Sistemas Lineales II

Material de Apoyo

Instituto de Ingeniería Eléctrica
Facultad de Ingeniería
Universidad de la República

Unidad 1

TRANSFORMADA DE LAPLACE

Indice

1. Introducción

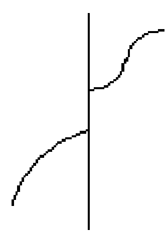
La transformada de Laplace permite pasar del dominio del tiempo al de la frecuencia compleja.
Es decir, que asocia a una función de la variable tiempo f(t), una función de variable compleja F(s), que es la Transformada de Laplace de f(t).
La transformada resulta ser (en una zona del plano) una función analítica, con toda la fuerza de las propiedades que tienen estas funciones de variable compleja.
La primera aplicación de esta transformación surge de que ecuaciones diferenciales se convierten en simples ecuaciones algebraicas.
En el caso de los circuitos eléctricos, esta simplificación se completa dando un paso más: las componentes elementales se representan "en Laplace", con lo que se omite el pasaje por la propia ecuación diferencial.
El circuito eléctrico se dibuja en Laplace, y en particular la información de las condiciones iniciales aparece a través de fuentes.
Pero más allá de esta aplicación como herramienta simplificadora, la Transformada de Laplace permite asignar funciones que caracterizan a un circuito: impedancias driving-point, y transferencias.
Estas funciones son de gran importancia conceptual y se emplean en temas tales como Teoremas de Circuitos, Realimentación, Estabilidad, dentro de Sistemas Lineales 2, y en las demás asignaturas de la carrera.

2. Transformada de Laplace en funciones

2.1. Definición

En primer lugar, consideraremos la teoría clásica para funciones.

Sea f(t) compleja, de variable real t, nula para t < 0; seccionalmente continua (es decir, con discontinuidades de 1ª especie; hay límite por la izquierda y derecha).



La T de Laplace de f(t) es:

$$F(s) = \int_0^{+\infty} f(t)e^{-st}\,dt$$
$$F(s) = L[f(t)]$$

En primera instancia señalamos que la T de Laplace es una función de variable compleja, que es además analítica; la de Fourier es de variable real f, (o λ).

A veces están relacionadas. En otros casos no. Recordar p. ej. F1 = δ, no tiene nada que ver con una función analítica.

2.2. Abscisa de convergencia.

Analicemos el integrando, en módulo

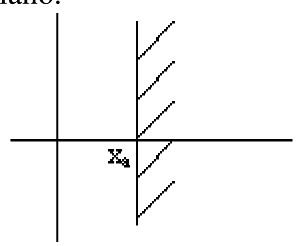
$|f(t)e^{-st}| = |f(t)|e^{-xt}$, si $s = x+jy$

La convergencia absoluta de la integral de Laplace depende sólo de la parte real de s.

1) " Si en $s = s_0$, la integral de Laplace C.A. (Converge Absolutamente), entonces C.A. (y U.-Uniformemente) para todo s con
$Re(s) \geq Re(s_0)$".

Pues para esos s, $|f(t)|e^{-xt} \leq |f(t)|e^{-x_0 t}$ Consecuencias:

- Para estudiar la C.A., alcanza con estudiar para valores reales de s.
- Clasifico los reales en 2 clases, según que la integral de Laplace C.A. o no. Las clases son separadas, por el teorema anterior. Si son no vacías, definen un elemento de separación, x_a, "abscisa de convergencia absoluta". A la derecha, hay C.A.; a la izquierda no; en x_a no se puede decir. Queda definido un "semiplano de convergencia".
  Una de las clases puede ser vacía. Hay C.A. en todo (o ningún) punto del plano.



(Análogamente, se define abscisa de convergencia simple x_s :
$-\infty \leq x_s \leq x_a \leq +\infty$)

2) " Si f es integrable localmente y cumple $|f(t)| \leq Ae^{kt}$, con $A > 0$, k real, para todo $t \geq t_0 \geq 0$, entonces $x_a \leq k$".
Pues para $t \geq t_0$ $|f(t)|e^{-xt} \leq Ae^{-(x-k)t}$, y esto tiene integral pues $x-k > 0$. Es decir que $|f(t)|e^{-xt}$ es integrable de t_0 a $+\infty$. Como de 0 a t_0 lo es, la integral converge.

En particular: si f es acotada: $x_a \leq 0$

Si f es de soporte acotado, la acotación vale para cualquier k $\Rightarrow x_a = -\infty$

2.3. Ejemplos de uso práctico.

$f(t) = e^{kt}$, k real o complejo

$$\int_0^T e^{-st}e^{kt}dt = \int_0^T e^{(k-s)t}dt = \left.\frac{e^{(k-s)t}}{k-s}\right|_0^T = \frac{e^{(k-s)T}}{k-s} - \frac{1}{k-s} = \frac{1}{s-k} - \frac{e^{(k-s)T}}{s-k}$$

Tomando límites cuando T $\to \infty$ Distinguimos 3 casos:

1. Re(s) < Re(k) $e^{[Re(k)-Re(s)]T}$ que es el módulo $\to \infty$; no existe la T de Laplace

2. Re(s) > Re(k) el límite es $\frac{1}{s-k}$

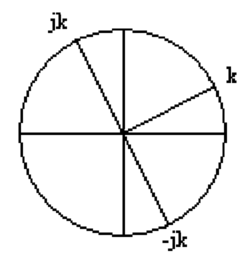
3. Re(s) = Re(k) el módulo vale 1; el argumento varía con T, no hay límite.

Luego: $L\left[e^{kt}\right] = \frac{1}{s-k}$, y el semiplano de convergencia es

Re(s) > Re(k)

Para otras f(t) podemos aplicar linealidad.
P.ej.

$$L[\cos kt] = L\left[\frac{e^{jkt} + e^{-jkt}}{2}\right] = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{s-jk} + \frac{1}{s+jk}\right] = \frac{s}{s^2+k^2}$$



Semiplano de convergencia Re(s) > Re(jk) = -Im(k)

Re(s) > Re(-jk) = Im(k)$\Rightarrow$ Re(s) > $|$Im(k)$|$

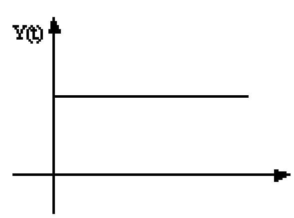
$$L[\operatorname{sen} kt] = L\left[\frac{e^{jkt} - e^{-jkt}}{2j}\right] = \frac{1}{2j}\left[\frac{1}{s-jk} - \frac{1}{s+jk}\right] = \frac{k}{s^2+k^2}$$

Re(s) > $|$Im(k)$|$

Análogamente: $L[shkt] = \frac{k}{s^2-k^2}$ Re(s) > $|$Re(k)$|$

$L[chkt] = \frac{s}{s^2-k^2}$ Re(s) > $|$Re(k)$|$

Para el escalón: (e^{kt} con k = 0, o directamente)



$L[Y(t)] = \frac{1}{s}$ Re(s) > 0

Ej: $g(t) = e^{-t}\text{sen}t$

$$g(t) = e^{-t}\,\text{sen}\,t = e^{-t}\left[\frac{e^{jt} - e^{-jt}}{2j}\right] = \frac{1}{2j}\left[e^{(j-1)t} - e^{-(j+1)t}\right]$$

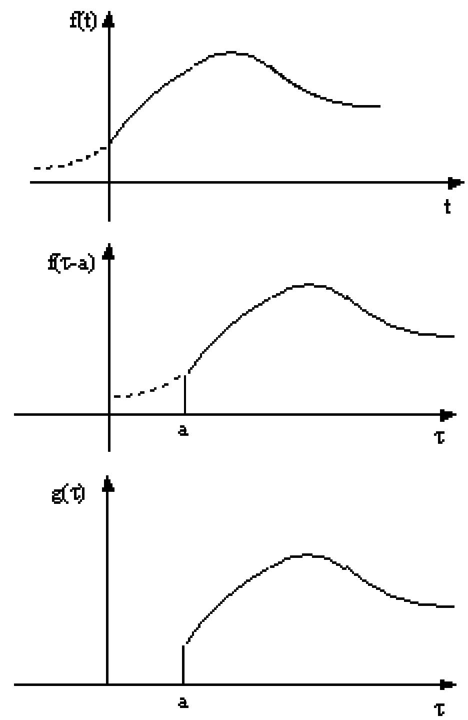
$$G(s) = \frac{1}{2j}\left[\frac{1}{s-j+1} - \frac{1}{s+j+1}\right] = \frac{1}{2j}\left[\frac{1}{(s+1)-j} - \frac{1}{(s+1)+j}\right] = \frac{1}{2j}\frac{2j}{(s+1)^2+1}$$

$$G(s) = \frac{1}{(s+1)^2+1}$$

2.4. Teorema de traslación en el tiempo.

Trataremos de vincular el corrimiento de una función en el tiempo con su transformada de Laplace.

Sea $F(s) = \int_0^\infty e^{-st} f(t)dt$



Hacemos el cambio de variable: $t = \tau - a$

$$F(s) = \int_a^\infty e^{-s(\tau-a)} f(\tau-a)d\tau$$

$$\underline{e^{-sa}F(s) = \int_a^\infty e^{-s\tau} f(\tau-a)d\tau = \int_0^\infty e^{-s\tau} g(\tau)d\tau}$$

en que g(t) es la trasladada hasta "a" que vale 0 entre 0 y a.

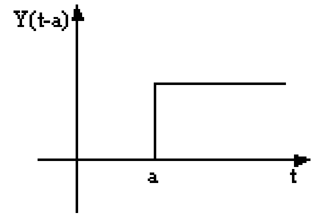
Se puede escribir como: $g(t) = Y(t-a)f(t-a)$

Atención: no es ninguna de éstas: $f(t-a)$
$Y(t)f(t-a)$
$Y(t-a)f(t)$

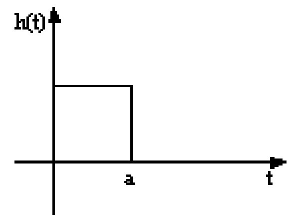
Si $f(t) \to F(s)$

$g(t) \to e^{-sa}F(s)$

Ej: $L[Y(t)] = \dfrac{1}{s}$



$$L[Y(t-a)] = \frac{e^{-as}}{s}$$



$$h(t) = Y(t) - Y(t-a)$$

$$L[h(t)] = \frac{1-e^{-as}}{s}$$

2.5. Teorema de Traslación en la s.

Veamos ahora a qué corresponde en el dominio del tiempo, la trasladada en s de una Transformada de Laplace.

$$F(s) = \int_0^\infty e^{-st} f(t)dt \qquad \mathrm{Re}(s) > x_c$$

$s \to s-k$

$$F(s-k) = \int_0^\infty e^{-(s-k)t} f(t)dt = \int_0^\infty e^{-st}\left[e^{kt} f(t)\right]dt = L\left[e^{kt} f(t)\right]$$

$f(t) \to F(s)$

$e^{kt}f(t) \to F(s-k) \qquad \mathrm{Re}(s-k) > x_c$

$\mathrm{Re}(s) > x_c + \mathrm{Re}(k)$

Veamos cómo se aplica este teorema para resolver el ejercicio anterior:

$g(t) = e^{-t}\mathrm{sen}t$

Sé que $\qquad L[\mathrm{sen}\,t] = \dfrac{1}{s^2+1} \Rightarrow L\left[e^{-t}\,\mathrm{sen}\,t\right] = \dfrac{1}{(s+1)^2+1}$

$e^{kt}, \; k = -1$

Análogamente: $\quad L\left[e^{-t}\cos t\right] = \dfrac{s+1}{(s+1)^2+1}$

Veamos una idea práctica para antitransformar:

Sea $F(s)=\dfrac{s+3}{s^2+4s+13}$

La transformamos: $F(s)=\dfrac{s+2+1}{(s+2)^2+9}=\dfrac{s+2}{(s+2)^2+9}+\dfrac{1}{(s+2)^2+9}$

Viene de $f(t)=e^{-2t}\left[\cos 3t+\dfrac{\operatorname{sen} 3t}{3}\right]$

2.6. Teorema de derivación.

Trataremos de hallar la transformada de Laplace de una derivada.

