Clase 24

viernes, 17 de junio de 2016 19:15

$$f(z) = e^{-1/z^2}$$

$$f(x) = \begin{cases} e^{-1/x^2} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

$f: \Omega \to \mathbb{C}$

$f(a) = f'(a) = \dots = f^{(k)}(a) = 0 \quad \forall k$

$\Rightarrow f = 0$ en Ω

$x \neq 0$ es derivable

$x \to 0 \quad \frac{1}{x^2} \to +\infty$

$-\frac{1}{x^2} \to -\infty$

$e^{-1/x^2} \to 0$

$$\lim_{x \to 0} \frac{e^{-1/x^2} - 0}{x - 0} = \lim_{x \to 0} \frac{e^{-1/x^2}}{x} \to 0 \qquad 0/0$$

$f(0) = 0 = f'(0) = \dots$

$f(x) = e^{-1/x^2}$

$$f'(x) = \begin{cases} \frac{2e^{-1/x^2}}{x^3} & x \neq 0 \\ 0 & x \to 0 \end{cases}$$

$f(z) = e^{-1/z^2}$

$z = iy$

$$f(iy) = \begin{cases} e^{-1/(iy)^2} \\ 0 & y = 0 \end{cases}$$

$$f(iy) = \begin{cases} e^{1/y^2} & y \neq 0 \\ 0 & y = 0 \end{cases}$$

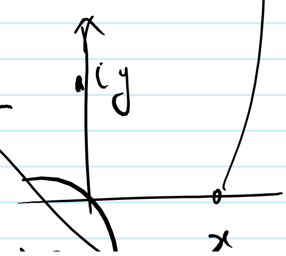
$f(x) = e^{-1/x^2} \to 0$

$1/x^2 > 0$

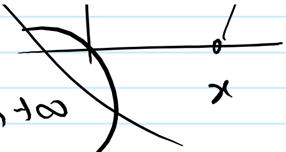
$\downarrow$

$+\infty$

$y \to 0 \quad \frac{1}{y} \to +\infty \quad 1/y^2$



$$f(iy) = \begin{cases} e^{\ldots} & y \neq 0 \\ 0 & y = 0 \end{cases} \quad y \to 0 \;\; \frac{1}{y^2} \to +\infty \quad e^{1/y^2} \to +\infty$$



$$e^{-1/z^2}$$

$$e^{-z} = 1 + -z + z^2/2 + z^3/3! + \ldots$$

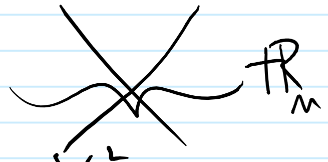
$$e^{-1/z^2} = 1 - \frac{1}{z^2} + \frac{1}{2z^4} - \frac{1}{6z^6} + \ldots$$

$$e^{-1/x^2} = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 \ldots$$

$$f \quad 0 \quad 0 \quad 0$$

$$\underline{g} \quad T_n(f) = 0 \quad \forall n$$

$$e^{-1/x^2} = \ldots + R_n$$



$$R_n = e^{-1/x^2}$$

Series de potencias

$\mathbb{C}$ $\quad a_n \in \mathbb{C} \quad n = 1, 2, 3, \ldots$

$a_n \to a \iff a_n - a \to 0 \iff |a_n - a| \to 0$ en $\mathbb{R}$

$\not\Leftarrow$

$a_n \to a \iff \begin{array}{l} \mathrm{Re}(a_n) \to \mathrm{Re}(a) \\ \mathrm{Im}(a_n) \to \mathrm{Im}(a) \end{array}$

$$|a_n - a|^2 = \mathrm{Re}(a_n - a)^2 + \mathrm{Im}(a_n - a)^2 \geq |\mathrm{Re}(a_n - a)|^2$$

$\downarrow$

0

$\{a_n\}$ término general de una serie

$\downarrow$

$$S_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$$

$\sum a_n$ converge $\iff$

S_n tiene un límite

$\sum a_n$ converge

S_n tiene un límite $\|$

$a_n \to a$ esto es fácil $\forall \varepsilon\ \exists\ n(\varepsilon)$:

$\forall n \geq n(\varepsilon) \Rightarrow |a_n - a| < \varepsilon$

~~sea~~ a_n ¿tiene límite? ¿cuál es?

