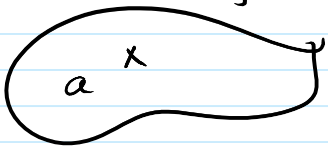
Clase 27

viernes, 24 de junio de 2016 20:35

Polos de una función compleja

$\boxed{f}$

Polo



Ω $\quad a\in\Omega$

$D^*(a,r)\subset\Omega \qquad D^*(a,r)=\{z\in\mathbb{C} : 0<|z-a|<r\}$

existe analítica en todos los puntos salvo

a. f es a $\lim_{z\to a} f(z)=\infty \iff \lim_{z\to a}|f(z)|=+\infty$

$\frac{1}{f}: D^*(a,r)\to\mathbb{C}$ | e^{-1/z^2} $\quad z\to 0$ $\boxed{\text{esencial}}$

$f\to\infty$ existe un entorno de a donde la f no se anula

Cambiando r existe otro radio que lo llamamos r' igual donde

$\frac{1}{f}: D^*(a,r')\to\mathbb{C}$ está definida salvo en a

¿Cómo es la singularidad en a de $\frac{1}{f}$?

$$\lim_{z\to a}(z-a)\frac{1}{f(z)} = \underbrace{0/\infty = 0.0 = 0}$$ ← Calculo

La singularidad de $\frac{1}{f}$ es evitable

$f: D^*(a,r)\to\mathbb{C}$

$\frac{1}{f}: D(a,r)\to\mathbb{C}$ → sino pero además tiene un cero en a y es analítica

$\lim \frac{1}{f} = 0$

tiene un orden a

g es analítico

$$\lim_{z\to a} \frac{1}{f} = 0$$

$\frac{1}{f}$ no es idénticamente nulo (ó f sería "infinito" ¿)

En el entorno de a dado la función $\frac{1}{f}$ tiene un cero de cierto orden k

$\boxed{\frac{1}{f} = (z-a)^k g}$ donde g es analítico y no nulo en un entorno

$$f(z) = \frac{1}{(z-a)^k g}$$

g analítico no nulo $\Rightarrow \frac{1}{g}$ es analítico

$h = \frac{1}{g}$

$$\boxed{f(z) = \frac{h(z)}{(z-a)^k}}$$

Desarrollamos h en serie finita de Taylor

$$h(z) = a_k + a_{k-1}(z-a) + a_{k-2}(z-a)^2 + \dots + a_1(z-a)^{k-1} + (z-a)h_k(z)$$

$$\boxed{f(z) = \frac{a_k}{(z-a)^k} + \frac{a_{k-1}}{(z-a)^{k-1}} + \dots + \frac{a_1}{z-a} + h_k(z)}$$

Desarrollo de Laurent de f alrededor de un polo

$$\sum_{i=0}^{\infty} \alpha_i (z-a)^i$$

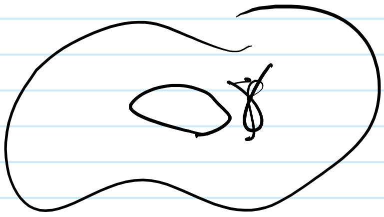
$$f(z) = \frac{a_k}{(z-a)^k} + \dots + \frac{a_1}{z-a} + \alpha_0 + \alpha_1(z-a) + \alpha_2(z-a)^2 \dots$$

Orden del polo de f en a

a es un polo

Ω

$\gamma = \partial D \longrightarrow D$ disco más chico



$$\int_\gamma f(z)$$

$$\int_\gamma f = 0$$

$$f(z) = \frac{a_k}{(z-a)^k} + \frac{a_{k-1}}{(z-a)^{k-1}} + \cdots + \frac{a_1}{z-a} + h_k(z)$$

analítica

$$\int_\gamma f(z)\,dz = a_k \underbrace{\int_\gamma \frac{dz}{(z-a)^k}}_{=0} + a_{k-1} \underbrace{\int_\gamma \frac{dz}{(z-a)^{k-1}}}_{=0} + \cdots + a_1 \int_\gamma \frac{dz}{z-a} + \int_\gamma h_k(z)\,dz$$

$$\int_\gamma h_k(z)\,dz = 0$$

$$-\frac{1}{(z-a)^{k-1}(k-1)} \longrightarrow \text{primitiva de } \frac{1}{(z-a)^k}$$

f'

$$\int_\gamma f'(z)\,dz = \int_a^b \underbrace{f'(\gamma(t))\gamma'(t)}_{\uparrow}\,dt = \int_a^b \big(f(\gamma(t))\big)'\,dt = 0$$

$$= f(\gamma(b)) - f(\gamma(a))$$

$$\int_\gamma f(z)\,dz = \int_\gamma \frac{a_1\,dz}{(z-a)} = a_1\, 2\pi i$$

$a_1 = \operatorname{Res}_a f$ (residuo)