Sea f(t) <u>continua</u> con derivada f′(t) <u>seccionalmente continua</u>.

Suponemos que en s = s_0 existen las Ts L[f(t)] y L[f′(t)].

Tesis: "En Re(s) > Re(s_0), existen las Ts y cumplen:
L[f′(t)] = sL[f(t)] - f(0) "

Es gracias a este teorema que la derivación en funciones se reduce a una operación algebraica en transformadas.

$$\int_0^T e^{-st} f'(t)dt = e^{-st} f(t)\Big|_0^T + s\int_0^T e^{-st} f(t)dt$$

$$\int_0^T e^{-st} f'(t)dt = e^{-sT} f(T) - f(0) + s\int_0^T e^{-st} f(t)dt$$

Considerando primero las integrales en s_0 . Hacemos T → ∞ , las integrales convergen. El integrando debe tener límite y el límite debe ser 0.

$L[f'(t)] = sL[f(t)] - f(0)$ El f(0) es f(0^+)

Lo anterior se cumplirá para Re(s) > Re(s_0)

Se generaliza:

"Si f es continua con n-1 derivadas continuas y la enésima seccionalmente continua, y si en s_0 existen las Transformadas: $L[f(t)],\ldots.,L[f^{(n)}(t)]$
Entonces: $L[f^{(n)}(t)] = s^n L[f(t)] - s^{n-1} f(0) - s^{n-2} f'(0) - \ldots. - f^{(n-1)}(0)$ "
Para la derivada segunda tendríamos:

$$L[f''(t)] = sL[f'(t)] - f'(0) = s^2 L[f(t)] - sf(0) - f'(0)$$

2.7. Teorema de integración.

Sea f(t) seccionalmente continua. $g(t)=\int_0^t f(t)dt$

Si en s_0 existen $L[f]$ y $L[g]$, entonces:

En Re(s) > Re(s_0) también existen y se cumple:

$$L[g(t)] = \frac{1}{s} L[f(t)]$$

Pues g(t) es continua; $g'(t) = f(t)$ y $g(0) = 0$

$$L[g'(t)] = sL[g(t)] - \cancel{g(0)}$$

$$L\left[\int_0^t f(t)dt\right] = \frac{L[f(t)]}{s}$$

2.8. La Transformada como integral impropia dependiente de un parámetro.

- Obsérvese que la T de Laplace es una integral impropia dependiente de un parámetro.

Es decir, es del tipo: $\int_0^\infty g(s,t)dt$

2.9. Convergencia uniforme.

Recordemos que "se dice que una integral C.U. en una región del parámetro s, si dado ε, ∃A(ε) que no depende de s, tal que para B > A, es $\left|\int_B^\infty g(s,t)dt\right| < \varepsilon$".

- Criterio de C. U. (suficiencia)

" Una integral $\int_0^\infty g(s,t)dt$ converge U (y también A) si para $t > t_0$

$$|g(s,t)| < \frac{M}{t^a}, \text{ con } M > 0 \text{ y } a > 1 \text{ "}$$

Pues $\left|\int_B^\infty g(s,t)dt\right| < M\int_B^\infty \frac{dt}{t^a} = \frac{M}{(a-1)B^{a-1}} \leq \frac{M}{(a-1)A^{a-1}}$ y esto es tan pequeño como se quiera (eligiendo A grande) e independiente de s.

En el caso de la integral de Laplace, el e^{-st} permite en general acotar por $\frac{M}{t^a}$

2.10. La transformada como función analítica en su semiplano de convergencia.

Sabemos que se puede derivar respecto al parámetro s cuando las dos integrales (la original y la obtenida derivando formalmente) convergen uniformemente.

Entonces: $F(s) = \int_0^\infty e^{-st} f(t)dt = L[f(t)]$

$$F'(s) = \int_0^\infty (-t)e^{-st} f(t)dt = L[-tf(t)]$$

En general: $F^{(m)}(s) = L[(-t)^{(m)} f(t)]$

Se prueba además que la abscisa de convergencia x_d de esta T de L es la misma que la de $L[f(t)]$: x_a

Sea x_a la abscisa de convergencia de $L[f(t)]$ y x_d la de $L[(-t)^{(m)} f(t)]$
Como f es localmente integrable, razonamos para $t \geq 1 \Rightarrow t^m \geq 1$ y la integrabilidad de $(-t)^m f(t)e^{-xt}$ implica la de $f(t)e^{-xt}$

Luego: $x_a \leq x_d$ (Pues $\left|e^{-st} f(t)\right| \leq \left|e^{-st}(-t)^{(m)} f(t)\right|$)

Por otro lado, dado $\varepsilon > 0$, $t^m < e^{\varepsilon t}$ para t suficientemente grande; luego:

$\left|(-t)^m f(t)e^{-xt}\right| \leq \left|f(t)\right|e^{-(x-\varepsilon)t}$ desde un t en adelante $\Rightarrow$ $x_d \leq x_a + \varepsilon$

esta converge para $x-\varepsilon > x_a$

$x > x_a + \varepsilon$

Luego: $x_a = x_d$

Importante: **F(s) es analítica en su semiplano de convergencia.**

De aquí salen otras transformadas importantes:

$$f(t) \to F(s)$$
$$Y(t) \to \frac{1}{s}$$
$$+Y(t).t \to +\frac{1}{s^2}$$
$$Y(t).t^2 \to \frac{2}{s^3}$$

- - - - - - - - - - - - - -

$$Y(t).t^{n-1} \to \frac{(n-1)!}{s^n} \quad \Rightarrow \quad \frac{Y.t^{n-1}}{(n-1)!} \to \frac{1}{s^n} \quad \Rightarrow \quad \frac{Y(t)e^{kt}t^{n-1}}{(n-1)!} \to \frac{1}{(s-k)^n}$$

Despejo $\frac{1}{s^n}$ Multiplico por e^{kt}

Esta última todavía, se puede generalizar para un exponente no entero sino real cualquiera.

Dejando de lado el factor e^{kt} hasta el final:

$L[Y(t).t^{a-1}] = \int_0^\infty t^{a-1}e^{-st}\,dt =$ La calculo primero para s real = x.

Con <u>a > 0</u>

Es $\int_0^\infty t^{a-1}e^{-xt}\,dt = \int \frac{u^{a-1}}{x^{a-1}} e^{-u}\frac{du}{x} = \frac{1}{x^a}\int_0^\infty e^{-u}u^{a-1}\,du = \frac{\Gamma(a)}{x^a}$

$xt = u \quad t = \frac{u}{x} \quad (x > 0)$

para <u>c/x fijo</u>

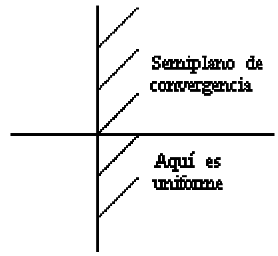
Es integrable:
- en 0 pues a > 0
- en ∞, si Re(s) > 0

$$\int_0^\infty e^{-u} u^{a-1} du = \Gamma(a)$$

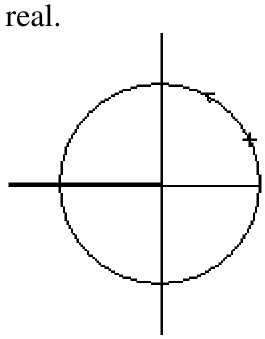
Esto es Γ(a) (Función de Euler)

Para s complejo, la T de Laplace es la función analítica obtenida por prolongación. Es decir: 1) es analítica; 2) en el eje real da $\frac{\Gamma(a)}{x^a}$.   Luego, es: $\frac{\Gamma(a)}{s^a}$ Entonces:

$$L\left[\frac{Y(t)t^{a-1}}{\Gamma(a)}\right] = \frac{1}{s^a} \quad \begin{cases} a > 0 \\ \mathrm{Re}(s) > 0 \end{cases}$$



F(s) es analítica a la derecha de la abscisa de convergencia (semiplano derecho)
En ese mismo recinto, es uniforme.
A esta altura, conviene tener presente los recursos para el manejo de funciones analíticas:
Si hacemos un tajo, en el recinto que queda, la función es uniforme. Al cruzar el tajo, pasamos de una rama a otra. Al movernos sobre una curva cerrada que cruza el tajo, al volver al punto de partida no tenemos el mismo valor. Dicho de otra manera: como F(s) es multiforme, elegí una determinación.. ¿Cuál? La que sobre el eje real, me da real.



De otra manera: si n es entero, s^n es un único valor; pero con a real cualquiera,

$s^a = e^{a\mathrm{Log}s}$ es multiforme.

$e^{a[\mathrm{Log}|s|+j\arg s]}$

Si a es entero, Γ(a) es el factorial   Γ(n) = (n-1)!   Y reencontramos el resultado anterior.

Todavía, podemos multiplicar por e^{kt}:

$$L\left[\frac{Y(t)e^{kt}t^{a-1}}{\Gamma(a)}\right] = \frac{1}{(s-k)^a}$$

Análogamente, se llega a:

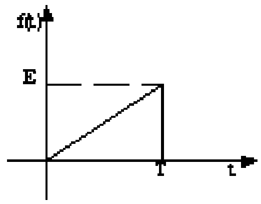
$$L[Y(t)J_0(t)] = \frac{1}{\sqrt{s^2+1}} \qquad \text{En que: } J_0(t) = \frac{1}{\pi}\int_{-1}^{+1}\frac{\cos xt}{\sqrt{1-x^2}}dx$$

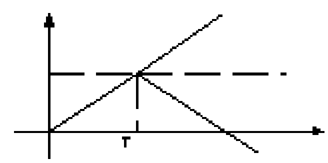
Función de Bessel

Re(s) > 0

También aquí hay multiformidades; la determinación de $\sqrt{s^2+1}$ es la obtenida por prolongación a partir de la determinación real y positiva para s real y positivo.

