Teorema $\Omega \to \mathbb{C}$ f_n analíticas en Ω

$f_n \rightrightarrows f$ uniformemente $\Longrightarrow$

f es analítica

$f_n' \rightrightarrows f'$

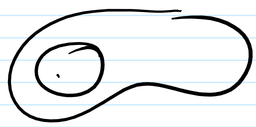
$f : \Omega \to \mathbb{C}$

$a \in \Omega$

$$f(z) = f(a) + f'(a)(z-a) + \frac{f''(a)}{2!}(z-a)^2 + \dots$$

$$+ \frac{(z-a)^{n-1}}{(n-1)!} f^{(n-1)}(a) + (z-a)^n f_n(z)$$

$$T_n(z) = f(a) + f'(a)(z-a) + \dots + \frac{(z-a)^{n-1}}{(n-1)!} f^{(n-1)}(a)$$



$T_n(z) \rightrightarrows f$

$T_n'(z) \rightrightarrows f'$

es un polinomio

$$\boxed{f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n} \qquad S_k(z) = \sum_{n=0}^{k} a_n z^n \rightrightarrows f(z)$$

$$f'(z) = \sum_{n=0}^{\infty} n a_n z^{n-1} \Longleftarrow \sum_{n=0}^{k} a_n n z^{n-1} \rightrightarrows f'(z)$$

$$e^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$$ en la región de convergencia

$$(e^z)' = e^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n z^{n-1}}{n!}$$ $D(0,R)$ R = radio de convergencia

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n z^{n-1}}{n!}$$

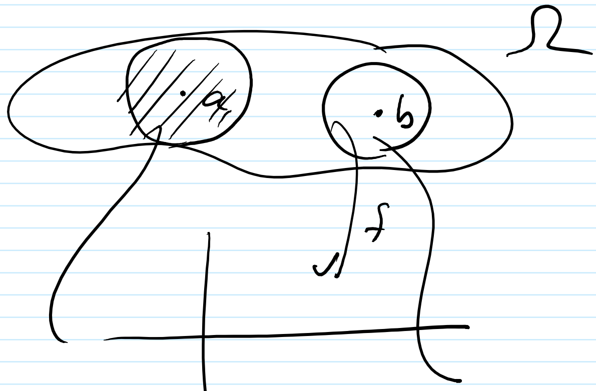
$$= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^{n-1}}{(n-1)!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} = e^z$$

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$$

$$f'(z) = \sum_{n=0}^{\infty} n a_n z^{n-1}$$

$n=1$ $(n-1)!$ $\quad n=0$ $\qquad f'(z) = \sum_{n=0} n a_n z$

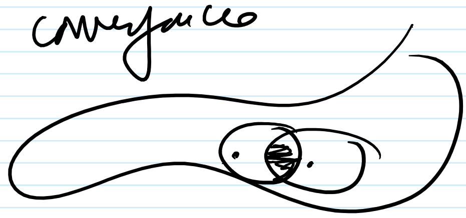
$n-1 = m$ $\qquad = \sum_{1}^{\infty} n a_n z^{n-1}$



R de convergencia

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-a)^n$$

en el disco de convergencia



$\forall z \in \Omega$

$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n (z-b)^n$ $\quad b_n$ otros coeficientes

$a \longrightarrow \dfrac{f^{(n)}(a)}{n!} = a_n$

$b \longrightarrow \dfrac{f^{(n)}(b)}{n!} = b_n$

Zeros y los polos de las funciones analíticas

Ceros $\quad f: \Omega \to \mathbb{C} \quad a \quad f(a) = 0$ existe un máximo

$k: f^{(k)}(a) = 0$ y luego $\underbrace{k+1, k+2, \dots}$ $\quad f^{(j)}(a) \neq 0$

ó f es idénticamente nulo en la región

Teo

$f: \Omega \to \mathbb{C}$ es analítica y $f(a) = f'(a) = \dots = f^{(k)}(a) = \dots$

$\forall k$

$\Rightarrow f \equiv 0$ en Ω

$f(a) = 0 \quad f'(a) = 0 \quad f''(a) \neq 0 \quad$ etc

El valor k: $\; f^{(k-1)}(a) = 0 \quad f^{k}(a) \neq 0$ el orden del cero o multiplicidad del cero

$f(z) =$

Desarrollo de Taylor

$$f(z) = \underset{0}{f(a)} + \underset{0}{f'(a)}(z-a) + \dots + \frac{\overset{0}{f^{(k-1)}(a)}}{(k-1)!}(z-a)^{k-1} + (z-a)^k f_k(z)$$

Sabemos que $f(z) = (z-a)^k f_k(z)$

f_k analítica y $f_k(a) \neq 0$ (porque $f^{(k)}(a) \neq 0$)

Teorema Si f es analítica en Ω y $f(a)=0$ existe un k.
$f(z) = (z-a)^k f_k(z)$ con $f_k(a) \neq 0$.

k = orden del cero o la multiplicidad.

$f(x) = e^{-1/x^2}$ $\longrightarrow$ tiene raíz 0 pero no existe la multiplicidad.

$f(x) = x^k f_k(x)$

$f_k(0) \neq 0$

$\to$ $f_k(a) \neq 0$ en un entorno de a $f_k(z) \neq 0$ — f no idénticamente nula

$f : \Omega \to \mathbb{C}$ es una función analítica y $f(a)=0$ existe k llamado multiplicidad del cero: $f(z) = (z-a)^k f_k(z)$

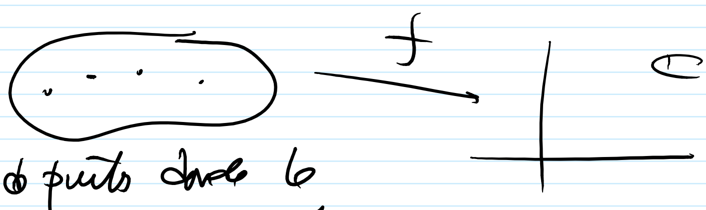
f_k es analítica y no nula en un entorno de a.

