t)Ee^{-t/\tau}$$

$$\tau = \frac{L}{R}$$



Podemos decir que: inicialmente, la self es un circuito abierto ($i_L = 0$ y toda la tensión de la fuente aparece sobre L)
finalmente, la self es un corto circuito ($v_L = 0$ y la corriente final está determinada por E y R).



Observaciones similares -duales- se pueden hacer para el condensador (circuito del ej. 1).

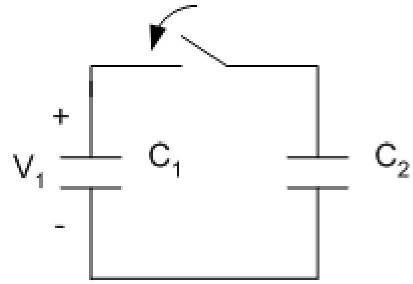
Observaciones.

1) Para hallar v(t) en bornes de la componente, hay que antitransformar todo (la fuente también).

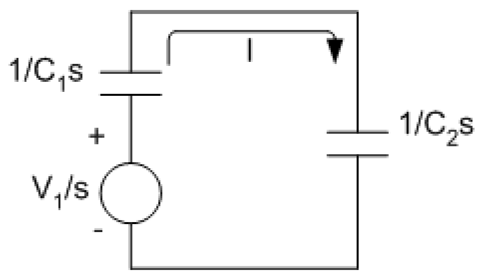
2) Obsérvese que en el dibujo aparece clara la observación de que <u>los datos previos son</u> <u>"fuentes"</u> en el circuito.
¿Qué tipo de fuentes? Fuentes <u>independientes</u>.

7. Datos previos.

De acuerdo a lo visto en Laplace con distribuciones, lo que ponemos en las fuentes son los datos previos -que conocemos- y no las condiciones iniciales. Veamos algún ejemplo al respecto.



Al cerrar la llave, el voltaje en ambos condensadores va a saltar (hay una δ en la corriente o sea: pasa una carga instantánea)



$$\frac{V_1}{s}=\left(\frac{1}{C_1 s}+\frac{1}{C_2 s}\right)I \Rightarrow I=\frac{V_1}{\dfrac{1}{C_1}+\dfrac{1}{C_2}}=\frac{C_1 C_2}{C_1+C_2}V_1 \Rightarrow i(t)=\frac{C_1 C_2}{C_1+C_2}V_1\delta(t)$$

En bornes de C_2: $V=\dfrac{1}{C_2 s}I=\dfrac{1}{C_2 s}\dfrac{C_1 C_2 V_1}{(C_1+C_2)}=\dfrac{C_1 V_1}{(C_1+C_2)s}\Rightarrow v(t)=\dfrac{C_1 V_1}{C_1+C_2}Y(t)$

Si no tuviéramos la herramienta de distribuciones, tendríamos tres opciones:
a) Rechazar el problema, por ‘ideal”
b) Recurrir a alguna consideración física extraña a la T de C para pasar de $t = 0^-$ a $t = 0^+$.

De aquí en adelante, pasaremos a resolver en funciones (En el ejemplo, todo el problema es pasar de $t = 0^-$ a $t = 0^+$)

¿Cómo se haría?

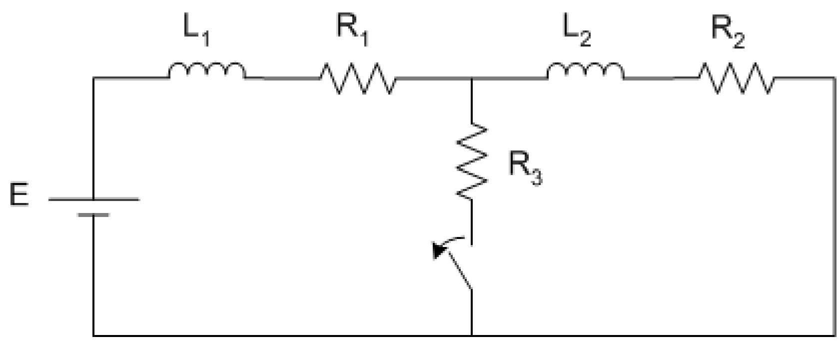
Al cerrar la llave, los voltajes deben saltar. Pero la carga instantánea que sale de uno llega al otro. Sea Q.