Una aplicación de uso práctico:





Sin necesidad de integrar nada:

$$f(t) = y(t)\frac{E}{T}t - Y(t-T)\frac{E}{T}(t-T) - Y(t-T)E$$

$$F(s) = \frac{E}{T}\frac{1}{s^2} - \frac{E}{T}\frac{1}{s^2}e^{-sT} - \frac{E}{s}e^{-sT} = \frac{E}{Ts^2}\left[1-(Ts+1)e^{-sT}\right]$$

2.11.Teoremas del Valor Inicial y Final.

Estos teoremas permiten conocer los valores límites de la función f(t) para t = 0 y t = ∞, sin necesidad de completar la antitransformación.

Supongamos que $L[f]$ y $L[f']$ existen y son A.C. en un semiplano derecho.
Sabemos que si $L[f] = F(s)$

$$L[f'] = \int_0^\infty f'(t)e^{-st}dt = sF(s) - f(0^+)$$

Si la integral es U.C., podemos pasar al límite dentro de la integral.
Recordemos resultados de integrales impropias dependientes de un parámetro:

$$F(s) = \int_0^\infty g(s,t)dt$$

Si C.U. $\Rightarrow \left|\int_A^\infty g(s,t)dt\right| < \varepsilon$

$$|F(s+h)-F(s)| < \left|\int_0^A \underbrace{\{g(s+h,t)-g(s,t)\}}_{\text{si g es continua} \to 0} dt\right| + 2\varepsilon$$

1º) Hacemos s→ ∞ (en rigor, $|s| \to \infty$) en Re(s) > 0

$$L[f'] = \int_0^\infty f'(t)e^{-st}\,dt \to 0$$

por ser continua en s

Luego: $\boxed{\text{lím}_{s\to\infty}\, sF(s) = f(0^+)}$ Es el teorema del valor inicial.

2º) Hacemos s → 0

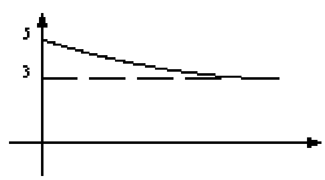
$$L[f'] = \int_0^\infty f'(t)e^{-st}\,dt \to \int_0^\infty f'(t)\,dt = f(\infty) - f(0^+)$$

Sustituyendo:

$\boxed{\text{lím}_{s\to 0}\, sF(s) = f(\infty)}$ Es el teorema del valor final.

Para que valga eso, de cambiar el orden del pasaje al límite con la integración, debe ser U.C. $L[f']$ en una región que incluya s = 0.
En otras palabras, los polos de F(s) deben estar a la izquierda.

Ej: Sea f(t) = 3Y(t) + 2Y(t)e^{-t}

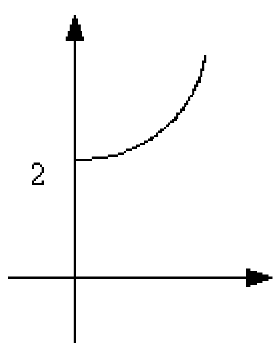


$$F(s) = \frac{3}{s} + \frac{2}{s+1} = \frac{5s+3}{s(s+1)}$$

$$\text{lím}_{s\to 0}\, sF(s) = 3 = f(\infty)$$

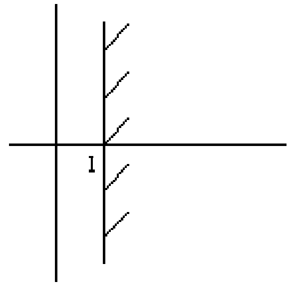
$$\text{lím}_{s\to\infty}\, sF(s) = 5 = f(0^+)$$

Atención: Si f(t) = 2Y(t)e^{t}



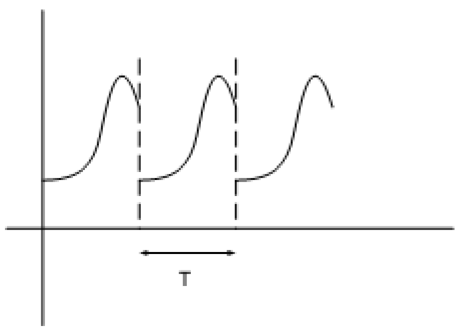
$$F(s) = \frac{2}{s-1}$$

$\text{lím}_{s\to 0}\, sF(s) = 0 \neq f(\infty)$ Esto porque F(s) converge para Re(s) > 1
No puedo llegar a 0.



En caso que el semiplano de convergencia sea el semiplano derecho, se prueba que el teorema se cumple si sF(s) no tiene polos en el eje imaginario.

2.12. Transformada de Laplace de una función periódica.



$$F(s)=\int_0^\infty e^{-st}f(t)dt=\int_0^T \quad +\int_T^{2T} \quad +....=\sum_{n=0}^{\infty}\int_{nT}^{(n+1)T} e^{-st}f(t)dt=(*)$$

Dado un sumando genérico:

$$\int_{nT}^{(n+1)T} e^{-st}f(t)dt=\int_0^T e^{-s(\tau+nT)}f(\tau+nT)d\tau=e^{-snT}\int_0^T e^{-s\tau}f(\tau)d\tau$$

cambio de variable: $t = \tau + nT$

a, ar, ar^2,….

Aquí, la razón es: e^{-sT}

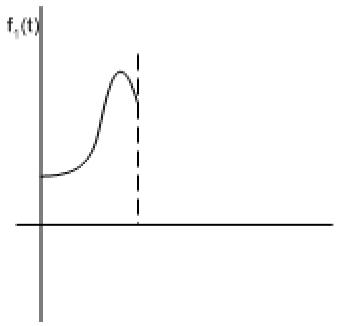
$$(*)=\sum_0^\infty e^{-snT}\left[\int_0^T e^{-s\tau}f(\tau)d\tau\right]=\frac{1}{1-e^{-sT}}\int_0^T e^{-s\tau}f(\tau)d\tau$$

cuyo módulo: e^{-xT} es < 1, en x > 0

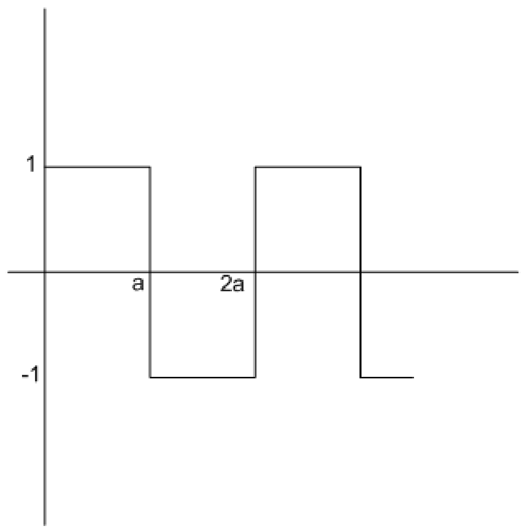
$$S_n=a\frac{r^n-1}{r-1}\to\frac{a}{1-r} \quad \text{si } r<1$$

Es decir que la integración se reduce a un período, y se multiplica por $\frac{1}{1-e^{-sT}}$

Puedo poner también $F(s)=\dfrac{F_1(s)}{1-e^{-sT}}$, con $F_1(s)=L[f_1(t)]$



Ej: La onda cuadrada



$$F(s) = \frac{1}{1-e^{-2as}} F_1(s)$$

y

$$F_1(s) = \int_0^{2a} f(t)e^{-st}dt = \int_0^{a} e^{-st}dt - \int_a^{2a} e^{-st}dt = -\left.\frac{e^{-st}}{s}\right|_0^a + \left.\frac{e^{-st}}{s}\right|_a^{2a} = \frac{1}{s} - \frac{e^{-as}}{s} + \frac{e^{-2as}}{s} - \frac{e^{-as}}{s} =$$

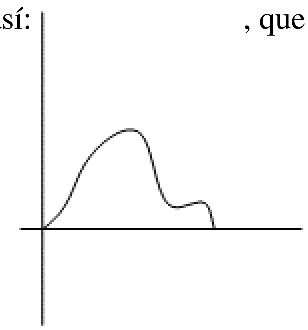
$$= \frac{1-e^{-2as}+e^{-2as}}{s} = \frac{\left(1-e^{-as}\right)^2}{s}$$

Entonces: $F(s) = \frac{1}{s}.\frac{\left(1-e^{-as}\right)^2}{1-e^{-2as}} = \frac{\left(1-e^{-as}\right)^2}{s\left(1-e^{-as}\right)\left(1+e^{-as}\right)} = \frac{1}{s}.\frac{e^{\frac{as}{2}}-e^{-\frac{as}{2}}}{e^{\frac{as}{2}}+e^{-\frac{as}{2}}} = \frac{1}{s}.th\frac{as}{2}$

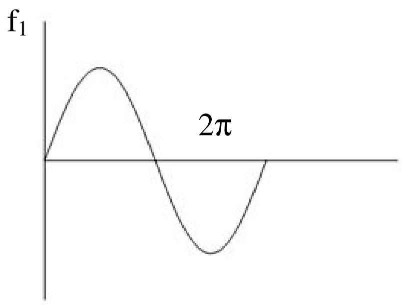
Ver que F_1 se pudo calcular también como *L*[Y(t) - 2Y(t-a) + Y(t-2a)]

Muchas veces, el teorema se aplica al revés: conozco la T de L de la periódica y quiero calcular la T de L de algo así: , que es justamente la

$F_1(s) = \int_0^T$



En rigor, el teorema visto valdría para esto otro:



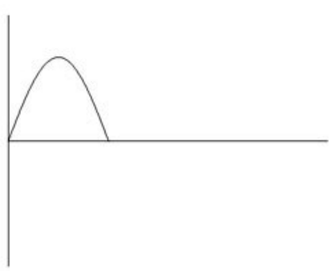
$$L[Y\,\mathrm{sen}\,t] = \frac{1}{s^2+1} = \frac{F_1(s)}{1-e^{-2\pi s}}$$

$$F_1(s) = L[f(t)] = \frac{1-e^{-2\pi s}}{s^2+1}$$

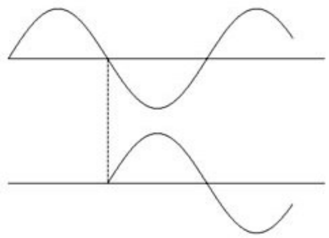
O también: la resta del seno y del seno corrido.

En general, la moraleja es: recurrir poco a la memoria y mucho al ingenio.

Ej:

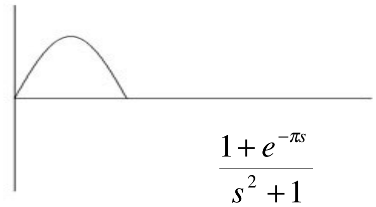


Esto es la suma del seno y el seno corrido.



