Clase 22

viernes, 10 de junio de 2016 19:20

Desarrollos en series de potencias

$f: \Omega \to \mathbb{C}$ Ω región (abierto y conexo) analítica (o sea con derivada en todos los puntos de Ω)

~~Hk~~ existe una sucesión de funciones analíticas $f_k: \Omega \to \mathbb{C}$

tales que ~~$\forall k$~~ $\forall n$

$$\boxed{f(z) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(z-a) + \frac{f''(a)}{2!}(z-a)^2 + \cdots + \frac{f^{(n-1)}(a)}{(n-1)!}(z-a)^{n-1} + (z-a)^n f_n(z)}$$

Def^n de f_n

$n = 1$

$$f(z) = f(a) + (z-a) f_1(z)$$

$n = 3$

$$\boxed{f(z) = f(a) + \frac{(z-a)}{1!} f'(a) + \frac{(z-a)^2}{2!} f''(a) + (z-a)^3 f_n(z)}$$

$$f_{n-1}(z) = f_{n-1}(a) + (z-a) f_n(z)$$

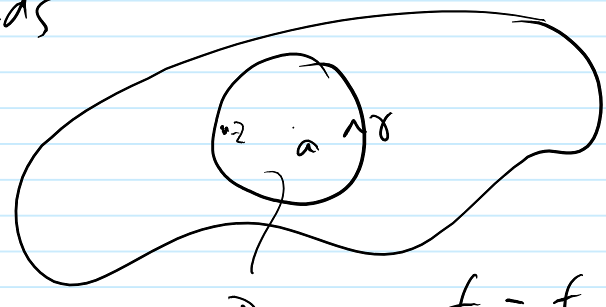
$$e^z = 1 + z + \frac{z^2}{2!} + \cdots + \underbrace{\frac{z^n}{n!} + \frac{z^{n+1}}{(n+1)!} + \cdots}$$

$$\boxed{\frac{z^3}{3!} + \frac{z^4}{4!} + \cdots + \frac{z^n}{n!} \cdots \quad f_3(z) = \left(\frac{1}{3!} + \frac{z}{4!} + \cdots + \frac{z^{n-3}}{n!} + \cdots\right)}$$

$$e^z = 1 + z + \frac{z^2}{2!} + z^3 \underbrace{\left(\frac{1}{3!} + \frac{z}{4!} + \frac{z^2}{5!} + \cdots\right)}_{f_3(z)}$$

$$f_n(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f_n(\zeta)}{\zeta - z}\,d\zeta$$

$f_\zeta(z)$



de la definición de f_n tenemos una expresión que sustituida en esta fórmula obtenemos

$f_0 = f$

$$\boxed{f_n(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f(\zeta)\,d\zeta}{(\zeta-a)^n(\zeta-z)}}$$

$n=0$ $\quad f(z) = \dfrac{1}{2\pi i}\displaystyle\int_\gamma \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\,d\zeta$

R el radio de D la cfa

$$\boxed{|f_n(z)| \le \frac{M}{R^{n-1}(R-|z-a|)}} \qquad \forall z\in D$$

$M = \max$ de f en $\partial D = \gamma =$ la cf de radio R centrado en a

Teorema Si $f : \Omega \to \mathbb{C}$ es analítica y existe $a\in\Omega$: $f(a) = f'(a) = f''(a) = \quad = f^{(n)}(a) = 0 \ \forall n$ $\Longrightarrow f = 0$ en Ω

