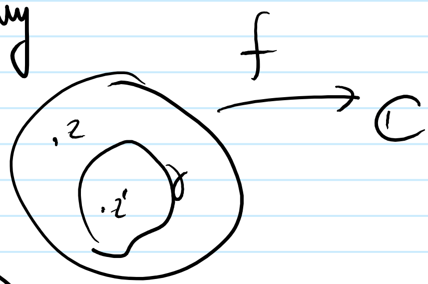
Clase17

jueves, 26 de mayo de 2016 20:30

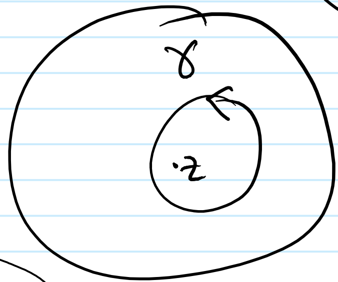
Aplicaciones de la fórmula integral de Cauchy

$$n(\gamma,z)\, f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta$$



γ simple

γ es una ~~...~~ circunferencia



z en el interior de γ

$$\boxed{f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta}\quad \gamma \text{ cfa}$$

f analítica en D

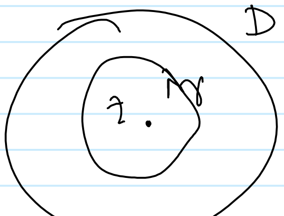
$\forall n \geq 1$

$$f^{(n)}(z) = \frac{n!}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^{n+1}}\, d\zeta \quad (*)$$

$$\cancel{f^{(n)}(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f^{(n+1)}(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta}$$

$$(*)\quad f^{(n)}(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f^{(n)}(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta$$

Acotación de Cauchy



$$\gamma(t) = z + re^{it} \longleftrightarrow |\gamma(t) - z| = r$$

$0 \leq t \leq 2\pi$

$\zeta = \gamma(t)$

$\zeta - z = re^{it}$

(**)

γ cfa de radio r

$$f^{(n)}(z) = \frac{n!}{2\pi i}\int_0^{2\pi} \frac{f(z+re^{it})}{(re^{it})^{n+1}}\, \gamma'(t)\, dt \qquad d\zeta = \gamma'(t)\, dt = rie^{it}$$

$$f^{(n)}(z) = \frac{n!}{2\pi \cancel{i}}\int_0^{2\pi} \frac{f(z+re^{it})}{r^{n+1} e^{i(n+1)t}}\, r\cancel{i}e^{it}\, dt$$

$$f^{(n)} \quad n! \quad \int^{2\pi} f(z+re^{it})\, e^{-int}\, dt$$

$$f^{(n)}(z) = \frac{n!}{2\pi r^n} \int_0^{2\pi} f(z+re^{it})\, e^{-int}\, dt$$

$$\boxed{f^{(n)}(z) = \frac{n!}{2\pi r^n} \int_0^{2\pi} f(z+re^{it})\, e^{-int}\, dt}$$

$n = 0$

$$\boxed{f(z) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(z+re^{it})\, dt}$$

Fórmula del promedio

$$\boxed{f(z) = \frac{1}{2\pi r} \int_0^{2\pi} f(z+re^{it})\, e^{-it}\, dt}$$

$$\cancel{f^{(n)}(z) = \frac{n!}{2\pi r^n} \int_0^{2\pi} f(z+re^{it})}$$

$$\sup_{\gamma} |f(z)| = M(r)$$

$$f^{(n)}(z) = \frac{n!}{2\pi r^n} \int_0^{2\pi} f(z+re^{it})\, e^{-int}\, dt$$

$$|f^{(n)}(z)| \leq \frac{n!}{2\pi r^n} \left| \int_0^{2\pi} f(z+re^{it})\, e^{-int}\, dt \right|$$

$$\leq \frac{n!}{2\pi r^n} \int_0^{2\pi} |f(z+re^{it})|\, dt \leq \frac{n!}{2\pi r^n} \int_0^{2\pi} M(r)\, dt$$

$$= \frac{n!}{2\pi r^n} M(r) \int_0^{2\pi} dt = n!\, M(r)\, r^{-n}$$

$$\boxed{|f^{(n)}(z)| \leq M(r)\, n!\, r^{-n}} \quad \forall n$$

Desigualdad de Cauchy

$$|f'(z)| \leq M(r)/r$$

Teorema de Liouville

Si f es analítica en todo el plano y acotada $\Rightarrow$ es constante

$z \in \mathbb{C}$ — Disco de radio r

M cota uniforme

Aplicamos Cauchy $|f'(z)| \leq \frac{M}{r} \to 0$

$r \to \infty$ $\quad |f'(z)| = 0$

$f'(z) = 0 \quad \forall z \quad \Longrightarrow \quad f$ es constante

Teorema fundamental del álgebra

Todo polinomio $p : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ ~~de g~~ no constante admite una raíz.