Criterio de Cauchy o condición de Cauchy

$\{a_n\} \in \mathbb{C}$ tiene límite si y solo si cumple la condición de Cauchy (*) $\forall \varepsilon\ \exists\ n_0(\varepsilon)$: $m, n > n_0(\varepsilon)$
$|a_n - a_m| < \varepsilon$

$\sum a_n$ $\quad S_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$

converge sii $\forall \varepsilon > 0\ \exists\ n(\varepsilon) > 0$: $m, n > n(\varepsilon)$

$\Rightarrow |a_{n+1} + a_{n+2} + \cdots + a_m| < \varepsilon$ $\quad m \geq n$

$\|$

$|S_m - S_n|$

Sucesiones y series de funciones complejo Ω región en $\mathbb{C}$

$f_n : \Omega \to \mathbb{C}$ sucesión de funciones

límite de f_n

límite puntual $a \in \Omega$ $\quad f_n(a) \to f(a)$

Si existe una función $f : \Omega \to \mathbb{C}$ $\forall\ a \in \Omega$

$f_n(a) \to f(a)$

$f(z) = z$ $\quad z \in \mathbb{C}$ $\quad f_n : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$

$f_n(z) = z/n \quad z \in \mathbb{C} \quad f_n : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$

$\forall a \quad f_n(a) = a/n \to 0$

$f_n : \mathbb{C} \to \mathbb{C} \quad 0 : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$

$\forall a \quad f_n(a) \to 0(a) = 0$

$\forall a \in \Omega \quad \lim_{n \to \infty} f_n(a)$ existe $f(a)$

$f_n \to f$ puntualmente

$\forall \varepsilon \ \exists\, n(\varepsilon) : |f_n(a) - f(a)| < \varepsilon \quad n > n(\varepsilon)$

fijado a $\quad f_n(a) \to f(a) \quad$ a es fijo

$f_n \to f$ puntualmente en Ω

si $\forall \varepsilon \ \exists\, n(\varepsilon, a) : n > n(\varepsilon, a)$

$\Rightarrow |f_n(a) - f(a)| < \varepsilon$

$\left(1 + \frac{1}{n}\right) z \longrightarrow z$ en $\mathbb{C}$ punto a punto y ε

y encontré explícitamente para cada a el $n(\varepsilon, a)$

y vimos que no hay uno que sirve para todos

Si pasa que $f_n \to f : \Omega \to \mathbb{C}$ se dice que converge uniformemente a f si $\forall \varepsilon \ \exists\, n(\varepsilon) \ \forall a$

si $n > n(\varepsilon) \Rightarrow$ ~~...~~ $|f_n(a) - f(a)| < \varepsilon$

$f : \Omega \to \mathbb{C}$

$\mathbb{C}^{m}$ $(a_1 \dots a_m)$

$(a(1), a(2), \dots (a(m))$

$\mathbb{C}^{\Omega}$ $\ni f$ $\quad f : \Omega \to \mathbb{C}$

$f_n \to f$ puntuale

$f_n \rightrightarrows f$ uniforme

an trovare limite

$\boxed{\text{Criterio di Cauchy}}$

$\forall \varepsilon \forall a \; \exists \; M(\varepsilon, a)$:
$m, n > M(\varepsilon, a)$
$|f_n(x) - f_m(x)| < \varepsilon$

$f_n \to f$ puntualmente
se $\forall x \; f_n(x) \to f(x)$
$\iff \forall x \; f_n(x)$ è di Cauchy