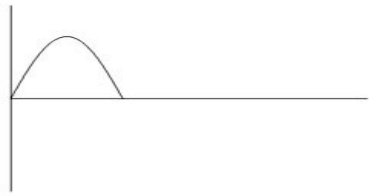
$$\frac{1}{s^2+1}$$

$$\frac{e^{-\pi s}}{s^2+1}$$



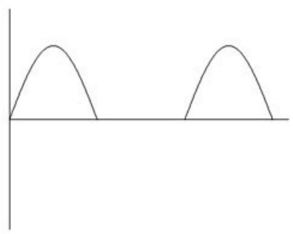
$$\frac{1+e^{-\pi s}}{s^2+1}$$

Obtenida la de



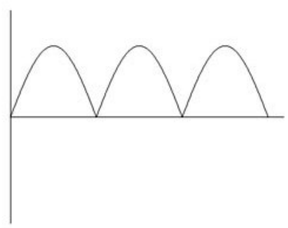
por el teorema de la periódica, podemos hallar la de la onda sinusoidal rectificada:

Simple onda



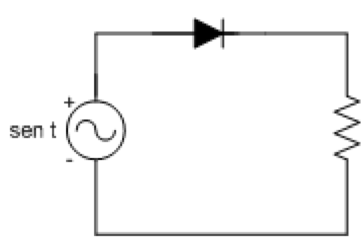
$$\frac{1+e^{-\pi s}}{s^2+1}\cdot\frac{1}{1-e^{-2\pi s}}=\frac{1}{\left(1-e^{-\pi s}\right)\left(s^2+1\right)}$$

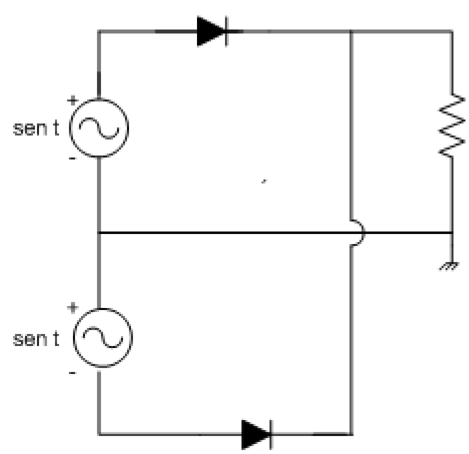
Onda completa



$$\frac{1+e^{-\pi s}}{s^2+1}\cdot\frac{1}{1-e^{-\pi s}}$$

Estas son las formas de onda que se obtienen en los circuitos rectificadores:





2.13. Aplicación de Laplace para resolver ecuaciones diferenciales.

Veamos cómo se aplica la T de L para resolver ecuaciones diferenciales.
Sea la ecuación: $f'' + 3f' + 2f = 2$, con las condiciones iniciales:

$$\begin{cases} f(0) = 2 \\ f'(0) = 1 \end{cases}$$

La resolución clásica es:

1) Homogénea: Ecuación característica: $p^2 + 3p + 2 = 0 \Rightarrow p = \dfrac{-3 \pm 1}{2}$

$$\begin{cases} -1 \\ -2 \end{cases} \qquad \begin{cases} e^{-t} \\ e^{-2t} \end{cases}$$

Solución general de la homogénea: $C_1 e^{-t} + C_2 e^{-2t}$

2) No homogénea: Solución particular: $2f = 2 \Rightarrow f = 1$

Luego: solución general: $f = 1 + C_1 e^{-t} + C_2 e^{-2t}$
Para determinar las constantes C_1 y C_2, juego con las condiciones iniciales:

$$f(0) = 1 + C_1 + C_2 = 2$$
$$f'(0) = \underline{\qquad - C_1 - 2C_2 = 1}$$
$$- C_2 = 2 \quad \Rightarrow \quad C2 = -2 \quad C1 = 3 \Rightarrow$$

$$f(t) = 1 + 3e^{-t} - 2e^{-2t}$$

La resolución por Laplace consiste en escribir una ecuación en transformadas:

$$L[f] = F(s)$$
$$L[f'] = sF(s) - f(0) = sF(s) - 2$$
$$L[f''] = sL[f'] - f'(0) = s^2 F(s) - 2s - 1$$

Tomando transformadas en la ecuación original:

$$s^2 F - 2s - 1 + 3sF - 6 + 2F = \frac{2}{s}$$

$$(s^2 + 3s + 2)F = 2s + 7 + \frac{2}{s} = \frac{2s^2 + 7s + 2}{s}$$

$$F = \frac{2s^2 + 7s + 2}{s(s^2 + 3s + 2)} = \frac{2s^2 + 7s + 2}{s(s+1)(s+2)} = \frac{A}{s} + \frac{B}{s+1} + \frac{C}{s+2} \qquad A = 1$$

$$B = \frac{2 - 7 + 2}{-1} = 3$$

$$C = \frac{8 - 14 + 2}{2} = -2$$

$$F(s) = \frac{1}{s} + \frac{3}{s+1} - \frac{2}{s+2} \Rightarrow f(t) = 1 + 3e^{-t} - 2e^{-2t}$$

Obsérvese que la ecuación en transformadas contiene incorporada la información de las condiciones iniciales.

Nos quedan dos grandes temas: generalizar a distribuciones y antitransformar.

3.Transformada de Laplace en distribuciones.

3.1. Consideraciones para su definición.

Aun trabajando con funciones, se ve que la T de L está asociada a distribuciones. Si dos funciones difieren en un conjunto de medida nula (coinciden como distribuciones), tienen la misma T de L.
(La T de L del escalón es $\frac{1}{s}$, cualquiera sea el valor de Y en 0).

Vamos a estudiar T de L sólo para distribuciones de D'_+.
No consideraremos sent sino Y.sent; no habrá T de L de 1 sino de Y(t).

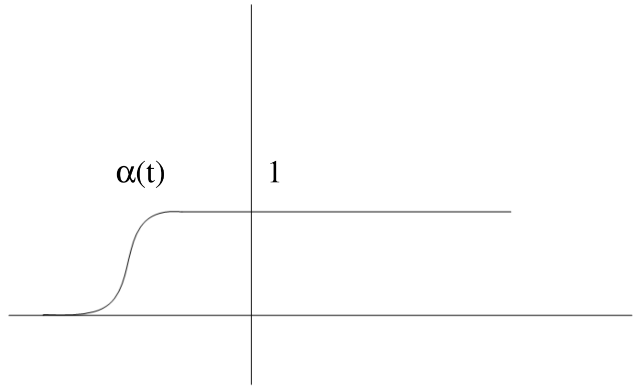
Además de restringirnos a $T \in D'_+$, supondremos que existe cierto número a tal que para x > a, $e^{-xt}T$ es temperada: $e^{-xt}T \in S'$
Decimos que T es "temperable" por el factor e^{-xt}. No exigimos que T sea temperada, con tal que el producto lo sea. Así, e^t entra en esta categoría; e^{t^2} no.
Hay pues muchas distribuciones con T de L.

La definición es: $L[T] = F(s) = \langle T, e^{-st} \rangle$, definida para Re(s) > a
La idea rigurosa es que: si Re(s) > a, elijo un x_1 intermedio: Re(s) > x_1 > a
Considero $e^{-x_1 t}T$, que es temperada, y la aplico a $\alpha(t)e^{-(s-x_1)t}$ α(t) vale 1 en el soporte de T; es ∞y derivable y luego cae a 0.
Entonces: $\langle \underbrace{e^{-x_1 t}T}_{\in S'}, \underbrace{\alpha(t)e^{-(s-x_1)t}}_{\in S} \rangle$ está bien definido.
$\in S'$ $\in S$, si Re(s) > x_1, y α(t) la anula para t < 0
No depende de x_1. El x_1 me sirve para asegurar la existencia, pero no aparece en el resultado. Tampoco depende de α.
Cuando escribo $<T,e^{-st}>$ en rigor quiero decir lo otro.

Si T es una función, la definición coincide con la vista en funciones, pues T será del tipo Y(t)f(t). Decir $T\in D'_+$ corresponde en funciones a integrar de 0 a +∞.

Volviendo al tema de la definición:
Si defino apresuradamente $L[T] = <T,e^{-st}> = F(s)$, tengo el problema de que distribución y función deben pertenecer a espacios correspondientes. Y si T∈D' esto no marcha porque e^{-st} no pertenece a D (soporte acotado e infinitamente derivable).
Como $e^{-st}\in C^\infty$, con $T\in(C^\infty)'$, es decir de soporte acotado, la definición funciona. Pero son pocas las T de soporte acotado. Queremos tener más distribuciones con T de Laplace.
Inspirados por lo que sabemos de funciones, digo que , con Re(s)>0, e^{-st} decrece al +∞ con fuerza exponencial, (Tipo S). A -∞ crece, pero eso lo arreglo si $T\in D'_+$

Con más precisión: si T es temperada y D'_+, escribo: $L[T] = <\underbrace{T}_{S'} , \underbrace{\alpha(t)e^{-st}}_{S}>$, con $\alpha(t)\in C^\infty$ y que vale 1 en el Sop T.



Ahora la definición funciona, y no depende de α, por argumento similar al que ya vimos alguna vez: tomo otra función β(t) y la resta es $<T,(\alpha-\beta)e^{-st}> = 0$ porque los soportes están separados.

Todavía, puedo ampliar el campo de las distribuciones.

Sea T no temperada, pero "temperable" por un factor e^{-xt}.

O sea, supongo que para x > a, se cumple $e^{-xt}T \in S'$

Estoy pensando en la exponencial Ye^{kt}; no es temperada, pero $Ye^{-xt}e^{kt} = e^{-(x-k)t}$ es temperada para x>k.

Para ese tipo de T defino:

Con x_1>a: $\Rightarrow$ $L[T] = < \underbrace{e^{-x_1 t}T}_{S'}, \underbrace{\alpha(t)e^{-(s-x_1)t}}_{S} >$ para Re(s)>x_1

El factor $e^{-x_1 t}$ desaparece en el cálculo, pero me asegura la existencia.

De $\quad L[T] = \langle T, e^{-st} \rangle = F(s)$

Sale: $\quad F'(s) = \langle T, -te^{-st} \rangle = \langle -t.T, e^{-st} \rangle$

$$F^{(m)}(s) = \langle (-t)^m T, e^{-st} \rangle$$

F(s) es analítica.

T de L de δs.

$$L[\delta] = \langle \delta, e^{-ts} \rangle = 1$$

$$L[\delta'] = \langle \delta', e^{-ts} \rangle = -\langle \delta, -se^{-ts} \rangle = s$$

$$L\left[\delta^{(m)}\right] = s^m$$

$$L[\delta(t-a)] = e^{-as}$$

3.2.Transformada de Laplace y Convolución.

Con distribuciones de D'_+ siempre existe la convolución.

Si $L[U] = \text{U(s)}$ y $L[V] = \text{V(s)}$

$$L[U * V] = \langle U * V, e^{-st} \rangle = \langle U_x \otimes V_y, e^{-s(x+y)} \rangle = \langle U_x \otimes V_y, e^{-sx}.e^{-sy} \rangle = \langle U_x, e^{-sx} \rangle \langle V_y, e^{-sy} \rangle =$$

$$= L[U]L[V] = \text{U(s).V(s)}$$

El semiplano de convergencia es el que está más a la derecha de los dos factores.