$v_1(0^+) = V_1 - \frac{Q}{C_1}$ $\qquad V_1 - \frac{Q}{C_1} = \frac{Q}{C_2} \Rightarrow V_1 = Q\left(\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2}\right) = \frac{C_1 + C_2}{C_1 C_2} Q \Rightarrow Q = \frac{C_1 C_2}{C_1 + C_2} V_1$

$v_2(0^+) = Q/C_2$ $\qquad V_2 = Q/C_2 = \frac{C_1 V_1}{C_1 + C_2}$

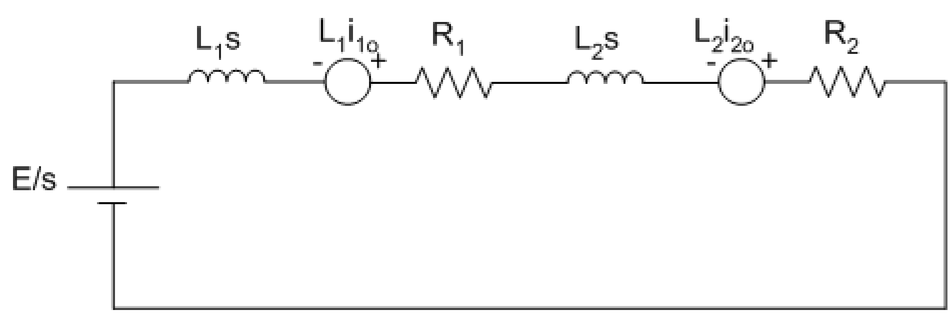
c) Resolver el circuito "real" y pasar al límite.

Veamos otro ejemplo, ahora con self.

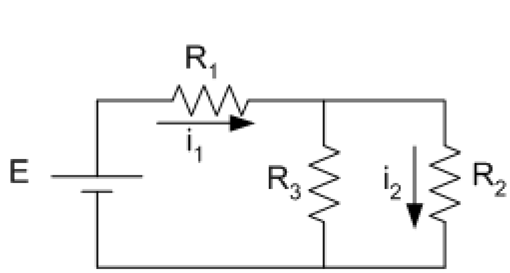


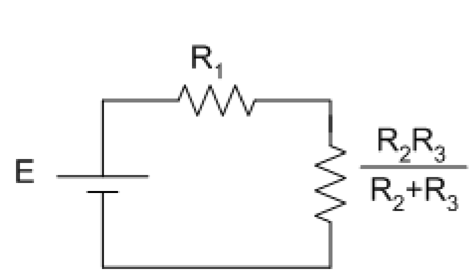
E = 24V
L_1 = 2Hy
L_2 = 4Hy
$R_1 = R_2 = 2\Omega$
$R_3 = 1\Omega$

Para dibujar el circuito en Laplace:



Para hallar las corrientes previas, resuelvo el circuito estacionario (de continua)





$$I = \frac{L_1 i_{10} + L_2 i_{20} + \frac{E}{s}}{(L_1 + L_2)s + R_1 + R_2}$$

$$i_1 = \frac{E}{R_1 + \frac{R_2 R_3}{R_2 + R_3}} = \frac{24}{2 + \frac{2}{3}} = \frac{24x3}{8} = 9$$

$$I = \frac{18 + 12 + \frac{24}{s}}{6s + 4} = \frac{30 + \frac{24}{s}}{6s + 4} = \frac{15s + 12}{s(3s + 2)}$$

