Clase26

viernes, 24 de junio de 2016 19:11

Sea $f(x+iy) = u(x,y) + iv(x,y)$ definida y holomorfa en un abierto conexo D y supongamos función que la $u^2 + v^2 = |f|^2$ sea constante en todo D.

Probar que f es constante en D.

$$\underbrace{uu_x + vv_x = 0 \qquad uu_y + vv_y = 0}$$ $\quad u_x = v_y \quad u_y = -v_x$

$$uu_x - vu_y = 0 \qquad uu_y + vu_x = 0$$

$$\underbrace{\begin{pmatrix} u_x & -u_y \\ u_y & u_x \end{pmatrix}}_{M}\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} M \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$$

$\det M = u_x^2 + v_y^2$

Recuerden que si $\det M \neq 0 \Rightarrow \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow f = 0$

$Y = \{(x,y) / \det M = \underbrace{u_x^2}_{} + u_y^2 \neq 0\}$ $\quad$ $\det M$ es continua, Y es un abierto del plano

Obs.: $\det M = u_x^2 + v_x^2 = |f'|^2$

supongamos $\exists (a,b) \in Y \Rightarrow \exists \varepsilon > 0 / D((a,b),\varepsilon) \subset Y \Rightarrow$ en ese disco $\det M \neq 0 \Rightarrow \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \forall z \in D((a,b),\varepsilon)$, $f(z) = 0$

$\Rightarrow f$ es constante en ese disco $\Rightarrow f'$ vale cero en ese disco. Contrad!

$\therefore Y = \emptyset \Rightarrow |f'| = 0$ en todo $D \Rightarrow$ luego,

como D es conexo, se deduce que f es constante

Práctico IV

3.3) $\quad f(z) = \dfrac{z}{z^2 - 4z + 13}$ $\qquad z^2 - 4z + 13 \qquad \Delta = 16 - 52 = -36$

$$z^2 - 4z + 13 = 0 \Leftrightarrow z = \frac{4 \pm \sqrt{-36}}{2} = \frac{4 \pm 6i}{2} = 2 \pm 3i \quad \begin{matrix} \nearrow z_1 \\ \searrow z_2 \end{matrix}$$

$|z_1| = \sqrt{4+9} = \sqrt{13}$

$|z_2| = \sqrt{13}$

$$f(z) = \frac{z}{(z-z_1)(z-z_2)} = \frac{\alpha}{z-z_1} + \frac{\beta}{z-z_2} = \frac{\alpha}{z_1\left(\frac{z}{z_1} - 1\right)} + \frac{\beta}{z_2\left(\frac{z}{z_2} - 1\right)}$$

$z_2 - z_1 = -6i$

$$f(z) = -\frac{\alpha}{z_1} \cdot \frac{1}{\left(1 - \left(\frac{z}{z_1}\right)\right)} - \frac{\beta}{z_2} \cdot \frac{1}{\left(1 - \left(\frac{z}{z_2}\right)\right)}$$

$$\frac{1}{1-z} = \sum_0^\infty z^n$$ válido en el disco $\{|z| < 1\}$

$$\frac{1}{1 - \frac{z}{z_1}} = \sum^\infty \left(\frac{z}{z_1}\right)^n \quad ; \quad \frac{1}{1 - \left(\frac{z}{z_2}\right)} = \sum^\infty \left(\frac{z}{z_2}\right)^n$$

$$\frac{1}{1-\frac{z}{z_1}} = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z}{z_1}\right)^n \quad ; \quad \frac{1}{1-\left(\frac{z}{z_2}\right)} = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z}{z_2}\right)^n$$