3.3. Corolarios: Teoremas de traslación y derivación.

Corolario 1: **Teorema de traslación:**

$$L[T_{x-a}] = L[\delta * T_{x-a}] = L[\delta_{x-a} * T_x] = L[\delta_{x-a}]L[T_x] = e^{-as}L[T_x]$$

Corolario 2: **Teorema de Derivación:**

" Si $L[T] = F(s) \Rightarrow L[T^{(m)}] = s^{(m)}F(s)$ "

En efecto: $L[T^{(m)}] = L[\delta^{(m)} * T] = L[\delta^{(m)}]L[T] = s^m F(s)$

Ej:

1) $\qquad L[Y(t)] = \dfrac{1}{s} \Rightarrow L[\delta] = s.\dfrac{1}{s} = 1$

2) Sabemos que $\quad L[Y \,\text{sen}\, \omega t] = \dfrac{\omega}{s^2 + \omega^2}$

Derivo: $\qquad L[Y\omega \cos \omega t] = \dfrac{\omega s}{s^2 + \omega^2} \Rightarrow L[Y \cos \omega t] = \dfrac{s}{s^2 + \omega^2}$

Derivo otra vez:

$$L[\delta - Y\omega \,\text{sen}\, \omega t] = \frac{s^2}{s^2 + \omega^2}$$

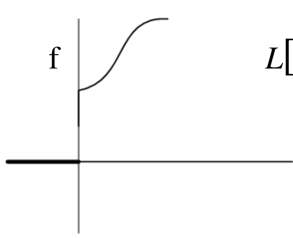
$$1 - \omega L[Y \,\text{sen}\, \omega t] = \frac{s^2}{s^2 + \omega^2} \Rightarrow \omega L[Y \,\text{sen}\, \omega t] = 1 - \frac{s^2}{s^2 + \omega^2} = \frac{\omega^2}{s^2 + \omega^2} \Rightarrow$$

$$L[Y \,\text{sen}\, \omega t] = \frac{\omega}{s^2 + \omega^2}$$

3.4. Datos previos y condiciones iniciales.

Hay que tener cuidado al aplicar el teorema de derivación:

<u>si T es una función, se debe derivar como distribución de D'_+</u>.



$L[f'] = sF(s)$

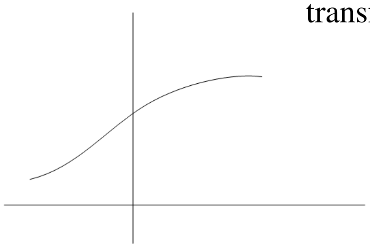
distribución

$$L[\{f'\} + f(0^+)\delta] = L[\{f'\}] + f(0^+) = sF(s) \Rightarrow L[\{f'\}] = sF(s) - f(0^+)$$

que es el resultado que conocíamos.

¿Qué pasa si la función no valía 0?
Si yo tengo una función f(t) que no es nula para t < 0, tengo dos opciones:

f(t)



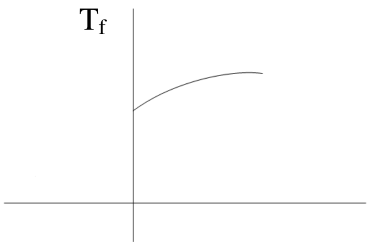
1º) Como función, no tengo problemas para la transformada,

pues es $F(s)=\int_0^{\infty} f(t)e^{-st}\,dt$

Y vale: $L[f']=sF(s)-f(0^+)$, en que f′ es derivada función.

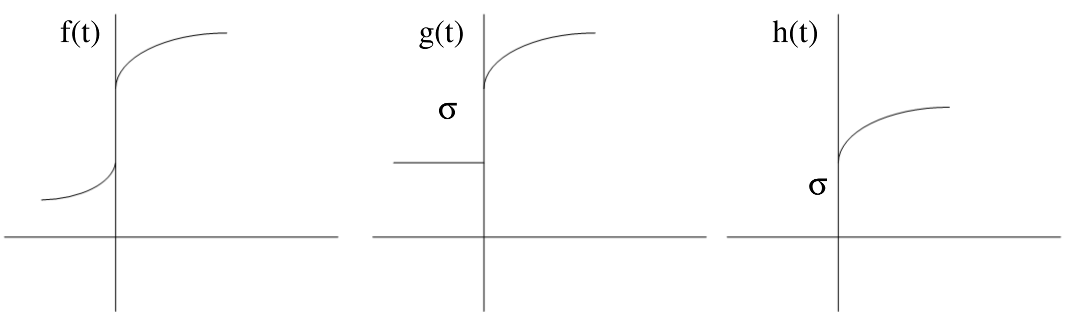
2º) Como distribución, me tengo que poner en D'_+

$T_f = Y.f$



$$L[T'] = sL[T] = sF(s)$$
$$L\left[Y\{f'\} + f(0^+)\delta\right] = sF(s)$$
$$L\left[Y\{f'\}\right] = sF(s) - f(0^+)$$; equivalente al planteo anterior.

Interesa otra interpretación para el caso en que la f(t) tenga un salto en el origen:



El análisis de f(t) y su transformada como función, siempre vale pero con $f(0^+)$.
Interesa conservar, de la historia anterior de f(t) solamente el valor previo $f(0^-)$
Considero g(t) y h(t)

$$h(t) = g(t) - f(0^-)$$

h(t) tiene transformada sin problema, como función y como distribución; g(t) como función.

$$H(s) = G(s) - \frac{f(0^-)}{s}$$

Por otro lado, g′ y h′ como distribuciones son de D'_+ y son iguales:

$$g' = h' \Rightarrow L[g'] = L[h'] = sH(s) = sG(s) - f(0^-)$$

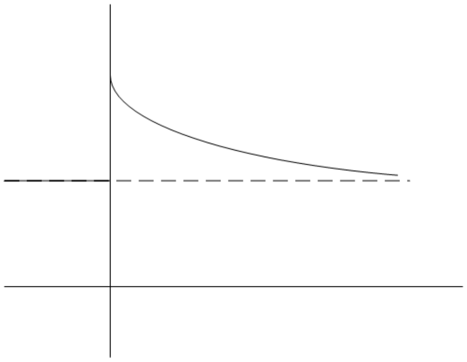
como distribución

$$L\left[Y\{f'\} + \sigma\delta\right] = sF(s) - f(0^-)$$

$f(0^-)$ es el dato previo.
$f(0^+)$ es la condición inicial.

Probamos que hay coherencia entre: trabajar en Laplace con f(0^-) y obtener la función con el salto real σo que da entre f(0^-) y f(0^+).

Veamos con un ejemplo:



$$f(t) = 1 + Ye^{-t}$$

$$F(s) = \frac{1}{s} + \frac{1}{s+1} = \frac{2s+1}{s(s+1)}$$

1ª interpretación:

$$sF(s) - f(0^+) = \frac{2s+1}{s+1} - 2 = \frac{2s+1-2s-2}{s+1} = \frac{-1}{s+1} \rightarrow \{f'\} = -Y(t)e^{-t}$$

2ª interpretación:

$$sF(s) - f(0^-) = \frac{2s+1}{s+1} - 1 = \frac{2s+1-s-1}{s+1} = \frac{s}{s+1} = \frac{s+1}{s+1} - \frac{1}{s+1} = 1 - \frac{1}{s+1} \rightarrow f' = \delta - Y(t)e^{-t}$$

Resumiendo:
Tenemos tres formas, aparentemente distintas para el teorema de derivación:
Funciones como distribuciones de D'_+: $L[f'] = sF(s)$
Derivando la función f como distribución de D'_+: $L[Y\{f'\}] = sF(s) - f(0^+)$

Estas dos interpretaciones borran el pasado de f(t)
Nos interesa conservar información del pasado -reciente- de f(t); a saber: f(0^-)
Para eso hacemos el razonamiento visto (o con menos rigor, sumamos y restamos f(0^-))

$$L[Y\{f'\} + \sigma\delta] = sF(s) - f(0^-)$$

En esta 3ª interpretación, el f(0^-) ocupa el lugar de f(0^+)
Ello corresponde a interpretar la derivada de la función con el salto que realmente da la función.
En los problemas de circuitos, esto encuentra su gran aplicación: lo que conocemos son los datos previos (antes de abrir o cerrar una llave).
Si parto de las condiciones iniciales, obtengo las "funciones" solución. Pero de alguna manera tengo que calcular esas condiciones iniciales.
Si parto de los datos previos, obtengo todo: las funciones con su salto real de 0^- a 0^+.

3.5. Transformada de Fourier y de Laplace. Su vinculación.

En el caso funciones:

$$F(s) = F(x+jy) = \int_0^{+\infty} f(t)e^{-(x+jy)t}dt = \int_0^{+\infty}\left[f(t)e^{-xt}\right]e^{-jyt}dt = \int_{-\infty}^{+\infty}\left[Y(t)f(t)e^{-xt}\right]e^{-jyt}dt$$

Si f es nula en $t < 0$

Con x fijo, esto es esencialmente como función de y, una T de Fourier, a menos de un 2π.

(Tenemos **y** donde en Fourier tenía $\mathbf{2\pi\lambda}$).

" La T de Laplace equivale a una familia de Ts de Fourier, las T de Fourier de funciones $Y(t)f(t)e^{-xt}$, con $x > a$ ".

Esto tiene muchas consecuencias:

1) Permite calcular Ts de Fourier a partir de T de Laplace, que son más simples de calcular, y que se manejan con todas las armas de funciones analíticas.
   Si tenemos la T de Laplace, y podemos llegar al eje imaginario ($x = 0$), obtenemos la T de Fourier de Y.f

   P.ej: $L\left[Ye^{-at}\right] = \dfrac{1}{s+a}$ Podemos llegar sin problemas al eje imaginario.

   $a > 0$

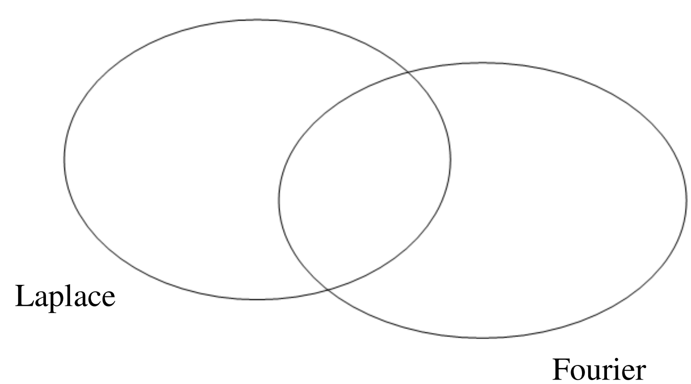
   $$F\left[Ye^{-at}\right] = \frac{1}{j2\pi\lambda + a}$$

" Fourier es Laplace en el eje imaginario -si podemos llegar ".

Pero Fourier existe para funciones definidas en toda la recta, que no tienen Laplace.

Hay muchas funciones que tienen T de Fourier, todas aquellas que dan en la transformada conductas no admisibles en una función analítica (saltos, δs, etc.) El seno, p.ej., definido en toda la recta, tiene δs en su T de F.