$f_n \to f$ punto a punto
se f_n è di Cauchy punto a punto

$f_n \rightrightarrows f$ uniformemente

$\Updownarrow$

f_n è uniformemente di Cauchy

(Def. $\forall \varepsilon \; \exists M(\varepsilon) : \forall a \; \forall m, n > M(\varepsilon)$
$|f_n(a) - f_m(a)| < \varepsilon$

allora non dipende da a

alhora no depende de a

Series de funciones

$\sum f_n$ ~~[illegible]~~ converge puntualmente

converge uniformemente

$$\sum_{i=1}^{n} f_n = S_n \qquad S_n \to f \text{ puntualmente}$$

$$S_n \rightrightarrows f \text{ ~~uniformemente~~ uniformemente}$$

$\sum f_n$ converge puntualmente $\iff$ S_n es puntualmente de Cauchy

$\sum f_n$ converge uniformemente $\iff$ S_n es uniformemente de Cauchy

$\sum f_n$ converge uniformemente $\iff$

$$\forall \varepsilon \; \exists\, N(\varepsilon) : \forall\, m, n \geq N(\varepsilon)$$

$$|f_{n+1}(a) + f_{n+2}(a) + \cdots + f_m(a)| < \varepsilon \quad \forall a$$

$N(\varepsilon)$ no depende de a

Criterio M de Weierstrass

Convergencia Uniforme de series

Si $\sum f_n$ es una serie de funciones definidas en $\Omega \xrightarrow{f_n} \mathbb{C}$

si ~~$\forall$~~ $\exists\, M > 0$ y una sucesión numérica $\{a_n\}$: $\forall n$

$$|f_n| \leq M a_n \text{ y } \sum a_n \text{ numérica converge}$$

$$\Rightarrow \sum f_n \text{ converge uniformemente}$$

$a_n \geq 0$

$a_n \geq 0$

Dem $|f_{n+1}(a) + \cdots + f_m(a)| \leq |f_{n+1}(a)| + \cdots + |f_m(a)|$

$\leq M a_{n+1} + \cdots + M a_m = M(a_{n+1} + \cdots + a_m)$

ε $n(\varepsilon)$. $\forall m, n > n(\varepsilon)$ $|f_{n+1}(a) + \cdots + f_m(a)| < \varepsilon$

$n(\varepsilon)$ $a_{n+1} + \cdots + a_m < \varepsilon$

$\|$

$S_m - S_n \longrightarrow$ $S_m = a_1 + \cdots + a_m$

$|f_{n+1}(a) + \cdots + f_m(a)| \leq M(a_{n+1} + \cdots + a_m) < M\varepsilon$

$\forall m, n > n(\varepsilon)$

y ja està

Convergencia de funcions y operacions amb funcions

$f : \Omega \to \mathbb{C}$ $\quad C(\Omega)$ espacio vectorial

$f_n \rightrightarrows f \quad g_n \rightrightarrows g \implies f_n + g_n \rightrightarrows f + g$

Integrar y derivadas

$f_n \to f$ puntualment $\implies \int f_n \to \int f$ etc etc

Teorema Si $f_n : \Omega \to \mathbb{C}$ es una sucesión de funciones analíticas que convergen $f_n \rightrightarrows f$ a f en $\Omega \implies f$ es analítica y además $f_n' \rightrightarrows f'$

Demostración

Lema $f_n \rightrightarrows f$ en Ω f_n continua y f continua y γ es una curva en Ω continua

$$\int_\gamma f_n(z)dz \to \int_\gamma f(z)dz$$

$$\int_\gamma f_n(z)dz - \int_\gamma f(z)dz$$

$$= \int_\gamma (f_n(z) - f(z))dz = \int_a^b (f_n(\gamma(t)) - f(\gamma(t)))\gamma'(t)dt$$

$$\left|\int_\gamma f_n(z)dz - \int_\gamma f(z)dz\right| \le \int_a^b |f_n(\gamma(t)) - f(\gamma(t))|\, |\gamma'(t)|dt$$

$\Rightarrow$ Dado ε $\exists$ $n(\varepsilon)$: $n > n(\varepsilon)$

$$\boxed{|f_n(\gamma(t)) - f(\gamma(t))| < \varepsilon} \quad \forall t$$

$\le \varepsilon(b-a)k$ $\quad$ k cota de $|\gamma'(t)|$

y esto ~~prueba~~ que $\int_\gamma f_n \to \int_\gamma f$ $\quad$ QED

$$f(x_n) \to f(x)$$
$$x_n \to x$$

$$\int_\gamma f_{x_n} \to \int_\gamma f_x$$

$f_n \rightrightarrows f$ y f_n es analítica $\Rightarrow$ f es analítica

Teorema de Weierstrass f_n analíticas $\Rightarrow \int_\gamma f_n = 0 \quad \forall \gamma \subset \Omega$

