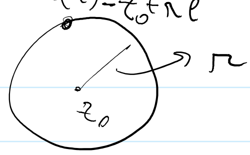
Clase18

viernes, 27 de mayo de 2016 18:53

$\gamma(t) = z_0 + r e^{it}$




Les recuerdo la fórmula de Cauchy

$f(z)$ holomorfa en un disco de centro $z_0$ y $\gamma$ la cfa de centro $z_0$ y radio $r > 0$

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f(\zeta)}{\zeta - z_0} d\zeta \rightsquigarrow \forall n \geq 0 \quad f^{(n)}(z) = \frac{n!}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^{n+1}} d\zeta$$

Supongamos que $z = 0$

$$\frac{1}{n!} f^{(n)}(0) = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f(\zeta)}{\zeta^{n+1}} d\zeta$$

$f(\zeta) \to$ hol en el disco

$\zeta \quad \xi$

Aplicación al ejercicio III - 3)

$e^z - e^{-z} \to$ hol en todo $\mathbb{C}$

$$\int_\gamma \frac{e^z - e^{-z}}{z^{12}} dz = \frac{2\pi i}{11!} f^{(11)}(0) = \frac{2\pi i}{11!} 2 = \frac{4\pi i}{11!}$$

donde $f(z) = e^z - e^{-z} \Rightarrow f^{(11)}(z) = e^z + e^{-z}$

De manera análoga se puede estudiar el ej. III - 4

Ej II - 5 $\quad f(x+iy) = u(x) + i v(y)$ $\quad$ C-R: $\begin{cases} u_y = -v_x \checkmark \\ u_x = v_y \end{cases}$

Por ej.: $f(z) = \lambda z + c = \lambda x + i\lambda y + c \qquad c = \alpha + i\beta$

$f(z) = \lambda x + \alpha + i(\lambda y + \beta) \quad \begin{cases} u = \lambda x + \alpha \\ v = \lambda y + \beta \end{cases} \quad \begin{matrix} u_y = -v_x \checkmark \\ u_x = \lambda \\ v_y = \lambda \end{matrix} \checkmark$

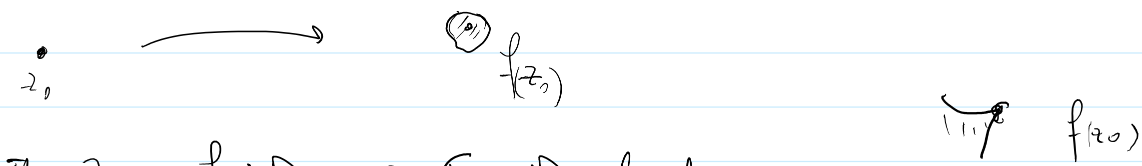
Recíprocamente: supongamos $f$ hol $\Rightarrow$ por lo tanto $\{ \underbrace{u_x}_{} = v_y$ También

Pero $u_x$ depende solo de $x$ mientras que $v_y$ depende solo de $y$

$\Rightarrow u_x$ y $v_y$ son constantes e iguales digamos a $\lambda \in \mathbb{R}$ $\Rightarrow \begin{cases} u = \lambda x + \alpha \\ v = \lambda y + \beta \end{cases}$ ✓

$$f(x+iy) = \lambda x + \alpha + i(\lambda y + \beta) = \lambda z + \underbrace{\alpha + i\beta}_{= c \in \mathbb{C}}$$

(Principio del módulo máximo) f hol en un entorno de $z_0$




Ej: II - 7 $\quad f : D \longrightarrow \mathbb{C}$ $\quad D$ abierto conexo

$\forall z \in D \quad f(z) \in \mathbb{R} \iff \forall z = x+iy \in D \quad \operatorname{Im} f = v(x,y) = 0$

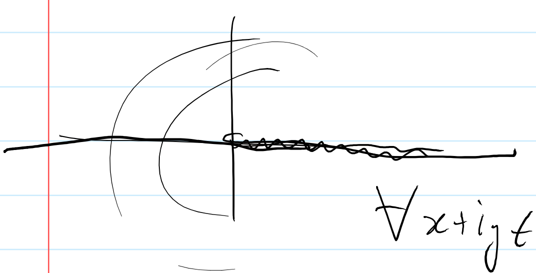
$\Rightarrow u_x = v_y = 0 \quad | \quad u_y = -v_x = 0 \Rightarrow u$ es localmente constante (o sea: es constante en cada "pedazo" de $D$)