Dem

Paso 1. Probamos que $f = 0$ en D

Paso 2 " " " en Ω

Paso 1

$z\in D$

① $|f_n(z)| \le \dfrac{M}{R^{n-1}(R-|z-a|)}$

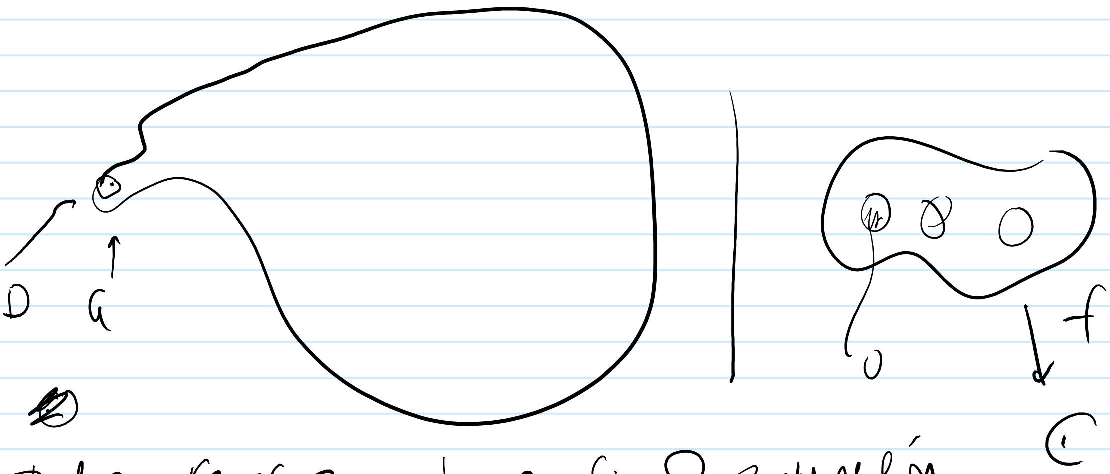
$R^{n-1}(R-|z-a|)$

$$|f(z)| = \| (z-a)^n f_n(z) \| \le \frac{M|z-a|^n}{R^{n-1}(R-|z-a|)}$$

$$|f(z)| \le M \frac{|z-a|^{n-1}}{R^{n-1}} \left(\frac{|z-a|}{R-|z-a|}\right) \qquad |z-a|<R \qquad \frac{|z-a|}{R}<1$$

$\forall n$ — único factor que depende de n

$\Rightarrow |f(z)|=0 \longrightarrow f(z)=0$ f es ~~cero~~ cero en D



Parte 2 ~~...~~ **Lema** Si Ω es una región y $f: \Omega \to \mathbb{C}$ una función analítica y $D \subset \Omega$ es un disco cualquiera ~~...~~ cerrado contenido en Ω. Si $f|_D = 0 \Longrightarrow f = 0$

Esto es consecuencia de que Ω es conexo.

Defn $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ es conexo si no existe un subconjunto $X \subset \Omega$ que sea a la vez abierto y cerrado.

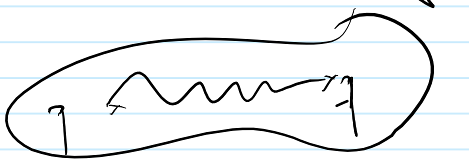
Otra: si no existe $X \subset \Omega$: X sea abierto y $\Omega \setminus X$ sea abierto

Si no existe ~~...~~ X e Y contenidos en Ω (abiertos) $X \cap Y = \emptyset$

• Si no existe X e Y contenidos en Ω : $X \cap Y = \emptyset$ y $X \cup Y = \Omega$

$\boxed{\text{Vale para cualquier espacio topológico}}$

Def: $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ es conexo por caminos si $\forall p, q \in \Omega$ $\exists$ $\gamma : [0,1] \to \Omega$ continua : $\gamma(0) = p$ $\gamma(1) = q$



$\boxed{\text{Vale para cualquier espacio topológico}}$

En espacio topológico cualquier Ω.