$$i_2 = i_1 x \frac{R_2 R_3}{R_2 + R_3} x \frac{1}{R_2} = 9x\frac{2}{3}x\frac{1}{2} = 3$$

$$I = \frac{15s + 12}{s(3s + 2)} = \frac{A}{s} + \frac{B}{3s + 2} \qquad \begin{cases} A = 6 \\ B = -\frac{2x3}{2} = -3 \end{cases}$$

$$I = \frac{6}{s} - \frac{3}{3s + 2} = \frac{6}{s} - \frac{1}{s + \frac{2}{3}} \Rightarrow i(t) = 6Y(t) - Y(t)e^{-2/3t}$$

Obsérvese que la corriente en la self salta de t = 0^- (9 y 3) a t = 0^+ (5)
Nosotros lo obtuvimos como parte de la solución.
Trabajando en funciones, tendríamos que poner en las fuentes de Laplace los valores en 0^+.
¿Cómo los podemos calcular?
Otra vez, recurriendo a consideraciones extra T de C.

En este caso, las corrientes pueden saltar, pero el flujo en todo el circuito varía con continuidad.

$\Phi = Li$ $\qquad \Phi(0^-) = L_1 i_{10} + L_2 i_{20} = 2x9 + 4x3 = 30$

$$\Phi(0^+) = (L_1+L_2)i(0^+) = 6i(0^+) \Rightarrow i(0^+) = \frac{30}{6} = 5 \text{ A}$$

El circuito visto nos sirve para otras observaciones:

La constante de tiempo es: $\frac{3}{2} = \frac{L_1 + L_2}{R_1 + R_2} = \frac{6}{4}$

La corriente 'final' es: $\frac{E}{R_1 + R_2} = \frac{24}{4} = 6 \text{ A}$

Otro cálculo interesante: el voltaje en bornes de la llave S:
Para t < 0, $v_s = 0$
Para t > 0:

$$V_s = (L_2 s + R_2)I - L_2 i_{20} = \frac{(4s + 2)(15s + 12)}{s(3s + 2)} - 12 = \frac{6(2s + 1)(5s + 4)}{s(3s + 2)} - 12$$

Gr N = Gr D

Transformo: $\frac{N(s)}{D(s)} = P(s) + \frac{N_1}{D}$

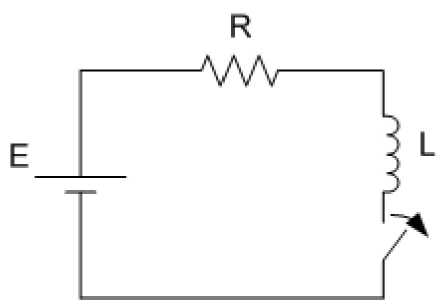
$$\frac{(2s+1)(5s+4)}{s(3s+2)} = \frac{10s^2+13s+4}{3s^2+2s} = \frac{10}{3} + \frac{\frac{19}{3}s+4}{3s^2+2s} \Rightarrow V_s = 8 + \frac{\frac{19}{3}s+4}{3s^2+2s} = 8 + \frac{A}{s} + \frac{B}{3s+2}$$

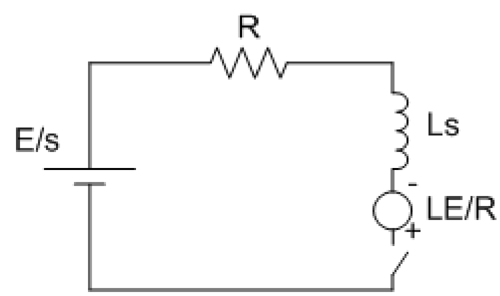
Dividiendo:

$$\begin{array}{l|l} 10s^2+13s+4 & \underline{\;3s^2+2s\;} \\ -10s^2-\frac{20}{3}s & \frac{10}{3} \\ \quad\quad \frac{19}{3}s+4 & \end{array}$$