Por otro lado, hay funciones no temperadas pero temperables, que tienen T de Laplace, pero no de Fourier.



3.6. Inversión de Laplace.

2) De la inversión de Fourier, deducimos la inversión de Laplace.
   Veamos primero cuál es la idea.
   Recordamos las fórmulas de funciones:

$$C(\lambda) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-j2\pi\lambda t} dt \Rightarrow f(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} C(\lambda) e^{j2\pi\lambda t} d\lambda$$

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} C^*(y) e^{jyt} dy$$

poniendo como variable t, mejor que x.

Para la T de Laplace ahora:

$$F(s) = F(x+jy) = \int_{0}^{+\infty} \left[e^{-xt} f(t) \right] e^{-jyt} dt$$

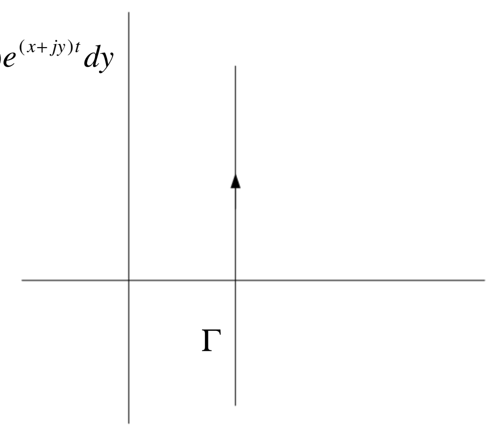
Fijado x, podemos aplicar inversión de Fourier:

$$e^{-xt} f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} F(x+jy) e^{jyt} dy$$

El 2π aparece pues en la fórmula de inversión tenemos dλ, que es $d\,\dfrac{y}{2\pi}$

Siempre con x fijo: $f(t) = \dfrac{1}{2\pi} \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} F(x+jy) e^{(x+jy)t} dy$

Esto lo podemos escribir como integral en el campo complejo:

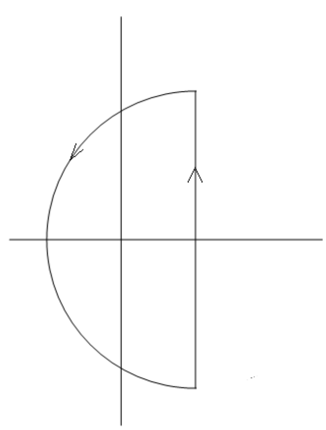


Volviendo a la variable s

$$f(t) = \frac{1}{j2\pi} \int_{\Gamma} e^{st} F(s) ds$$

s = x+jy
ds = jdy

Para que esto exista, debe ser x > a, es decir que Γ debe estar a la derecha de la abscisa de convergencia.
Esto da un camino para antitransformar: ¿Cómo se calcula esa integral sobre Γ?



Sabemos que completo el camino de integración y usamos un resultado de Jordan:
En $\int e^{st} F(s) ds$, la integral sobre el arco tiende a 0, si $\lim_{s\to\infty} F(s) = 0$
Se calcula sumando los residuos, como usualmente en teoría de variable compleja.
El resultado es atractivo, pero limitado a funciones.

Veamos con más rigor:
Queremos saber cuándo una F(s) será T de L de alguna distribución.
" Para que una función analítica F(s) sea T de L de una distribución $T \in D'_+$, es condición N y S que en algún semiplano derecho, $|F(s)| < C\,|s|^n$, es decir, esté acotada en módulo por un polinomio en $|s|$".

$$F(s) = L[T],\, T \in D'_+ \iff \underset{\mathrm{Re}(s) > a}{|F(s)| < C|s|^n}$$

De acuerdo con este teorema, e^s no es T de L de nada.

1) Necesaria. No lo probamos. Veamos sólo que es plausible.
   Si T es una función f, y si a es la abscisa de convergencia de su Integral de Laplace, entonces $f(t)e^{-st}$ es integrable a la derecha de a, y

$$|F(s)| \le \int_0^{+\infty} |f(t)| e^{-at} dt = C$$

Luego, $|F|$ está acotada por una constante.
Si T es una derivada (como distribución) de orden m de una función:

$$F_1(s) = s^m F(s)$$
$$|F_1(s)| \le C|s|^m$$

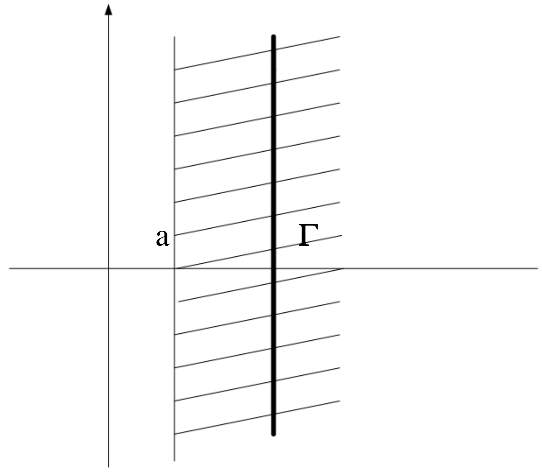
Entonces, la condición se cumple para funciones y sus derivadas en distribuciones.

2) Suficiente. No sólo veremos la suficiencia.
   Veremos un método para antitransformar.
   Supongamos en una primera etapa que F(s) no sólo está acotada por un polinomio.
   Supongamos más: que decrece como $\dfrac{1}{|s|^2}$

   "F(s) está acotada en Re(s) > a > 0; $|F(s)| \le \dfrac{C}{s^2}$ en Re(s) > a"

   En ese caso, digo que F(s) proviene de una función continua (en particular, sin salto en el origen).

   Considero $f(t) = \dfrac{1}{j2\pi} \int_\Gamma F(s) e^{st} ds$, con Γ a la derecha de a.



Vamos a probar que esa f(t) es la antitransformada de F(s) $f(t) = L^{-1}\left[F(s)\right]$

O sea: $L\left[f(t)\right] = F(s)$

1º) La integral tiene sentido pues fijado x y t, F(x+jy) es integrable en y de -∞ a +∞ ya que

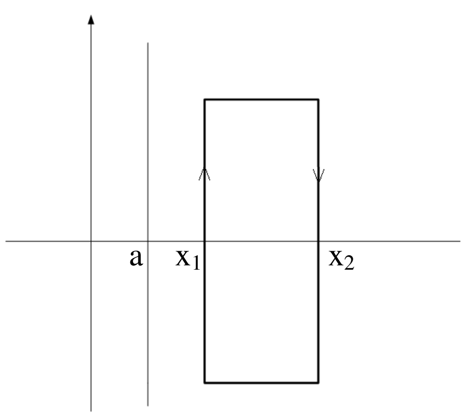
$$\left|F\right| \leq \frac{C}{x^2 + y^2}$$

2º) La integral es independiente de x.

En efecto:

$$f(t) = \frac{1}{j2\pi}\int_{\Gamma} F(s)e^{st}ds = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} F(x+jy)e^{(x+jy)t}dy = \frac{1}{2\pi} lím_{A\to\infty}\int_{-A}^{+A} F(x+jy)e^{(x+jy)t}dy$$

Esta es lo mismo calcularla en x_1 o x_2. En efecto:



En el camino cerrado la integral es 0, pues el integrando no tiene polos (|F(s)| está acotada)

En los tramos horizontales, se acota fácilmente:

P.ej. $\left|\int_{x_1 - jA}^{x_1 + jA} F(s)e^{st}dx\right| \leq \int \frac{C\left|e^{st}\right|}{\left|s\right|^2}dx \leq \frac{(x_2 - x_1)Ce^{x_2 t}}{a^2 + A^2}$ y esto tiende a 0 para A → ∞.

Si la integral no depende de x, paso la e^{xt} al otro miembro:

$$e^{-xt} f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} F(x+jy) e^{jyt} dy \quad \text{(a)}$$

Para x fijo, esto es una T de F (conjugada) de una función integrable, y la T de F es continua y acotada.

3º) Probemos que la f(t) es nula para t< 0.

$$|f(t)| \leq \frac{e^{xt}}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \left| \frac{C}{x^2+y^2} \right| dy \leq \frac{e^{xt}}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{C}{a^2+y^2} dy \leq \frac{e^{xt}}{2\pi} \frac{C}{a} Arc\,\mathrm{tg} \frac{y}{a} \Big|_{-\infty}^{+\infty} = \frac{e^{xt}}{2\pi} \frac{C}{a} \pi$$

$$|f(t)| \leq \frac{C}{2a} e^{xt}, \qquad x > a$$

Esto vale para todo x > a, y para todo t.

- Si t < 0, con x $\to \infty$ llego a que $|f|$ es < ε. Luego f(t) es 0 para t < 0.

- Si t > 0, $\quad |f(t)| < \frac{C}{2a} e^{at}$

$$\left| f(t) e^{-xt} \right| < \frac{C}{2a} e^{-(x-a)t}$$, que es integrable para x > a.

Entonces, puedo integrar la inversa de Fourier de (a)

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-st} dt = F(s)$$

Esto es por Fourier, y como f(t) es nula para t < 0, queda: $\quad F(s) = \int_0^{+\infty} f(t) e^{-st} dt$

Hasta aquí probamos que si $|F| < \frac{C}{|s|^2}$, es la T de L de una función continua, nula para t < 0.

Ahora vayamos al caso general. F(s) es analítica en Re(s) > a >0, acotada por $|s|^m$

$$|F(s)| \leq C |s|^m$$

Consideramos $\quad G(s) = \frac{F(s)}{s^{m+2}}$

Por lo ya visto, esta G es T de L de una función continua f.
Pero entonces, F corresponde a la derivada (m+2) de esa función (derivada en distribuciones).

3.7. Antitransformada de F(s) = 1.

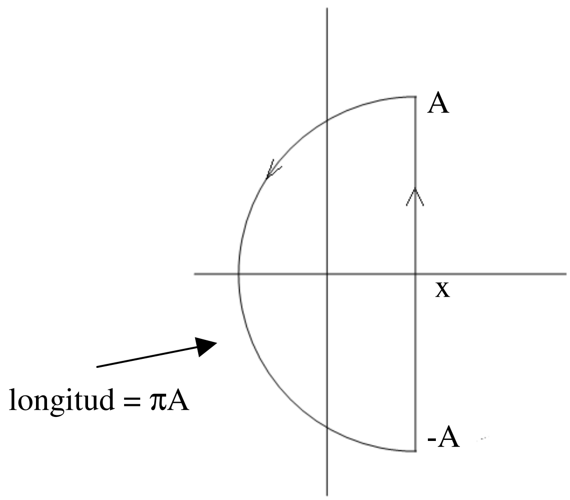
Como ejemplo del análisis anterior, queremos calcular la antitransformada de F(s) = 1
(Ya sabemos que es δ).