$\{|z|<1\}$

válidos si $\left|\frac{z}{z_1}\right| < 1$ y $\left|\frac{z}{z_2}\right| < 1 \iff \boxed{|z| < \sqrt{13}}$

finalmente obtenemos el desarrollo siguiente:

$$f(z) = -\frac{\alpha}{z_1} \sum_{0}^{\infty} \left(\frac{z}{z_1}\right)^n - \frac{\beta}{z_2} \sum_{0}^{\infty} \left(\frac{z}{z_2}\right)^n$$

$$= -\sum_{0}^{\infty} \left[\frac{\alpha}{z_1^{n+1}} + \frac{\beta}{z_2^{n+1}}\right] z^n$$

$$\frac{\alpha}{z-z_1} + \frac{\beta}{z-z_2} = \frac{(\alpha+\beta)z - (\alpha z_2 + \beta z_1)}{z^2-4z+13} = \frac{z}{z^2-4z+13}$$

$$\begin{cases} \alpha+\beta = 1 \Rightarrow \beta = 1-\alpha \\ z_2\alpha + z_1\beta = 0 \longrightarrow z_2\alpha + z_1(1-\alpha) = 0 \end{cases}$$

$$(z_2 - z_1)\alpha + z_1 = 0 \implies -6i\alpha + 2+3i = 0$$

$$\alpha = \frac{2+3i}{6i} = \frac{-2i+3}{6} = \frac{1}{2} - \frac{i}{3}$$

$$\beta = \frac{1}{2} + \frac{i}{3}$$

$$\int e^{x^2} dx \rightarrow F(z) = \int_0^z e^{x^2} dx \text{ es una primitiva de } e^{z^2}$$

$$\boxed{e^z = 1 + z + \frac{1}{2}z^2 + \cdots + \frac{1}{n!}z^n + \cdots = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!}z^n}$$

converge en todo el plano

$R = +\infty$

$z = \alpha^2$

$$e^{\alpha^2} = 1 + \sum_{1}^{\infty} \frac{1}{n!}\alpha^{2n} \quad \forall \alpha \in \mathbb{C}$$

$$\boxed{e^{z^2} = 1 + \sum_{1}^{\infty} \frac{1}{n!} z^{2n}}$$

~~e^{z^2} es solución de la~~ ec. dif.

$y' = e^{z^2}$

$$F(z) = \int_0^z e^{x^2} dx = z + \sum_{1}^{\infty} \frac{1}{n!} \int_0^z x^{2n} dx = \cancel{\ }$$

$$F(z) = z + \sum \frac{1}{\ } z^{2n+1}$$

solución de la ec.

$$F(z) = z + \sum_{1}^{\infty} \frac{1}{n!} \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)} \rightarrow \text{solución de la ec. dif.: } y' = e^{z^2}$$

De manera análoga se puede resolver.

hallar $f(z)$ / Ej. Práct. IV 5)

$(1-z)z f'(z) = f(z)$ con cond. inicial $f(0)=0$

Se trata de buscar una solución; supongamos que $f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n z^n$ $(a_0 = f(0) = 0)$ al menos en el disco de radio R y centro 0

$$f'(z) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n z^{n-1} \Rightarrow z f'(z) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n z^n = a_1 z + 2a_2 z^2 + \cdots + (n-1)a_{n-1} z^{n-1} + n a_n z^n + \cdots$$

$$(1-z)z f' = z f'(z) - z^2 f'(z)$$

$$z^2 f'(z) \qquad a_1 z^2 + \cdots + (n-1)a_{n-1} z^n + \cdots$$

$$z f'(z) - z^2 f'(z) = a_1 z + (2a_2 - a_1) z^2 + \cdots + (n a_n - (n-1) a_{n-1}) z^n + \cdots$$

$$f(z) = a_1 z + a_2 z^2 + \cdots + a_n z^n + \cdots$$

Tendremos entonces que $z f' - z^2 f' = f$ sii los coef. satisfacen el siguiente sistema de ecuaciones (infinitas ecuaciones lineales):

$2a_2 - a_1 = a_2$ coef de $z^2 \Rightarrow a_2 = a_1 \Rightarrow a_2 = a_1$

$3a_3 - 2a_2 = a_3$ " $z^3 \Rightarrow 2a_3 = 2a_2 \Rightarrow a_3 = a_2$

$\vdots$

$n a_n - (n-1) a_{n-1} = a_n$ coef de $z^n \Rightarrow a_n = a_{n-1}$

$$\Rightarrow f(z) = a_1 \sum_{1}^{\infty} z^n = a_1 z \cdot \frac{1}{1-z} = a_1 \frac{z}{1-z}$$

$$f'(z) = \frac{1}{z(1-z)} f(z)$$