~~índice de~~

$$\int_\gamma \frac{dz}{z-a} = 2\pi i\, \underbrace{n(\gamma,a)}_{=1}$$

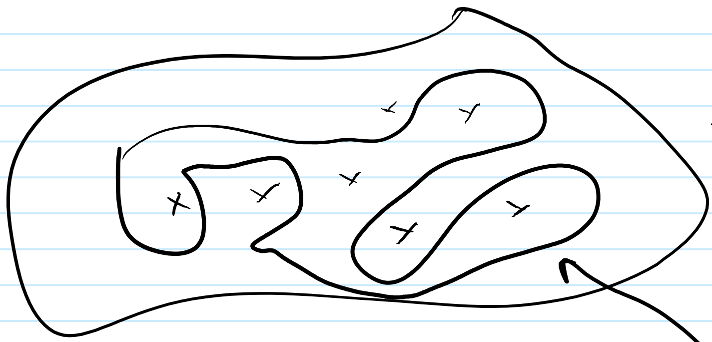
γ cualquiera

$$\int f(z)\,dz = (\operatorname{Res} f)\, n(\gamma, a)$$

o cualquiera

$$\boxed{\int_\gamma f(z)\,dz = (\operatorname{Res}_a f)\, n(\gamma,a)}$$

Teorema de los residuos



Ω

finita de polos

$a_1 \dots a_k$

γ que no pasa por ningún polo

Teorema de los residuos

$a_1 \dots \dots a_t$

$$\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma f(z)\,dz = \sum_{i=1}^{t} (\operatorname{Res}_{a_i} f)\, n(\gamma, a_i)$$

$t=1$ es la fórmula anterior

$$\int_0^{\pi} \frac{dt}{2+\cos t} = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} \frac{dt}{2+\cos t}$$

cos

$f(z)$

$$\int_{|z|=1} f(z)\,dz = \int_0^{2\pi} \frac{dt}{2+\cos t} = \int_0^{2\pi} f(\gamma(t))\gamma'(t)\,dt$$

$\int_\gamma f(z)\,dz$

$$\int_0^{2\pi} \frac{dt}{2+\cos t}$$

$z = \gamma(t) = e^{it}$ $\quad 0 \le t \le 2\pi$

$\gamma'(t)\,dt$ $\quad \gamma'(t)\,dt = i e^{it}\,dt$

dz $\quad z$

$$i\,dt = \frac{dz}{z}$$

$z^{-1} = e^{-it}$

$$z = \gamma(t) = e^{it} \qquad \cos t = \frac{e^{it}+e^{-it}}{2} = \frac{z + 1/z}{2} = \frac{z^2+1}{2z}$$

$$= \int_\gamma \frac{dz}{iz}\,\frac{1}{2+\frac{z^2+1}{2z}} = \frac{1}{i}\int_\gamma \frac{dz}{z\left(2+\frac{z^2+1}{2z}\right)} = \frac{2}{i}\int_\gamma \frac{dz}{z^2+4z+1}$$

$$\int_\gamma \frac{dz}{z^2+4z+1}$$

$\gamma(t) = e^{it}$ $\quad 0 \le t \le 2\pi$

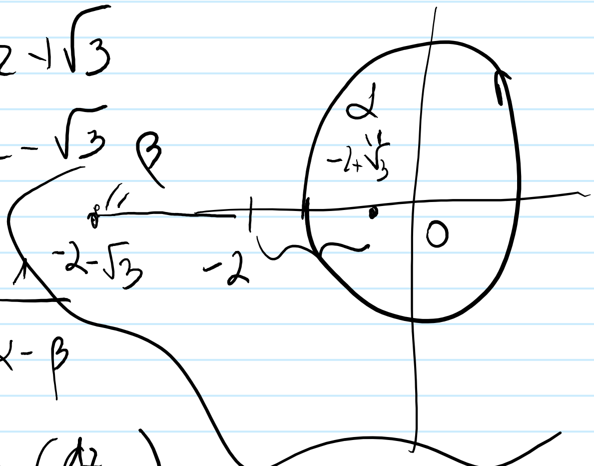
$\gamma = \partial B(0,1)$

$$= \int_0^{2\pi} \frac{\gamma'(t)\,dt}{e^{2it}+4e^{it}+1} = i\int_0^{2\pi} \frac{e^{it}\,dt}{\dots\dots}$$

$$= \int_0^{2\pi} \frac{dt}{e^{it}+4+e^{-it}} = \int_0^{2\pi} \frac{dt}{4+2\cos t} = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} \frac{dt}{2+\cos t}$$

z^2+4z+1 $\qquad \alpha = -2+\sqrt{3}$

$\qquad\qquad\qquad\quad \beta = -2-\sqrt{3}$



$$= \left(\frac{1}{z-\alpha} - \frac{1}{z-\beta}\right)\frac{1}{\alpha-\beta}$$

$$\int_\gamma \frac{dz}{z^2+4z+1} = \frac{1}{2\sqrt{3}}\left(\int_\gamma \frac{dz}{z-\alpha} - \cancel{\int_\gamma \frac{dz}{z-\beta}}\right) \qquad n(\beta,\gamma)=0$$

$$= \frac{2\pi i}{2\sqrt{3}} = \frac{\pi i}{\sqrt{3}}$$