Lo que interesa es que al antitransformar: $v_s = 8\underline{\delta} + (A+B/3e^{-2/3t})Y$

En un caso más sencillo:





$V_s = \frac{LE}{R} + \frac{E}{s}$ $\quad\quad\quad$ $v_s(t)\,\frac{LE}{R}\delta(t) + Y(t)E$

El circuito visto ilustra el funcionamiento del encendido de un automóvil.
E es la batería; R, la resistencia de los cables de conexión; L es la bobina, y la llave es el contacto de los platinos. Todavía, en un automóvil, L es el primario de un transformador que eleva la tensión, y el impulso de tensión aparece en la bujía, provocando el salto de una chispa que produce la combustión de una mezcla de aire y gasolina, que mueve el émbolo de los cilindros, transformándose en energía mecánica.

8. Unidades y consideraciones dimensionales.

El sistema de unidades básico es el MKS (o Giorgi), que para las magnitudes eléctricas es:

v	Volt	V
i	Ampere	mA
R	Ω	kΩ
L	Hy	mHy
C	Farad	nF
t	seg	µseg

f $\quad \text{Hz} = \frac{ciclo}{seg} \quad$ Mhz

s $\quad \frac{1}{seg}$, pues aparece en un exponente e^{-st}

Dos observaciones:
1) Muchas veces, no resultan unidades prácticas. Conviene pasar a otro sistema práctico.

Recordando las definiciones:	v = Ri	$v = L\frac{di}{dt}$	$i = C\frac{dv}{dt}$
En dimensiones:	v = Ri	$v = L\frac{i}{t}$	$i = C\frac{v}{t}$
Despejando R, L, C:	$R = \frac{v}{i}$	$L = \frac{vt}{i}$	$C = \frac{it}{v}$

En muchas aplicaciones de electrónica, se manejan (ver 2ª columna):
Volts, mA ⇒ kΩ, mHy, ⇒ μseg ⇒ Mhz ⇒ nF

Recordemos los principales sufijos de múltiplos y submúltiplos:

kilo	mili
Mega	micro
Giga	nano
Tera	pico

2) Las dimensiones, aun sin valores numéricos, permiten corregir errores verificando lo que llamamos coherencia dimensional.
P. ej: sabemos que RC es un tiempo, también L/R.

RC = t

$\frac{L}{R} = t$

LC = t^2

$\frac{L}{C} = R^2$

Veamos qué queremos decir con coherencia dimensional:

$$\text{Ls} + \text{R} + \frac{1}{Cs} = \frac{\overset{\tau^2}{LCs^2} + \overset{\tau}{RCs} + 1}{Cs}$$

En el numerador, un sumando es 1, adimensionado.
Los otros deben serlo también. Los otros también lo son, como podemos verificar.

3) La dimensión de la T de Laplace.
V(s) no es Voltio: recordando que $V(s) = \int v(t)e^{-st}dt$, la dimensión de V(s) es V.t
Análogamente, la de I(s) es I.t

Entonces, p. ej. en la self: $V = LsI - Li_0$

$$Vt \qquad \frac{Vt}{i}\frac{1}{t}i.t \qquad Vt$$

La dimensión de la δ es 1/t.
(Cuando teníamos i(t) = Qδ(t) reencontramos Ampere = Coulomb/seg)

9. Potencia y Energía.

Veremos estas magnitudes, poniéndonos en el caso restringido de voltaje y corriente <u>funciones</u>.
La Potencia instantánea asociada a cierto bipolo es p(t) = v(t).i(t) [+ → -]
Recordemos que en distribuciones, el producto ordinario no siempre se puede definir.
La potencia es la derivada respecto al tiempo de la energía.
La energía que recibe un elemento en el intervalo (t_1,t_2) es $\int_{t_{1_1}}^{t_2} v(t)i(t)dt$

Para una resistencia: $E=\int_{t_1}^{t_2} ri^2dt$

Es siempre positiva; la resistencia absorbe esa energía (y la disipa como calor).