Dividimos por s tantas veces como se necesite para acotar por $\frac{C}{s^2}$ En ese caso, sabemos que proviene de una función continua.

$$G(s) = \frac{1}{s^2}$$

$$f(t) = \frac{1}{j2\pi} \int_\Gamma \frac{e^{st}}{s^2} ds$$

El integrando tiene un polo doble en el origen. Circulamos como indica la flecha:



Sobre la circunferencia: $\left|\dfrac{e^{st}}{s^2}\right| \leq \dfrac{e^{xt}}{(A-x)^2}$

Luego, la integral sobre el arco se acota por $\dfrac{\pi A e^{xt}}{(A-x)^2}$

Para x fijo, y <u>para todo t > 0</u>, tiende a 0 con A→ ∞.

Luego $\quad f(t) = \dfrac{j2\pi}{j2\pi} = \Sigma$ Residuos = Residuo en 0.

Como $\quad e^{st} = 1 + ts + \dfrac{t^2 s^2}{2!} + ...$

$$\frac{e^{st}}{s^2} = \frac{1}{s^2} + \frac{t}{s} + \frac{t^2}{2!} + ... \quad \Rightarrow \quad \text{el residuo es t.}$$

Para t < 0, tendría que tomar la semicircunferencia derecha (para acotar $|e^{st}|$). Sé que da 0.

Luego: $\quad f(t) = Y(t).t \leftrightarrow \dfrac{1}{s^2}$

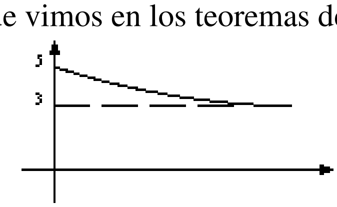
$$f'(t) = Y(t) \leftrightarrow \frac{1}{s}$$

$$f''(t) = \delta \leftrightarrow 1$$

Veamos otro ejemplo: el mismo que vimos en los teoremas de valor inicial y final.

$$f(t) = 3Y(t) + 2Y(t)e^{-t}$$

$$F(s) = \frac{3}{s} + \frac{2}{s+1} = \frac{5s+3}{s(s+1)}$$



Antitransformar F(s).

De acuerdo al teorema, tendríamos que dividir por s para tener del orden de $\frac{1}{s^2}$

Pero no es necesario. Si dividimos por s, vamos a dar a una función continua.
Si no dividimos, simplemente aparece el salto, pero igual vale la fórmula de inversión
¿Por qué? Por el lema de Jordan.

$f(t) = \sum$ residuos de $\frac{e^{st}(5s+3)}{s(s+1)}$ Esta F(s) $\to 0$ con $|s| \to \infty$, y esto es lo que exige Jordan para asegurar que la integral en el arco $\to 0$.

Residuo en s = 0: $\left.\frac{e^{st}(5s+3)}{s+1}\right|_{s=0} = 3$

Residuo en s = -1: $\left.\frac{e^{st}(5s+3)}{s}\right|_{s=-1} = 2e^{-t}$

Luego $f(t) = \left(3 + 2e^{-t}\right)Y(t)$ pues esto vale para t > 0.

En los casos usuales, no se aplica la fórmula de antitransformar, sino que se lleva a transformadas conocidas.
En el caso de funciones racionales (cocientes de polinomios), se llevan a su expresión como suma de fracciones simples.
Para ello, hay métodos sistemáticos, pero como siempre, es preferible la habilidad.

Ej: $F(s) = \frac{s+5}{(s+2)^2}$

La quiero descomponer en fracciones simples.

$$F(s) = \frac{s+5}{(s+2)^2} = \frac{A}{s+2} + \frac{B}{(s+2)^2}$$

$$\frac{s+5}{(s+2)^2} = \frac{s+2+3}{(s+2)^2} = \frac{1}{s+2} + \frac{3}{(s+2)^2} \Rightarrow$$

$$f(t) = Y(t)\left[e^{-2t} + 3te^{-2t}\right] = Y(t)\left[1+3t\right]e^{-2t}$$

3.8. Métodos formales para antitransformar funciones racionales.

Sea un cociente de polinomios $\frac{N(s)}{D(s)}$

Si el grado del Numerador > Grado del Denominador, dividimos de modo de tener:

$$\frac{N}{D} = P(s) + \frac{N_1}{D} \qquad \text{con Gr } N_1 < \text{Gr } D$$

P(s) se antitransforma término a término $\quad L^{-1}[1] = \delta$

$$L^{-1}\left[s^n\right] = \delta^{(n)}$$

Podemos entonces estudiar el caso $\dfrac{N(s)}{D(s)}$ con Gr N < Gr D

1er caso.- Raíces simples del denominador.

a) Reales.

$$F(s) = \frac{N(s)}{(s-s_0)(s-s_1)(s-s_2)} = \frac{A}{s-s_0} + \frac{B}{s-s_1} + \frac{C}{s-s_2}$$

El método consiste en: multiplicar por $s - s_0$ ambos miembros y hacer $s = s_0$

$$A = (s-s_0)F(s)\big|_{s=s_0}$$

Ej: $\quad F(s) = \dfrac{s^2+2s-2}{s(s+2)(s-3)} = \dfrac{A}{s} + \dfrac{B}{s+2} + \dfrac{C}{s-3} \qquad \begin{cases} A = \dfrac{1}{3} \\ B = -\dfrac{1}{5} \\ C = \dfrac{13}{15} \end{cases}$

Es el método popularmente conocido como de la "tapadita".

b) Complejas.

Se puede aplicar el mismo método pero, si todos los coeficientes son reales (lo común), las raíces vienen en parejas conjugadas. Conviene agruparlas.

Veámoslo con un ejemplo:

$$F(s) = \frac{4s^2+10s+19}{(s+2)(s^2+2s+5)} = \frac{A}{s} + \frac{B}{s-(\alpha+j\beta)} + \frac{C}{s-(\alpha-j\beta)} = \frac{A}{s+2} + \frac{Ds+E}{s^2+2s+5}$$

Mejor

(Ni calculamos las raíces: $\dfrac{-2 \pm 4j}{2} = -1 \pm 2j$)

A lo encontramos por la 'tapadita' : $\dfrac{15}{5} = A = 3$

Para D y E identificamos: coeficiente de s^2: $4 = A + D \Rightarrow \underline{D = 1}$

coeficiente de s^0: $19 = 5A + 2E \Rightarrow \underline{E = 2}$

$$F(s) = \frac{3}{s+2} + \frac{s+2}{s^2+2s+5}$$

Para antitransformar esto, ya sabemos que es mejor hacer así:

$$\frac{(s+1)+1}{(s+1)^2+4} \quad \rightarrow \quad e^{-t}\left[\cos 2t + \frac{1}{2}\,\text{sen}\, 2t\right]$$

2º caso.- Raíces múltiples del denominador.

Veremos dos métodos.

a) Si s_0 es raíz de orden n

$$F(s)=\frac{N(s)}{(s-s_0)^n D_1(s)}=\frac{A_0}{(s-s_0)^n}+\frac{A_1}{(s-s_0)^{n-1}}+....+\frac{A_{n-1}}{s-s_0}+\frac{N_1(s)}{D_1(s)}$$

El método de la tapadita solamente me serviría para A_0.

Considero

$$F_1(s)=(s-s_0)^n F(s)=A_0+A_1(s-s_0)+A_2(s-s_0)^2+....+A_{n-1}(s-s_0)^{n-1}+R(s)(s-s_0)^n$$

$$F_1(s_0)=A_0$$

Derivo una vez:

$$\frac{dF_1(s)}{ds}=A_1+2A_2(s-s_0)+....+A_{n-1}(n-1)(s-s_0)^{n-2}+R'(s)(s-s_0)^n+nR(s)(s-s_0)^{n-1}$$

En $s=s_0$ $\qquad \left.\frac{dF_1(s)}{ds}\right|_{s=s_0}=A_1$

Derivo otra vez: $\qquad \frac{d^2F_1(s)}{ds^2}=2A_2+....$

$$A_2=\frac{1}{2}\left.\frac{d^2F_1(s)}{ds^2}\right|_{s=s_0}$$

En general: $\qquad A_j=\frac{1}{j!}\left.\frac{d^jF_1(s)}{ds^j}\right|_{s=s_0}$

Ej: $\qquad F(s)=\frac{s-2}{s(s+1)^3}=\frac{A_0}{(s+1)^3}+\frac{A_1}{(s+1)^2}+\frac{A_2}{s+1}+\frac{B}{s}$

B sale por la tapadita: <u>B = -2</u>

Para los otros:

$$F_1(s)=\frac{s-2}{s}=1-\frac{2}{s}$$

$$A_0=F_1(s)\big|_{s=-1}=3$$

$$A_1=\left.\frac{dF_1(s)}{ds}\right|_{s=-1}=\left.\frac{2}{s^2}\right|_{s=-1}=2$$

$$A_2=\frac{1}{2}\left.\frac{d^2F_1}{ds^2}\right|_{s=-1}=\frac{1}{2}\left.\frac{(-4)}{s^3}\right|_{s=-1}=2$$

O sea: $\qquad F(s)=\frac{3}{(s+1)^3}+\frac{2}{(s+1)^2}+\frac{2}{s+1}-\frac{2}{s}$

Y recordando que: $\quad L\left[\frac{Y(t)t^{n-1}}{(n-1)!}\right]=\frac{1}{s^n}$

$$f(t)=Y(t)\left[e^{-t}\left(\frac{3t^2}{2}+2t+2\right)-2\right]$$

b) Sin necesidad de derivar :

La idea es escribir la $F_1(s)$ como $F_1(p)$ con $p = s - s_0$ y dividir $F_1(p)$ ordenando en potencias crecientes.

Veámoslo mejor con el mismo ejemplo.

$$F(s) = \frac{s-2}{s(s+1)^3}$$

$$F_1(s) = \frac{s-2}{s} = \frac{p-3}{p-1} = \frac{3-p}{1-p}$$

$$s+1 = p \Rightarrow s = p-1$$

$$\begin{array}{l|l}
\quad 3 - p & 1 - p \\ \cline{2-2}
\underline{-3 + 3p} & 3 + 2p + 2p^2 \\
\quad\ 2p & \\
\quad \underline{-2p + 2p^2} & \\
\qquad 2p^2 & \\
\qquad \underline{-2p^2 + 2p^3} & \\
\qquad\quad 2p^3 &
\end{array}$$

¿Hasta cuándo sigo la división?

Hasta tener grado 3 (en este caso, raíz triple) en el resto.

$$F_1(p) = 3 + 2p + 2p^2 - \frac{2p^3}{p-1}$$

$$F = \frac{F_1}{p^3} = \frac{3}{p^3} + \frac{2}{p^2} + \frac{2}{p} - \frac{2}{p-1}$$

Volviendo a s:

$$F(s) = \frac{3}{(s+1)^3} + \frac{2}{(s+)^2} + \frac{2}{s+1} - \frac{2}{s},$$ como en el otro método.

En cada caso, conviene siempre ver si lo mejor es:
- el método general
- la habilidad de manejo
- las tablas

Ej: $$F(s) = \frac{1}{(s^2+1)^2}$$

1) Tiene raíces del denominador $\pm j$, dobles.