Morera

$\int_\gamma f_n \to \int_\gamma f$ por Lema $\Rightarrow \int_\gamma f = 0 \Rightarrow f$ es analítica

$f_n' \rightrightarrows f'$

$f_n'(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_D \frac{f_n(\zeta)}{(\zeta - z)^2} d\zeta$

z fijo $\quad f_n \rightrightarrows f$

$\frac{f_n(\zeta)}{(\zeta - z)^2} \rightrightarrows \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^2}$

$\int_\gamma \frac{f_n(\zeta)}{(\zeta - z)^2} d\zeta = f_n'(z)$

$\downarrow \qquad \downarrow$

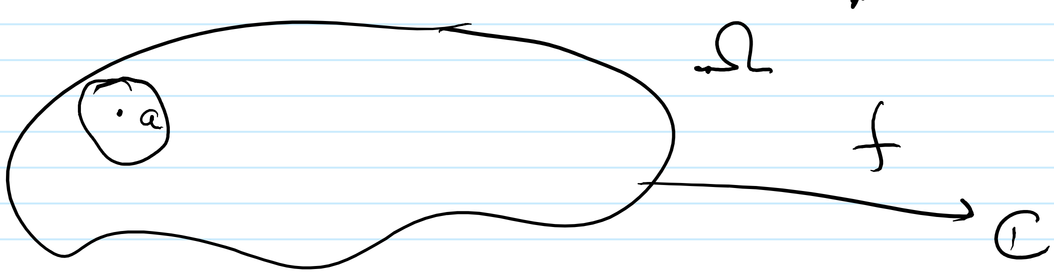
$\int_\gamma \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^2} d\zeta = f'(z)$

Trabajando más se obtiene la conv uniforme

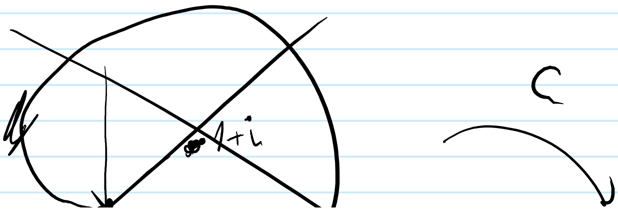
Teorema $f : \Omega \to \mathbb{C}$ es una función analítica y $a \in \Omega$ la serie de Taylor de f en a converge uniformemente a f en todo disco centrado en a, contenido totalmente en Ω