Para una self: $E=\int_{t_1}^{t_2} L\frac{di}{dt}idt = \int_{i_1}^{i_2} Lidi = \frac{1}{2}L(i_2^2 - i_1^2)$

Para un condensador: $E=\int_{t_1}^{t_2} C\frac{dv}{dt}vdt = \int_{v_1}^{v_2} Cvdv = \frac{1}{2}C(v_2^2 - v_1^2)$

Para la self y el condensador podemos hablar de "energía almacenada": $\frac{Li^2}{2}$ y $\frac{Cv^2}{2}$

La energía recibida entre t_1 y t_2 aparece como incremento de la energía almacenada.
Es bien posible que en cierto intervalo, esto sea negativo, es decir la componente no absorba sino que ceda energía al resto del circuito. Pero lo que no puede ser es que ceda más energía que la que tenía almacenada.
Esta propiedad se denomina "<u>pasividad</u>".
Dicho de otra manera: Si inicialmente v e i son cero, y la energía recibida por la componente entre 0 y t es ≥ 0 para todo t y para cualquier <u>función</u> v o i, decimos que la componente es <u>pasiva</u>. De lo contrario, es <u>activa</u>.
Entonces, R, L, C, son pasivas.

Una fuente independiente es activa, pues: $E=\int_0^t v(t)i(t)dt$ no tiene porqué ser ≥ 0.

El T ideal: $E = \int_0^t (v_1i_1 + v_2i_2)dt = \int_0^t (nv_2i_1 - nv_2i_1)dt = 0$ Es pasivo.

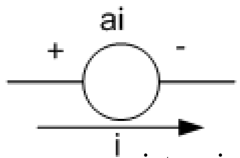
Un T simple:

$$E = \int_0^t (v_1i_1 + v_2i_2)dt = \int (L_1i_1\frac{di_1}{dt} + Mi_1\frac{di_2}{dt} + L_2i_2\frac{di_2}{dt} + Mi_2\frac{di_1}{dt})dt =$$

$$= \int_0^{i_1} L_1 i_1 di_1 + \int_0^{i_2} L_2 i_2 di_2 + \int_0^{i_1 i_2} M d(i_1 i_2) = \frac{1}{2}(L_1 i_1^2 + L_2 i_2^2 + 2 M i_1 i_2)$$

$$\text{Y } E \geq 0 \;\Rightarrow k \leq 1$$

Una fuente dependiente puede ser activa o pasiva.
Así, p.ej.



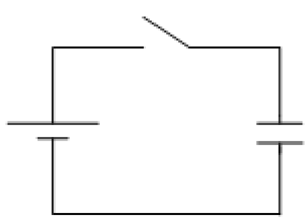
es pasiva o activa según que $a > 0$ o $a < 0$.

En otras palabras, una resistencia positiva es pasiva y una negativa es activa.

Dijimos al principio que en todo esto (potencia, energía) suponíamos tensión y corriente funciones.
Para generalizar a distribuciones, surgen problemas.
El producto $p(t) = v(t).i(t)$ no está siempre definido. Si p.ej. $i(t)$ es una δ y $v(t)$ un escalón, el producto no está definido. Y es justamente lo que pasa en la carga instantánea de un condensador.
Podría tratarse de definir no la potencia sino la energía recibida en un intervalo de tiempo, o mejor, en toda la recta, como <v,i> o <i,v> cuando estas expresiones tengan sentido, verificando que esta definición, en funciones, nos da el resultado correcto.

$$E = \langle v,i\rangle = \langle i,v\rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} i(t)v(t)dt$$

Veamos en un caso sencillo, los problemas que pueden aparecer en distribuciones.