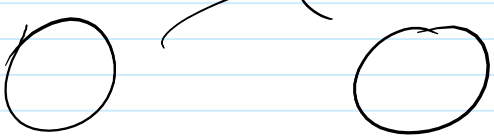
~~Ω conexo $\Rightarrow$ conexo por caminos~~

~~$\Leftarrow$~~

~~Teorema~~

En $\mathbb{R}^2$ por razones particulares conexo y conexo por caminos es lo mismo

$\Omega = D_1 \cup D_2$



D_1 D_2

D_1 disco abierto   disco abierto

Topología métrica

Espacio topológico conexo o no conexo

Ω abierto de $\mathbb{R}^2$

y por lo tanto abierto por definición

$\Omega = \Omega_1 \cup \Omega_2$ donde Ω_1 y Ω_2 son

abiertos y disjuntos

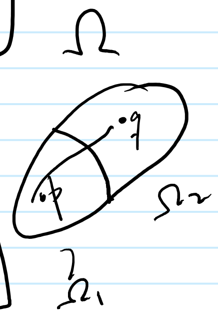
$\downarrow$

¿dónde?

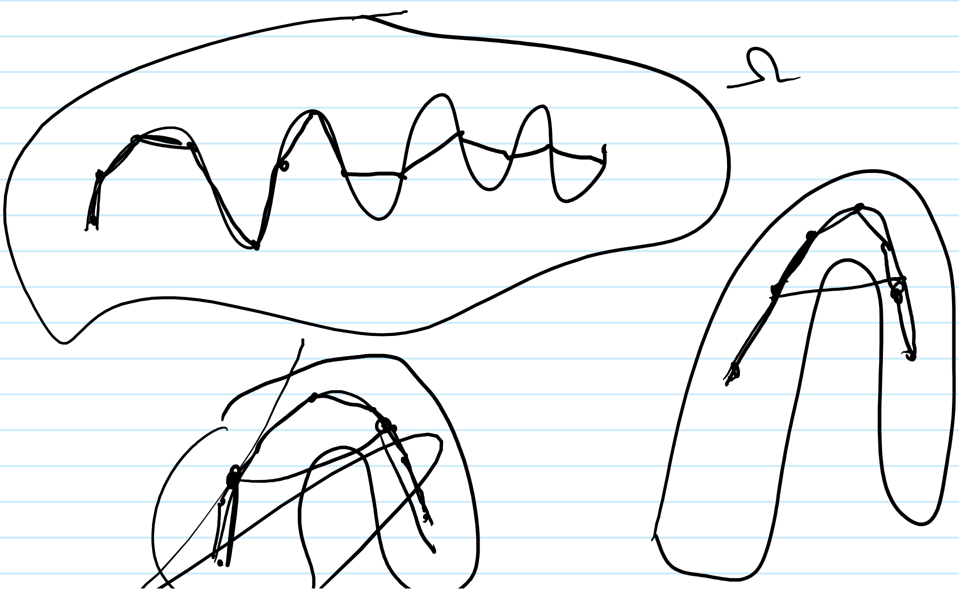
$\boxed{\text{Conexo vs conexo por caminos}}$

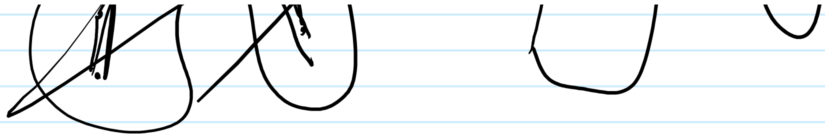
Conexo por caminos $\Longrightarrow$ conexo

Conexo y localmente conexo por caminos $\Longrightarrow$ conexo por caminos

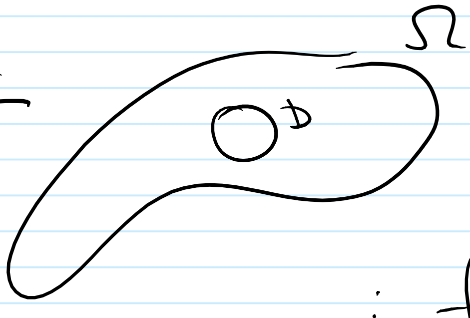


X es localmente conexo por caminos si $\forall x \in X$ existe un entorno del punto $\boxed{x \in U_x}$: U_x es conexo por caminos