cuya clausura está

abierto

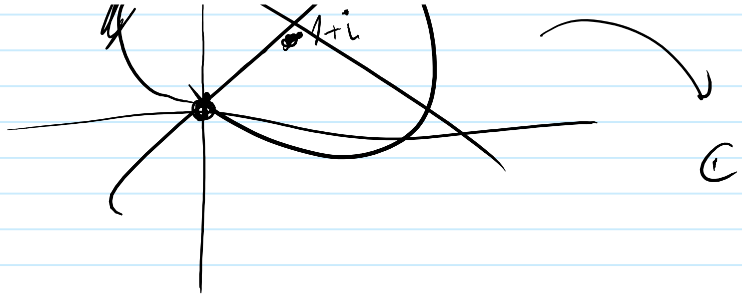


$f(z) = e^z / z$

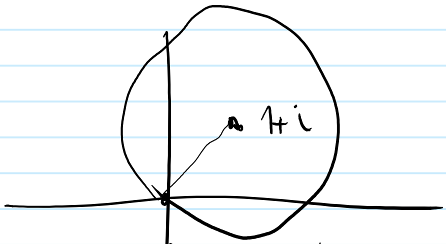


$f(z) = e$

$\mathbb{C} - \{0\}$



$f(z) = \frac{e^z}{z}$



$$\frac{e^z}{z} = a_0 + a_1(z-(1+i)) + a_2(z-(1+i))^2 + \cdots$$

y su desarrollo es válido en el disco abierto dibujado

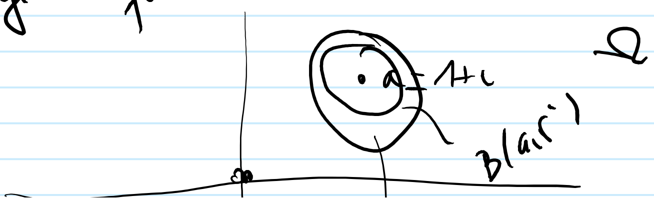
Teorema Ω región del plano complejo $a \in \Omega$, Sea Ω tal que $B(a,r) = \{z \in \mathbb{C} : |z-a| < r\}$ esté en Ω

$\Rightarrow$ f la serie $f(a) + f'(a)(z-a) + f''(a)\frac{(z-a)^2}{2} + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(z-a)^n + \cdots$ de Taylor

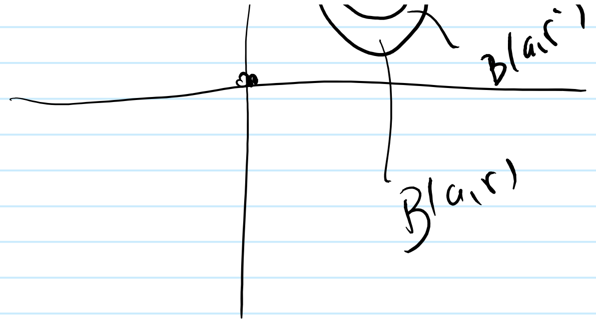
converge puntualmente a f en $B(a,r)$

y converge uniformemente en $B(a,r')$ $\forall r' < r$.

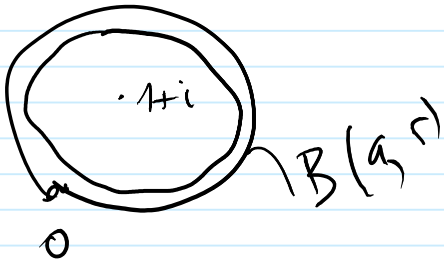
$e^z/$



e^z/z

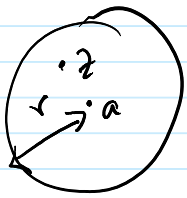


e^z/z



$r' < r \qquad B(a,r')$

$$f(z) \quad f(a) + f'(a)(z-a) + \frac{f''(a)}{2!}(z-a)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(z-a)^n + \underbrace{(z-a)^{n+1} f_{n+1}(z)}_{R_n(z)}$$



$R_n(z) \longrightarrow 0$, $B(a,r)$
en la región ~~...~~

$R_n(z) \rightrightarrows 0$ en V nf $B(a,r')$ $\quad r' < r$

$|z-a| < r$

$$\left| (z-a)^{n+1} f_{n+1}(z) \right| \leq \frac{M|z-a|^{n+1}}{r^n (r - |z-a|)} = M \left(\frac{|z-a|}{r} \right)^n \frac{|z-a|}{(r - |z-a|)} \downarrow 0$$

$$\frac{|z-a|}{r} < 1 \qquad \forall z$$

$|z-a| < r' < r$

$$\left| (z-a)^{n+1} f_{n+1}(z) \right| \leq M \left(\frac{r'}{r} \right)^n \frac{r'}{r - r'}$$

cte

$$r - |z-a| \geq r - r' \qquad \frac{1}{r - |z-a|} < \frac{1}{r - r'}$$

Como la serie $\sum \left(\frac{r'}{r}\right)^n$ es convergente pues es la serie geométrica de razón < 1

$\Rightarrow$ por el criterio M de Weierstrass $\{(z-a)^{n+1} f_{n+1}(z)\}$

$\Longrightarrow 0$ o sea el resto converge uniformemente a 0 y eso quiere decir que la serie de Taylor converge en el disco mencionado, uniformemente a la función

QED