Corolario Si a es un cero de f y f no es idénticamente nula entonces existe un entorno de a donde el único cero de f es a

$f(z) = (z-a)^k f_k(z)$ — $f_k \neq 0$ en todo los puntos

Polos

Singularidades



Hay un conjunto de puntos donde la función no es analítica

$\frac{1}{z}$ $\quad \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ $\quad z \neq 0$

$z \longrightarrow 1/z$

y además $\forall\, a_i$ de esos puntos existe un entorno $0 < |z - a_i| < \delta_i$

sin el centro donde la función es analítica.

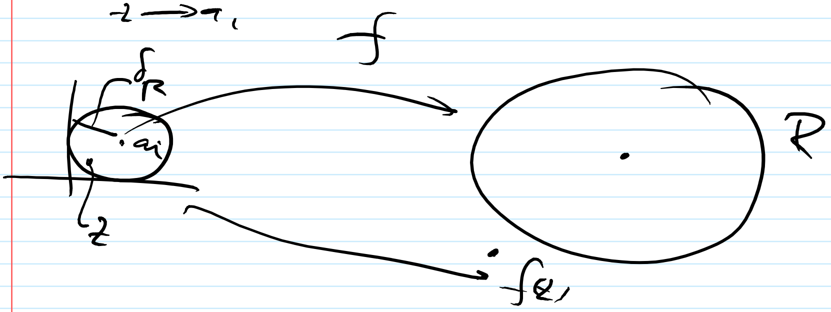
La singularidad es aislada

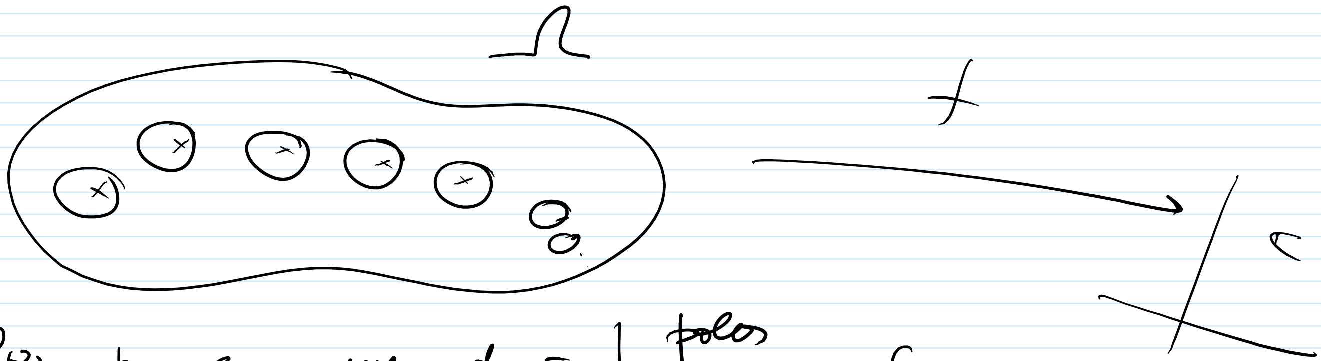
la función es analítica.

$\boxed{a_i \text{ singularidades aisladas}}$

$\lim_{z\to a_i} f(z)=\infty$ $\quad \forall R>0 \ \exists \delta_R>0 : |z-a_i|<\delta_R \quad |f(z)|>R$

a_i es un polo de f





la $\lim_{z\to a_i} f(z)$ puede ser muy extraño

polos $\lim_{z\to a_i} f(z)=\infty$

Singularidades esenciales

Si a_i es una singularidad esencial

y $B(a_i,\delta)$ una bola

$f : \Omega \to \mathbb{C}$

$B(a_i,\delta) \subset \Omega$, $a_i \in B(a_i,\delta)$, $B(a_i,\delta) \longrightarrow f(B(a_i,\delta)) \subset \mathbb{C}$

$$\boxed{\begin{array}{l} f(B(a_i,\delta)) \subset \mathbb{C} \\ \text{es un conjunto denso de } \mathbb{C} \end{array}}$$

Existe una bola $B(a,\delta)$: $f(B(a,\delta))$ es $\mathbb{C}$ − 2 puntos

---

Polos de f

$f : \Omega \to \mathbb{C}$, $\Omega \ni a$ polo

$B^*(a,\delta) = B(a,\delta) - \{a\}$

$\cap$

$B(a,\delta)$ donde la función es analítica salvo a

en a puede haber problema $\quad f \to \infty$

analítica salvo en a

$\frac{1}{f}$: $\begin{cases} \text{en } a \text{ puede haber problema} \\ \text{es analítica si } z \neq a \end{cases}$

$f \to \infty$

$\frac{1}{f} \to 0$

no tiene polo en a

en a tiene una singularidad evitable

$$\boxed{\lim_{z \to a} \frac{(z-a)}{f} = 0}$$

$\cdot a$ $\frac{1}{f}$ analítica

$g: \Omega - \{a\} \to \mathbb{C}$

$\lim_{z \to a} (z-a)\, g(z) = 0$

$\cap$

$G: \Omega$

$\downarrow$ analítica

$\frac{\operatorname{sen} z}{z}$