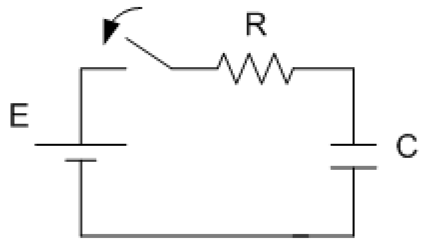


En bornes de la fuente: $v_f = E$
" " del condensador: $v_c = YE$
La corriente: $i = CE\delta$

La energía dada por la fuente: $\langle i,v\rangle = \langle CE\delta,E\rangle = CE^2$
La energía que recibe el condensador: $\langle i,v\rangle = \langle CE\delta,YE\rangle$ No está definida (δ aplicada a una función discontinua).
Podría pensarse en calcularla como resultado de un balance: sería igual a la que da la fuente, es decir CE^2.

Sin embargo, por otro lado, la energía almacenada por un condensador era $\frac{CE^2}{2}$.

Veamos un circuito real que aproxime al ideal.

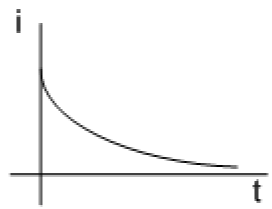


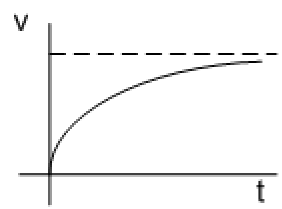
$$\frac{E}{s} = (R + \frac{1}{Cs})I$$

$$I = \frac{\frac{E}{s}}{\frac{RCs+1}{Cs}} = \frac{CE}{RC(s + \frac{1}{RC})} = \frac{\frac{E}{R}}{s + \frac{1}{\tau}}$$

$$\Rightarrow \text{i(t)=}Y(t)\frac{E}{R}e^{-t/\tau}$$

$$V_c(s) = \frac{I}{Cs} = \frac{\frac{E}{RC}}{s(s+\frac{1}{\tau})} = \frac{E}{s} - \frac{E}{s+\frac{1}{\tau}} \Rightarrow v_c(t) = Y(t)E(1 - e^{-t/\tau})$$





Veamos las energías.
La fuente da:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} Ei(t)dt = E\int_0^{+\infty} \frac{E}{R}e^{-t/\tau}dt = \frac{E^2}{R}(-\tau)e^{-t/\tau}\Big|_0^{\infty} = \frac{\tau E^2}{R} = CE^2$$

El condensador recibe:

$$\int_0^{\infty} v_c i dt = \frac{E^2}{R}\int (e^{-t/\tau} - e^{-2t/\tau})dt = \frac{E^2}{R}\left[(-\tau)e^{-t/\tau} + \frac{\tau}{2}e^{-2t/\tau}\right]_0^{+\infty} = \frac{\tau}{2}\frac{E^2}{R} = \frac{CE^2}{2}$$

La resistencia disipa:

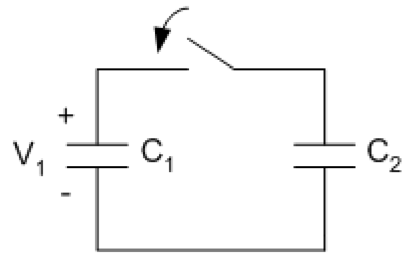
$$\int_0^{\infty} Ri^2 dt = \frac{E^2}{R}\int_0^{+\infty} e^{-2t/\tau}dt = \frac{E^2}{R}(-\frac{\tau}{2})e^{-2t/\tau}\Big|_0^{+\infty} = \frac{\tau}{2}\frac{E^2}{R} = \frac{CE^2}{2}$$

El balance es correcto. Pero se observa que la resistencia disipa una energía que no depende de su valor, de modo que cuando R $\rightarrow$ 0, sigue disipando $\frac{CE^2}{2}$.

Tenemos que aceptar que los cables ideales, de resistencia cero, disipan $\frac{CE^2}{2}$.

