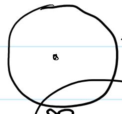
Clase 22

jueves, 16 de junio de 2016 20:32

Series de potencias $\sum_{n\geq 0} a_n z^n$ serie

Existe un valor $R \in \mathbb{R}^+$ tal que



$\to D(0,R)$

$\forall |z|<R$ $\sum_0^\infty a_n z^n$ converge a

$\forall |z|>R$ $\sum_{n\geq 0} a_n z^n$ diverge

En particular la serie define una función $f(z) = \sum_{n\geq 0}^{\infty} a_n z^n$ que está definida y es holomorfa en el disco abierto $D(0,R)$. Además

$$f'(z) = \sum_{n\geq 1}^{\infty} n a_n z^{n-1} = \sum_{m\geq 0}^{\infty} (m+1) a_{m+1} z^m$$

$m = n-1$
$n = m+1$

Con esto queremos decir que la nueva serie de potencias $\sum_{m\geq 0} (m+1) a_{m+1} z^m$ tiene el mismo radio de convergencia y la función holomorfa definida por su suma es la derivada de la precedente: de $f(z)$.

Obs.: dentro de $D(0,R)$ el término general $(a_n z^n)$ converge a 0; mientras que en el abierto $\{|z|>R\}$ la sucesión $(a_n z^n)$ diverge

¿Cómo calcular R? Hay varias posibilidades:

1) criterio de d'Alembert:

$$\lim_{n\to+\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \frac{1}{R}$$

2) criterio de la raíz enésima:

Obs.: en los 2 casos $\lim = 0$ quiere decir que $R = +\infty$ O sea que la serie converge en todo $\mathbb{C}$. En cambio: $\lim = +\infty$ quiere decir

2) criterio de la raíz enésima:

$$\lim_{n\to+\infty} |a_n|^{1/n} = \frac{1}{R}$$

converge en todo $\mathbb{C}$. En cambio, $\lim = +\infty$ quiere decir que $R=0$. O sea que la serie solo converge para $z=0$

~~Ej. 1~~ Ejemplo:

$$\sum_{n\geq 0} z^n \Rightarrow S_n = \sum_{0}^{n} z^k = \frac{1-z^{n+1}}{1-z} \xrightarrow{?}$$

$(z\neq 1)$

si $|z|<1 \Rightarrow |z|^{n+1} \longrightarrow 0 \Rightarrow S_n \longrightarrow \frac{1}{1-z}$

$z^{n+1} \longrightarrow 0$

$$\Longrightarrow \sum_{n=0}^{\infty} z^n = \frac{1}{1-z} = f(z)$$

En cambio si $|z|>1 \Rightarrow (z^n) \not\longrightarrow 0 \Rightarrow \sum_{n\geq 0} z^n$ diverge

Sobre los reales nos dice que $\sum_{0}^{+\infty} x^n = \frac{1}{1-x} \quad \forall\, -1<x<1$

Sobre los complejos obtenemos que

$$\sum_{n=0}^{\infty} z^n = \frac{1}{1-z} \quad \forall \quad z\in D(0,1)$$

$$R=1 \Longrightarrow a_n = 1 \Longrightarrow \begin{cases} \frac{a_{n+1}}{a_n} = 1 \to 1 \\ |a_n|^{\frac{1}{n}} = 1 \to 1 \end{cases}$$

Fórmula de Hadamard

$$\frac{1}{R} = \overline{\lim_{n\to+\infty}} |a_n|^{\frac{1}{n}} = \max\{\underbrace{\text{pts de acumulación}}_{\text{incluyo } +\infty} \text{ de } (|a_n|^{\frac{1}{n}})\}$$

Ej. 1 Práctico IV

Fórmula de Stirling

$e^n \ll n! \ll n^n$

$¿(n!)^{1/n} \sim \frac{n}{e}?$

2) $a_n = \frac{n^n}{n!} \qquad |a_n|^{\frac{1}{n}} = \frac{n}{(n!)^{1/n}}$

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(n+1)^{n+1}}{(n+1)\cancel{!}} \cdot \frac{\cancel{n!}}{n^n} = \frac{(n+1)^{n+1}}{\cancel{(n+1)}\, n^n} = \frac{(n+1)^n}{n^n} = \left(\frac{n+1}{n}\right)^n$$

$$= \underbrace{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}_{} \longrightarrow e$$

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e^{n\log(1+\frac{1}{n})} \qquad n\log(1+\tfrac{1}{n}) \to 1 \qquad \log(1+\tfrac{1}{n}) \underset{\infty}{\sim} \frac{1}{n}$$

$$\Longrightarrow n\log(1+\tfrac{1}{n}) \longrightarrow 1$$

$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \to e^1 = e$

$$\searrow e^1 = e \qquad \Rightarrow n \log(1+\tfrac{1}{n}) \longrightarrow 1$$

Conclusión: $R = \frac{1}{e}$

1) $a_n = n^{\log n}$ $\quad |a_n|^{\frac{1}{n}} = n^{\frac{\log n}{n}} = e^{\frac{(\log n)^2}{n}} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$ $\quad \frac{(\log n)^2}{n} \to 0$

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(n+1)^{\log(n+1)}}{n^{\log n}} \quad ¿?$$

3) $a_n = \operatorname{sen} n$ $\quad \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\operatorname{sen}(n+1)}{\operatorname{sen} n} = \frac{\operatorname{sen} n . \cos 1}{\operatorname{sen} n} + \frac{\cos n \operatorname{sen} 1}{\operatorname{sen} n} = \cos 1 + \operatorname{sen} 1 / \operatorname{tg} n$

$|a_n|^{\frac{1}{n}} = |\operatorname{sen} n|^{\frac{1}{n}} = e^{\frac{1}{n}\log|\operatorname{sen} n|}$ El problema aquí es que no sabemos controlar la sucesión $a_n = \operatorname{sen} n$

Si $|z|<1$, $\quad a_n z^n = \underbrace{\operatorname{sen} n}\, . \, \underbrace{z^n}_{0} \longrightarrow 0$

Si $|z|>1$ $\quad a_n z^n = \underbrace{\operatorname{sen} n}\, . \, \underbrace{z^n}_{\infty}$ diverge

También podemos agregar que

si $z=1$ $\quad a_n z^n = \operatorname{sen} n$ ~~diverge~~

Supongamos que sabemos que $(\operatorname{sen} n)$ no converge

Dentro de $D(0,R)$ la serie converge $\Rightarrow$ el término general $(a_n z^n) \to 0$ Por lo tanto $z=1 \notin D(0,R) \Rightarrow R \leq 1$

Por otro lado vimos que $\forall |z|<1$ $\quad (a_n z^n) \to 0 \Rightarrow z \in D(0,R) \Rightarrow 1 \leq R$ $\quad \Rightarrow R = 1$

$$\underbrace{\operatorname{sen} n}_{\text{acotado}} . \underbrace{z^n}_{0}$$

$z = r e^{i\theta}$ $\qquad r = |z| > 0$

$z^n = r^n e^{in\theta} \Rightarrow |z^n| = r^n$

$|z|<1 \iff r<1 \Rightarrow r^n \to 0$

en cambio si $r>1 \Rightarrow r^n \to +\infty$

$r = 1+\varepsilon$ con $\varepsilon>0$

$$r^n = (1+\varepsilon)^n = 1 + \underbrace{n\varepsilon} + \underbrace{\binom{n}{2}\varepsilon^2 + \cdots + \varepsilon^n}_{\geq 0} > 1 + n\varepsilon$$

Según el principio de Arquímedes $(n\varepsilon) \longrightarrow +\infty$