Lema



disco

$D \subset \Omega \to$ conexo y abierto

$f : \Omega \to \mathbb{C}$

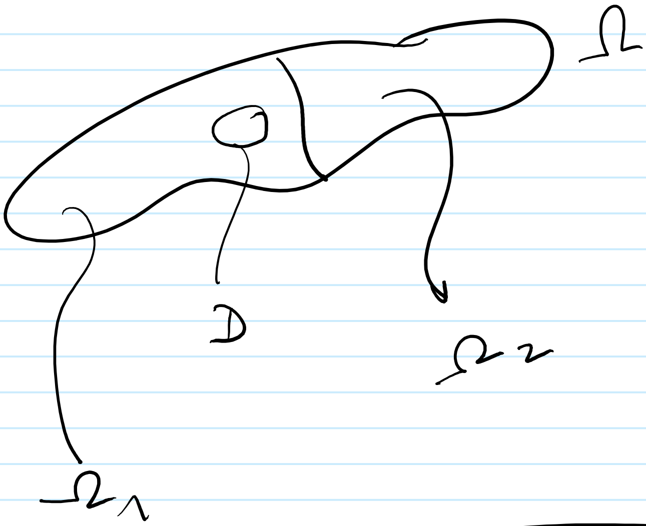
$: f|_D = 0$

$\implies f = 0$

Dem

Sea Ω_1 el conjunto de puntos donde $f(a)=f'(a)=\dots=f^{(n)}(a)=0$ $\forall n$

Ω_2 " " " " " $\exists n : f^{(n)}(a) \neq 0$



Ω es la unión de Ω_1 y Ω_2 ambos disjuntos

$\boxed{\text{Queremos probar que } \Omega_1 \text{ y } \Omega_2 \text{ son abiertos}}$

$\boxed{\Omega_2 \text{ es abierto por continuidad}}$

continua

"El conjunto de puntos donde una función es no nula ~~[illegible]~~ es abierto"

$\boxed{\text{Probaremos que } \Omega_1 \text{ es abierto}}$

El conjunto de puntos de Ω donde todas las derivadas se anulan es abierto

Ω_1 abierto

$a \in \Omega_1$, $f(a)=f'(a)=f''(a)=\dots$

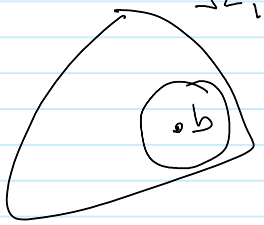
Ω_1 abierto $\qquad a \in \Omega_1 \quad f(a)=f'(a)=f''(a)=\dots=f^{(n)}(a)=0 \quad \forall n \qquad$ abierto

existe un entorno del punto donde la función es cero y todas sus derivadas también.

Ω_1

$$\Omega_1 = \{ a \in \Omega \quad f(a)=f'(a)= \dots = f^{(n)}(a)=0 \}$$

es abierto



$b \in \Omega_1$ queremos probar que $\exists$ un entorno de b que también esté en Ω_1

Sea D un disco de centro b contenido totalmente en la región como en b $f(b)=f'(b)= \dots =0$

f es idénticamente nula en D

$\Rightarrow$ en D siempre que todas las derivadas son cero

$\Rightarrow D \subset \Omega_1$

$$f(x) = \begin{cases} e^{-1/x^2} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases} \quad \text{es } C^\infty$$

$$\frac{e^{-1/x^2}}{x^n} \to 0 \quad x \to 0 \quad \forall n$$

$$f'(x) = e^{-1/x^2}\frac{2}{x^3} \quad x \to 0$$

$f''(x)$

$f^{(n)}(0)=0 \quad \forall n$

$$f(z) = e^{-1/z^2}$$

$$z e^{-1/z^2} \quad \nexists$$

$$e^z = 1 + z + \frac{z^2}{2} + \dots \qquad e^{-1/z^2} = 1 - \frac{1}{z^2} + \frac{1}{z^4 2} \dots$$