En general, al trabajar con circuitos ideales, pueden aparecer situaciones de este tipo al hacer consideraciones energéticas; en particular, el usar consideraciones energéticas para pasar de datos previos a condiciones iniciales tiene este riesgo, lo cual confirma la ventaja de trabajar con los datos previos, directamente.

P. ej.



Tratando de hallar v(0$^+$) a partir del balance energético da mal:

$$\frac{1}{2}C_1 v_1^2 = \frac{1}{2}C_1 v^2 + \frac{1}{2}C_2 v^2$$

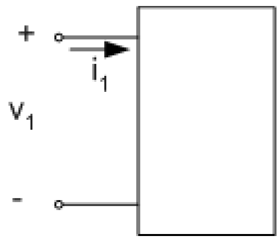
10. Clasificación de Circuitos.

Podemos caracterizar los circuitos desde dos puntos de vista:
a) Por propiedades de sus componentes
b) Globalmente, aplicando excitaciones y estudiando propiedades de las respuestas a esas excitaciones.
Así, si a un sistema de excitaciones E(t) corresponde una respuesta R(t), diremos que el circuito es <u>invariante con el tiempo</u> si $E(t) \rightarrow R(t)$ implica $E(t-t_0) \rightarrow R(t-t_0)$
Con las componentes vistas, cuyos valores son números, que no cambian con el tiempo, tenemos circuitos invariantes con el tiempo.
Un circuito es <u>pasivo</u> si todas las componentes son pasivas (o bien: una <u>parte</u> del circuito es pasiva si todas sus componentes son pasivas.)
Un circuito es <u>lineal</u> si $E \rightarrow R$ implica $\alpha E_1+\beta E_2 \rightarrow \alpha R_1+\beta R_2$
o lo que es lo mismo, vale el principio de superposición.
Con las componentes vistas (relaciones diferenciales lineales), los circuitos son claramente lineales (insistimos que en particular, si hay fuentes dependientes, son lineales)
De otra manera, el circuito está descrito por ecuaciones diferenciales lineales.
Un circuito es <u>Concentrado</u> (ya lo vimos: lumped) si las dimensiones son pequeñas frente a λ, la propagación de los fenómenos eléctricos es instantánea, independientemente del tamaño del elemento. Esta es una propiedad de los circuitos reales, y depende de la frecuencia.

11. Funciones de un Circuito: Driving Point y Transferencias.

Hasta ahora, la T de L nos ha servido sobre todo para resolver transitorios.
Su gran valor está en que permite asociar funciones analíticas a los circuitos eléctricos.
Ya dijimos que los circuitos se pueden caracterizar desde dos puntos de vista:
- a partir de sus componentes, tanto en sus relaciones v(i) como en la estructura que las interconecta,
- desde el exterior.

Adoptamos este punto de vista. Sea un circuito en el que distinguimos un par de terminales.



Lo vamos a caracterizar desde el exterior, describiéndolo como "caja negra", es decir, haciendo abstracción de las componentes que hay adentro, salvo las condiciones de siempre: lineal, lumped, invariante con el tiempo y una más: sin fuentes independientes (reales, ni datos previos).

En otras palabras, puede haber R, L, C, M, y fuentes dependientes.

Llamamos impedancia driving-point Z(s) de ese bipolo al cociente $Z(s) = \frac{V_1(s)}{I_1(s)}$, con todas las condiciones iniciales nulas.