Se puede aplicar el método general. Si bien puede ser interesante verlo como ejercicio, resulta engorroso, sobre todo por el manejo de los j. Aplicando en cambio el método recién expuesto:

$$F(s) = \frac{1}{(s+j)^2(s-j)^2}$$

$$(s-j)^2 F(s) = F_1(s) = \frac{1}{(s+j)^2}$$

$$s - j = p$$

$$\begin{array}{l|l}
\qquad 1 & -4 + 4jp + p^2 \\ \cline{2-2}
\underline{-1 + jp + p^2/4} & -1/4 - jp/4
\end{array}$$

$$\begin{array}{l} jp + p^2/4 \\ \underline{- jp - p^2 + jp^3/4} \\ \quad - 3/4p^2 + jp^3/4 \end{array}$$

$$p^2F(p) = F_1(p) = \frac{1}{(p+2j)^2} = \frac{1}{p^2+4jp-4} = -\frac{1}{4} - \frac{j}{4}p + \frac{-\frac{3p^2}{4} + j\frac{p^3}{4}}{(p+2j)^2}$$

$$F(p) = \frac{-1/4}{p^2} + \frac{-j/4}{p} + \frac{-3/4 + j\,p/4}{(p+2j)^2}$$

$$F(s) = \frac{-1/4}{(s-j)^2} + \frac{-j/4}{s-j} + \frac{-3/4 + j/4\,(s-j)}{(s+j)^2} = \frac{-1/4}{(s-j)^2} + \frac{-j/4}{s-j} + \frac{-1/2 + j/4\,(s+j) + 1/4}{(s+j)^2} =$$

$$= \frac{-1/4}{(s-j)^2} + \frac{-j/4}{s-j} + \frac{-1/4}{(s+j)^2} + \frac{j/4}{s+j}$$

$$f(t) = -\frac{1}{4}te^{jt} - \frac{j}{4}e^{jt} - \frac{1}{4}te^{-je} + \frac{j}{4}e^{-jt} = -\frac{j}{4}\left[e^{jt} - e^{-jt}\right] - \frac{t}{4}\left[e^{jt} + e^{-jt}\right]$$

$$\operatorname{sen} t = \frac{[\ ]}{2j} \quad \cos t = \frac{[\ ]}{2}$$

$$f(t) = -\frac{2j^2}{4}\operatorname{sen} t - \frac{2t}{4}\cos t = \frac{1}{2}\operatorname{sen} t - \frac{1}{2}t\cos t$$

2) Sabemos que: $\frac{1}{s^2+1} \to \operatorname{sen} t$

Derivamos en s: $\frac{+2s}{(s^2+1)^2} \to +t\operatorname{sen} t$

derivamos como distribución

Multiplicamos por s: $\frac{2s^2}{(s^2+1)^2} \to t\cos t + \operatorname{sen} t$

Transformamos: $\frac{2s^2}{(s^2+1)^2} = \frac{2(s^2+1)-2}{(s^2+1)^2} = \frac{2}{(s^2+1)} - \frac{2}{(s^2+1)^2}$

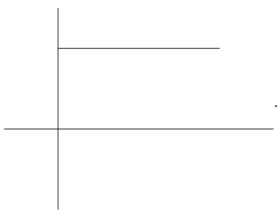
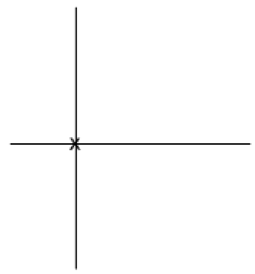
O sea: $L[t\cos t + \operatorname{sen} t] = 2L[\operatorname{sen} t] - \frac{2}{(s^2+1)^2} \Rightarrow \frac{2}{(s^2+1)^2} = L[\operatorname{sen} t - t\cos t]$

$$\frac{1}{(s^2+1)^2} = L\left[\frac{1}{2}(\operatorname{sen} t - t\cos t)\right]$$

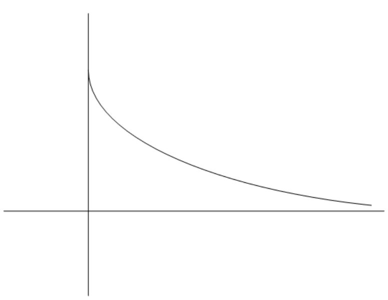
2) Otra idea: convolución de sen t $*$ sen t.

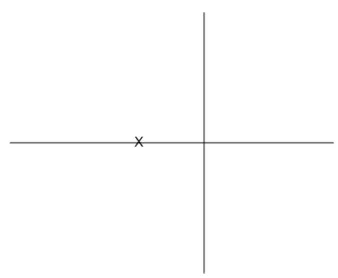
3.9. Vinculación entre descripción de ceros y polos de una función compleja y variación en el tiempo de su antitransformada.

La descripción de <u>Ceros y Polos</u> de una función racional con coeficientes reales F(s) tiene muchas consecuencias.
Del examen visual de la ubicación de los ceros y polos podemos saber mucho de la respuesta en el tiempo.
Veamos algunos diagramas de ceros y polos de funciones conocidas.

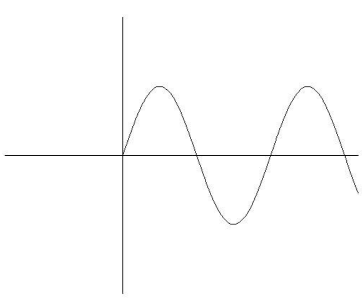
El escalón  $Y(t) \rightarrow \frac{1}{s}$  Polo en el origen

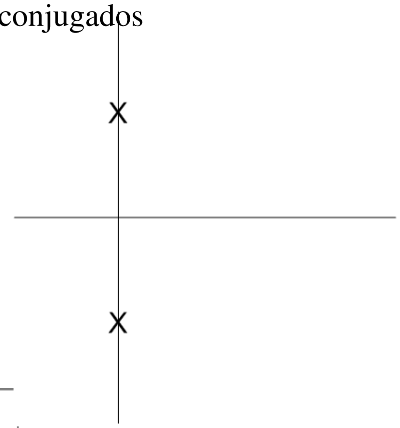
La exponencial decreciente $Ye^{-\sigma t} \rightarrow \frac{1}{s+\sigma}$ Polo real negativo



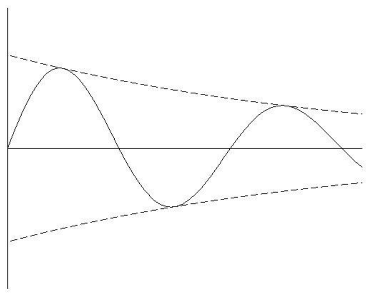


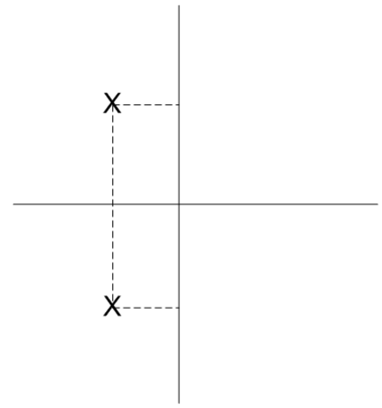
La sinusoide $Y \operatorname{sen} \omega t \rightarrow \frac{\omega}{s^2+\omega^2}$ Polos imaginarios puros conjugados



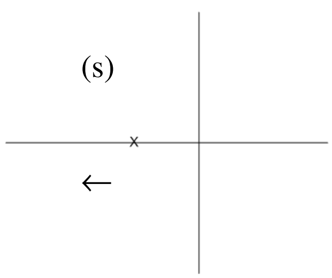


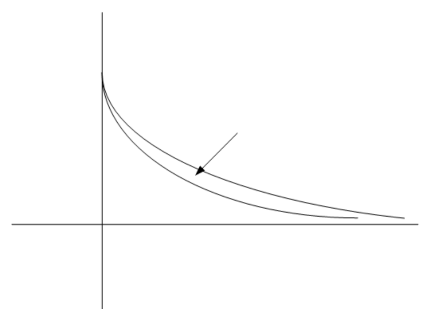
La sinusoide amortiguada $\quad Ye^{-\sigma t}\,\mathrm{sen}\,\omega t \rightarrow \dfrac{\omega}{(s+\sigma)^2+\omega^2}$ $\quad$ Polos: $-\sigma \pm j\omega$



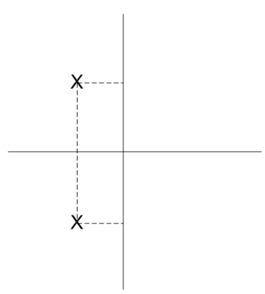


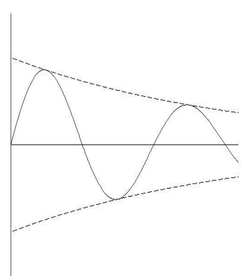
El valor de σ da la amortiguación. Cuanto más lejos estén los polos del eje imaginario (a la izquierda), más fuerte será la amortiguación.





En el caso de las sinusoides, la distancia al eje real es una medida de la frecuencia.





Si los polos se van hacia la izquierda, aumenta la amortiguación. Si se alejan del eje real, aumenta la frecuencia.

Todo esto tendrá aplicación en el estudio de la <u>estabilidad</u>. Polos en el semiplano derecho corresponden a exponenciales crecientes.
Exponencial creciente para polo real positivo.
Sinusoide creciente para polos conjugados a la derecha.
Otro caso de sinusoide creciente se tendría con algo así: $\quad t\,\mathrm{sen}\,\omega t$
¿Cuál es la transformada?

$$\mathrm{sen}\,\omega t \rightarrow \frac{\omega}{s^2+\omega^2}$$

$$+t\,\mathrm{sen}\,\omega t \rightarrow \frac{+2\omega s}{\left(s^2+\omega^2\right)^2}$$

O sea que polos dobles en el eje <u>jω</u> dan lugar a sinusoides crecientes: es <u>inestable</u>.

4. Recapitulando:

La Transformada de Laplace es una herramienta que permite pasar del dominio de las funciones del tiempo a funciones analíticas de variable compleja.
A nivel de la transformada, muchos problemas son de manejo más sencillo: en particular las ecuaciones diferenciales lineales se convierten en ecuaciones algebraicas ordinarias.
Los diversos teoremas y los ejemplos vistos, así como los ejercicios del curso práctico, permiten pasar con facilidad de funciones a transformadas y viceversa.
Vimos además que las condiciones iniciales, que a nivel de las ecuaciones diferenciales constituyen una información complementaria, aparecen en transformadas como fuentes, integradas a la propia ecuación.
Más allá de su aplicación como herramienta simplificadora, la transformada de Laplace permite asociar a los sistemas lineales funciones analíticas como la transferencia, y en el caso de los circuitos eléctricos las impedancias vistas (driving-point).
La presentación de la transformada se ha hecho a dos niveles: la teoría clásica en funciones, y su generalización a distribuciones. En este campo, hemos seguido de cerca nuestra principal referencia bibliográfica:

Laurent Schwartz – Méthodes mathématiques pour les Sciences Physiques