¿primitiva de $\frac{1}{x}$? $\Rightarrow$ ¿$\ln|x|$? o $\begin{cases} \ln x + c & \text{si } x > 0 \\ \ln(-x) + d & \text{si } x < 0 \end{cases}$

con $c, d \in \mathbb{R}$ $\quad$ Hay 2 comp conexas en $\mathbb{R}^*$

$z = re^{i\theta}$ $\quad 0 < \theta < 2\pi$ $\longmapsto \sqrt{r}\, e^{i\frac{\theta}{2}}$

$r > 0$



Finalmente, como $D$ es conexo $u$ es constante en todo $D$: $\exists \lambda \in \mathbb{R} /$

$\forall x+iy \in D \Rightarrow f(x+iy) = \lambda$

Ej: $a \in \mathbb{R}$ $\quad f(z) = \left(\frac{1}{z} + \frac{a}{z^3}\right) e^z = F'(z)$ con $F$ hol en $\mathbb{C}^*$

~~FFFF~~ $\quad F = U + iV \Rightarrow F' = f$, $\begin{cases} \boxed{F' = U_x + iV_x = V_y - iU_y} \\ f = u + iv \end{cases}$

~~FFFFFF~~ $\quad F = U + iV \Rightarrow F' = f \quad \left\{ \begin{array}{l} \boxed{f = U_x + iV_x = V_y - iU_y} \\ f = u + iv \end{array} \right.$

$f = u + iv$

Por lo tanto $\left\{ \begin{array}{l} u = U_x \Rightarrow U_y = -V_x = -v \\ v = V_x \end{array} \right.$

$z = x+iy \qquad e^z = e^x \cdot e^{iy} = \cos y \cdot e^x + i \operatorname{sen} y \, e^x$

$\frac{1}{z} = \frac{1}{(x+iy)} \cdot \frac{(x-iy)}{(x-iy)} = \frac{x-iy}{x^2+y^2} = \frac{x}{x^2+y^2} - i\frac{y}{x^2+y^2}$ $\qquad$ muy largo

Verifiquemos que $U_{xy} = U_{yx}$ al menos: $\quad U_{xy} = \frac{\partial}{\partial x}(-v) = -v_x$

$$\| $$

$$U_{yx} = \frac{\partial}{\partial y}(u) = u_y$$

Recordemos la regla de Barrow: Sea $\gamma : [a,b] \longrightarrow \mathbb{C}$ y $F$ definida (continua, hol.) al menos en un entorno de $\gamma([a,b])$. Entonces

$$\int_\gamma F'(z)\,dz = F(\gamma(b)) - F(\gamma(a)) \quad \text{porque por definición}$$

$$= \int_a^b \underbrace{F'(\gamma(t))\gamma'(t)}_{\| \atop \frac{d}{dt}(F(\gamma(t)))} dt$$

$\Rightarrow$ en particular si $\gamma$ es una curva cerrada $\quad \int_\gamma F'(z)\,dz = \int_\gamma f(z)\,dz = 0$

Por ej.: $\displaystyle\int_{\odot} \left(\frac{1}{z} + \frac{a}{z^3}\right) e^z \, dz$

$\odot \to$ cfa de radio 1 y centro 0

$$\left\{ \begin{array}{l} \displaystyle\int_{\odot} \frac{e^z}{z}\,dz = \frac{1}{2\pi i} = \frac{-i}{2\pi} \\[2em] \displaystyle\int_{\odot} \frac{e^z}{z^3}\,dz = \frac{2\pi i}{2!}(e^z)''\Big|_{z=0} = \pi i \end{array} \right.$$

$$\frac{2\pi i}{n!} f^{(n)}(0) = \int_{\odot} \frac{f(z)}{z^{n+1}} dz \longrightarrow \text{ O sea que } a \text{ satisface:}$$

$$0 = \int_{\odot} \left(\frac{1}{z} + \frac{a}{z^3}\right) e^z dz = \int_{\odot} \frac{e^z}{z} dz + a \int_{\odot} \frac{e^z}{z^3} dz = \frac{-i}{2\pi} + a\pi i$$

$$\Rightarrow a\pi = \frac{1}{2\pi} \Rightarrow a = \frac{1}{2\pi^2}$$

Teorema Fund del Análisis: Sea $f(x)$ definida y continua en $[a, b]$ $\Rightarrow$ existe una única primitiva de $f(x)$ (que se anula en $a$) y es:

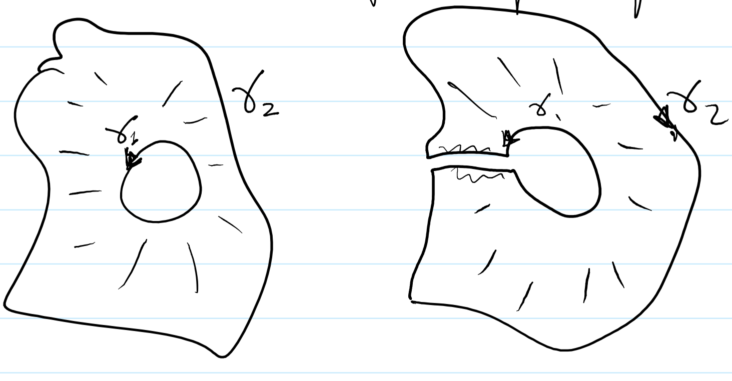
$$F(x) = \int_a^x f(t) dt$$

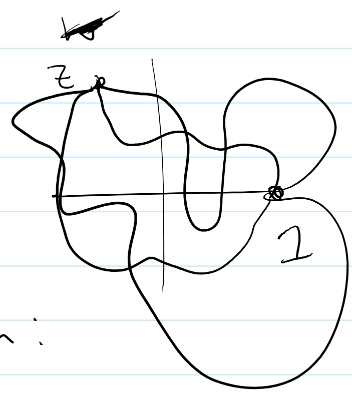
En variable compleja: $f(z) = \frac{1}{z}$ no tiene primitiva en $\mathbb{C}^*$

Si existiera $\int_{\odot} \frac{1}{z} dz$ tendría que valer 0 y eso no ocurre

En cambio $f(z) = \left(\frac{1}{z} + \frac{1}{2\pi^2 z^3}\right) e^z$ satisface la propiedad

que $\forall$ curva cerrada $\gamma$ que no pasa por el origen, $\int_\gamma f(z) dz = 0$




Esto me permite definir una función:

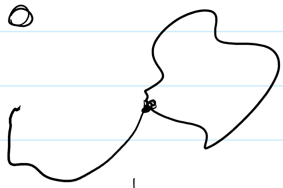
$$\forall z \in \mathbb{C}^* \quad F(z) = \int_{1 \rightsquigarrow z} f(w) dw = \int_1^z f(w) dw$$

$z \longrightarrow z+h$

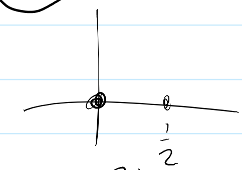
$$\frac{F(z+h)-F(z)}{h} = \frac{1}{h}\int_{z\,\longmapsto\, z+h} f(w)\,dw \xrightarrow[h\to 0]{} f(z)$$

Ejercicio III - 10   $\cancel{\varphi(\ )} = \varphi\left(-\frac{\pi}{2}\right) = \underbrace{\cos^2\left(\frac{\pi}{2}\right)} e^{-i\frac{\pi}{2}} = 0$

$\varphi\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$



La curva $\varphi$ es cerrada y no pasa por $\frac{1}{2}$



$\varphi(t) = \cos^2 t\,(\cos t + i \,\mathrm{sen}\, t) \overset{?}{=} \frac{1}{2} \iff \begin{cases} \cos^2 t \cdot \cos t = \frac{1}{2} \\ \cos^2 t \cdot \mathrm{sen}\, t = 0 \end{cases}$ $\Rightarrow \cos^2 t \neq 0 \Rightarrow \mathrm{sen}\, t = 0 \Rightarrow t = 0 \Rightarrow \cos^2 t \cdot \cos t = 1 \Rightarrow$ contrad.

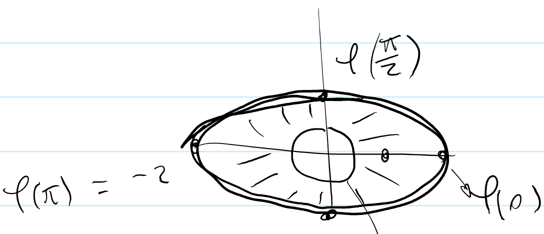
$-\frac{\pi}{2} \leq t \leq \frac{\pi}{2}$

todo bien $\varphi(t) \neq \frac{1}{2}\ \forall t \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$

ej. III 11   $\varphi : [0, 2\pi] \longrightarrow \mathbb{C}$   $\varphi(t) = \underbrace{2\cos t}_{x} + i\,\underbrace{\mathrm{sen}\, t}_{y} \neq 0$

$\frac{1}{4}x^2 + y^2 = 1 \Rightarrow$ elipse ......

$$n(\varphi, 0) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\varphi} \frac{dz}{z} = \frac{1}{2\pi i}\int_{\bigcirc} \frac{dz}{z} = 1$$




$\gamma$ cfa de centro 0 y radio $\frac{1}{2}$