Análogamente, definimos admitancia driving point: $Y(s) = \frac{I_1(s)}{V_1(s)} = \frac{1}{Z(s)}$

Lo importante es que en nuestras hipótesis, Z(s) e Y(s) no dependen de $V_1(s)$ o $I_1(s)$.
En efecto, si aplicamos p. ej. una fuente de corriente $i_1(t)$ o $I_1(s)$, esta es la única excitación (en la caja negra no hay fuentes independientes ni datos previos).
Entonces, se tendrá
$v_1 = Di$, con D un cierto operador integrodiferencial lineal, determinado por la constitución interna de la caja negra.

$$v_1 = Di_1 = D(\delta * i_1) = (D\delta) * i_1$$

En transformadas:

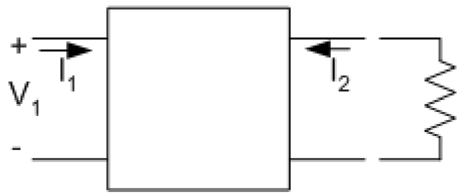
$V_1(s) = Z(s).I_1(s) \Rightarrow Z(s) = \frac{V_1(s)}{I_1(s)}$, en que $Z(s) = \mathcal{L}(D\delta)$, y no depende de v_1 e i_1.
Siempre que la caja negra se conecte en cualquier circuito, a través de sus bornes será:

$$\frac{V(s)}{I(s)} = Z(s)$$

Si dentro de la caja negra hay fuentes independientes o condiciones iniciales, el cociente
$\frac{V(s)}{I(s)}$ deja de ser una característica del bipolo.

Muchas veces, interesa vincular tensiones y corrientes en distintos pares de terminales: se definen las funciones de transferencia.
Siempre suponiendo que dentro no hay fuentes (ni datos previos) y aislando una rama como "salida": una función de transferencia es el cociente de dos transformadas de Laplace; convencionalmente se escribe el cociente:

$$\frac{\mathrm{Re}\,spuesta}{Excitacion} = \frac{Salida}{Entrada}$$



$$G_{21}(s)=\frac{V_2(s)}{V_1(s)},\qquad \text{Ganancia de tensión}$$

$$\alpha_{21}(s)=\frac{I_2(s)}{I_1(s)},\qquad \text{Ganancia de corriente}$$

$$Z_{21}(s)=\frac{V_2(s)}{I_1(s)},\qquad \text{Impedancia de transferencia}$$

$$Y_{21}(s)=\frac{I_2(s)}{V_1(s)},\qquad \text{Admitancia de transferencia}$$

(Ojo: no es $Y_{21}=\frac{1}{Z_{21}}$)

Todas ellas, responden al esquema: $Transferencia = \frac{\mathrm{Re}\,spuesta}{Excitacion}$

$$W(s)=\frac{Y(s)}{X(s)}$$

Entonces: $Y(s) = W(s).X(s)$

Corresponde en distribuciones a: $y(t) = w(t)*x(t)$

La transferencia queda determinada si conocemos la respuesta Y(s) que corresponde a una excitación cualquiera X(s).

En particular, si $x(t) = \delta(t) \Rightarrow X(s) = 1$ Entonces: $Y(s) = W(s) \Rightarrow y(t) = w(t)$

Con total sencillez, reencontramos algo que no habíamos podido demostrar con rigor:

1) La respuesta al impulso es la antitransformada de la transferencia W(s).

2) La respuesta del sistema a cualquier excitación queda determinada conociendo la respuesta al impulso.

3) Y es la convolución (en Laplace el producto ordinario) de w(t) con cada excitación.

12. Recapitulando

Hemos visto que las herramientas básicas introducidas (Distribuciones, Transformada de Laplace), encuentran una aplicación concreta en el estudio de los Sistemas Lineales.
En nuestro caso, nos concentramos en el caso de los Circuitos Eléctricos.
Para ello, hemos repasado la definición de las componentes e interpretado dichas definiciones en el dominio del tiempo y en transformadas.
La distinción entre datos previos y condiciones iniciales constituye un ejemplo de gran importancia práctica, que puede ser encarado y resuelto con sencillez.
Los conceptos de potencia y energía se han analizado, con particular referencia a las situaciones que se presentan en el manejo de componentes ideales.
Finalmente, hemos repasado las principales características con las que se califican a los circuitos, y hemos introducido el concepto de transferencia.