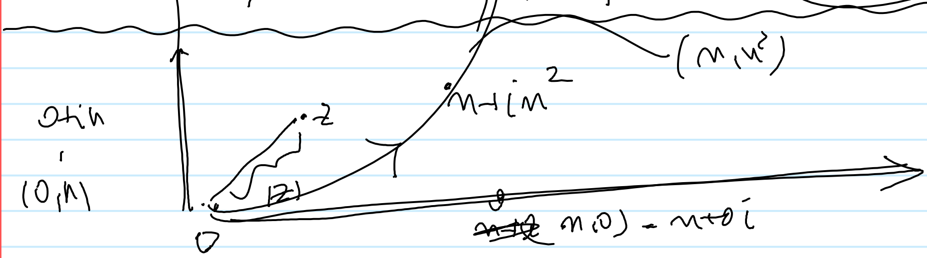
Por absurdo. Supongamos que p es un polinomio de grado ≥ 1 que no tiene raíces.

$f(z) = \frac{1}{p(z)}$ analítica en todo el plano

$p(z)$ $\quad z \to \infty$ $\quad p(z) \to \infty$

$$\boxed{\frac{1}{p(z)} \to 0 \quad (z \to \infty) \quad \Longrightarrow \quad \frac{1}{p(z)} \text{ es acotada}}$$

$\frac{1}{p(z)}$ es acotada y analítica en todo el plano, luego es constante $\Longrightarrow p(z) = cte$ absurdo



$\mathbb{R}$ límite de números reales

$z \to \infty$ abreviado $|z| \to \infty$

reales

$x^2+y^2 \to +\infty$

0

$x_n \to x$ $\quad d(x_n, x) \to 0$

real

~~$f_n \to 0$ acotadas~~

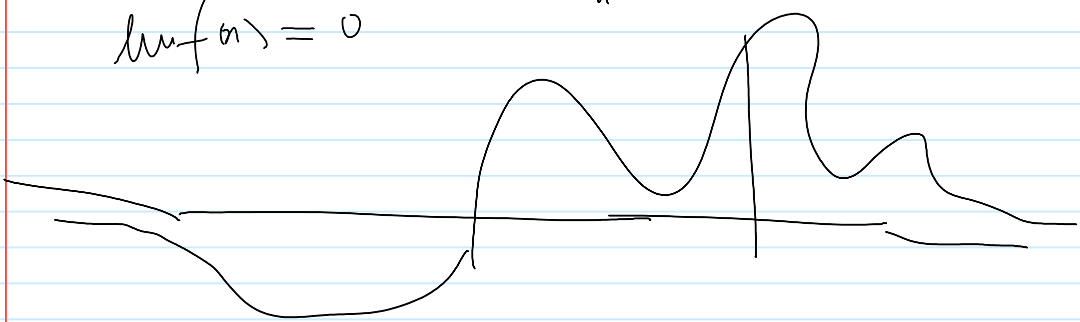
~~$C_n = \sup |f_n|$~~

~~$f_n \to 0 \Rightarrow C_n \to 0$~~

continua

$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $\quad x \to +\infty$, $x \to -\infty$

$\lim f(x) = 0$

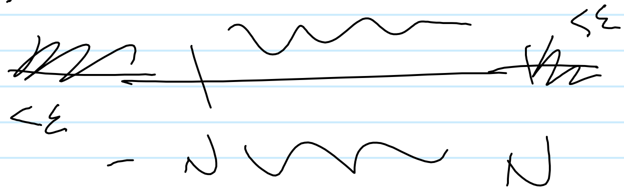


f está acotada

$f \xrightarrow[x \to \infty]{} 0$ dado ε $\exists N$.

$|x| > N$ $\quad |f(x)| < \varepsilon$

$[-N, N]$



$\exists$ Maximo absoluto

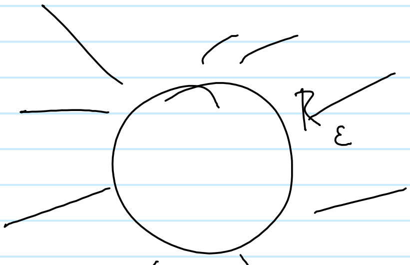
M $-N$ N

f continua de variable compleja y valores complejos.

$|f| \to 0$ $\quad |z| \to \infty$ $\quad \Big| \Longrightarrow$ $|f|$ está acotada

<u>Dem</u> Dado ε $\exists R$.

$|z| > R_\varepsilon$ $\quad |f(z)| < \varepsilon$



Dentro del disco es continua y el disco es compacto $\Longrightarrow$ está acotada.

$\boxed{\text{Cerrado y acotado}}$

$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ✓ continua definida en un intervalo cerrado y acotado tiene un máximo.

$f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ $\quad$ definida en un disco $\quad$ ″

$f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$

$f: \mathbb{C} \to \mathbb{C}$

$\boxed{\text{Morera}}$ $\quad$ f es analítica en Ω $\Longrightarrow$ $\int_\gamma f = 0$

γ curva cerrada

Si $f: \Omega \to \mathbb{C}$ continua definida en una región Ω : $\forall \gamma$ cerrada en Ω $\Longrightarrow$ $\int_\gamma f = 0$

f es analítica

Si f es tal que $\int_\gamma f = 0$ $\Longrightarrow f$ admite una primitiva

$\exists F: \mathbb{C} \to \mathbb{C}$: $F' = f$ $\quad$ ~~f es derivada en~~

$\exists F : \mathbb{C} \to \mathbb{C} : F' = f$ ~~f es la derivada de~~

~~no~~ función F es analítica

luego su derivada es analítica