Clase 15

jueves, 19 de mayo de 2016 20:33

Ej 3 Práctico II $f : D \subset \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$

D conexo (no es reunión de 2 abiertos $\neq \phi$ disjuntos)

a) $f'(z) = 0 \quad \forall z \in D \qquad f(x+iy) = u(x,y) + i v(x,y)$

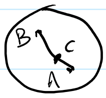
$f'(z) = u_x + i v_x \Rightarrow \begin{cases} u_x \equiv 0 \text{ en todo } D \\ v_x \equiv 0 \quad " \quad " \quad D \end{cases} \xRightarrow{\text{por C-R}} \begin{matrix} u_y \equiv 0 \\ v_y \equiv 0 \end{matrix}$ también

Les recuerdo el Teo. del incremento: $u(B) - u(A) = \overrightarrow{\text{grad}}\, u$

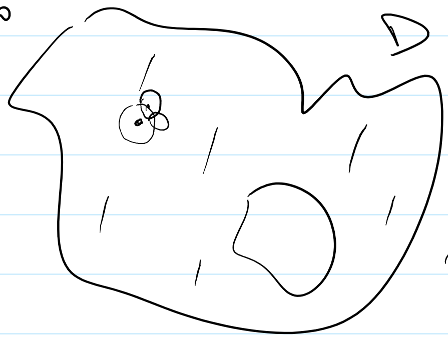
$g(b) - g(a) = g'(c)(b-a) \qquad c \in$ segmento $[a,b]$

$u(B) - u(A) = \overrightarrow{\text{grad}}\, u(C) \cdot (B-A) \qquad C \in$ segmento $[A,B]$

prod. escalar

 $\subset D$ Como $\text{grad}\, u \equiv (0,0)$ en D

concluimos que u es constante en ese pequeño disco



D

digamos $u \equiv c_0$

$\Rightarrow$ el subconj de D donde $u \equiv c_0$ resulta ser un abierto

Si existiera un punto de D donde $u \neq c_0$

$\Rightarrow$ el subconj de D donde $u \not\equiv c_0$ sería otro abierto contenido ($y \neq \phi$) en D. Esto no puede ser cierto ya que D es conexo. Por lo tanto u es constante en todo D. Lo mismo para $v \Rightarrow f$ es const en D

4-a) D conexo $D \subset \mathbb{C}$

$\boxed{v(x,y) = u(x,y)^2} \quad \forall z = x + iy \in D$

Recuerden C-R: $\begin{cases} u_x = v_y \\ u_y = -v_x \end{cases}$

$\begin{cases} v_x = 2u\,u_x = 2u\,v_y \Rightarrow v_x = -4u^2 v_x \\ v_y = 2u\,u_y = -2u\,v_x \end{cases}$ $\boxed{v_x(x,y) = -4u(x,y)^2\, v_x(x,y)}$

Si $v_x(A) \neq 0 \Rightarrow 1 = -4u^2(A)$ ✗

Conclusión: $v_x = 0$ en todo D.

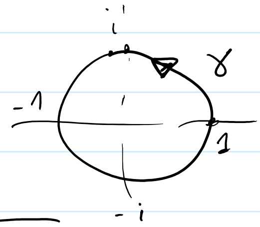
$v_y = 2u\,u_y = -2u\,v_x \Rightarrow v_y = 0$ en todo D

$\Rightarrow 0 = m u_x$ en todo D

Repito el último argumento: si $u_x(A) \neq 0 \Rightarrow u_x \neq 0$ en un entorno de $A \Rightarrow$ allí $u \equiv 0 \Rightarrow u_x \equiv 0$. En resumen: tanto v_x como u_x son nulas en todo D $\Rightarrow$ invocando el ej. precedente obtenemos que $f'(z) = u_x + i v_x = 0$ en todo D $\Rightarrow$ f es constante en todo D.

Práctico III

Ej. 3 $\quad f(z) = \dfrac{e^z - e^{-z}}{z^n}$



$\gamma = \partial D(0,1)$ $\quad$ f no es hol en un entorno de $\overline{D(0,1)}$

$n = 2$

$$e^z = 1 + z + \frac{1}{2}z^2 + \frac{1}{6}z^3 + O(z^4)$$
$$e^{-z} = 1 - z + \frac{1}{2}z^2 - \frac{1}{6}z^3 + O(z^4)$$

$$e^z - e^{-z} = \underbrace{2z + \frac{1}{3}z^3 + O(z^5)}$$

$$\frac{e^z - e^{-z}}{z^2} = \frac{2}{z} + \underbrace{\frac{1}{3}z + O(z^3)}_{\displaystyle = \frac{e^z - e^{-z}}{z^2} - \frac{2}{z}}$$

seguramente hol. fuera del origen.

y en el origen admite el DL: $\frac{1}{3}z + O(z^3)$

En otros términos: $\dfrac{e^z - e^{-z}}{z^2} - \dfrac{2}{z}$ tiene una sing. evitable en $z = 0$

$\Rightarrow$ es hol en todo $\mathbb{C}$

$$\Rightarrow \underbrace{\int_\gamma \left(\frac{e^z - e^{-z}}{z^2} - \frac{2}{z}\right) dz = 0}$$

y entonces obtenemos que $\begin{cases} \gamma'(t) = i e^{it} \\ \gamma(t) = e^{it} \quad t \in [0, 2\pi] \end{cases}$

$$\int_\gamma \frac{e^z - e^{-z}}{z^2} dz = \underbrace{2\int_\gamma \frac{dz}{z}} = 2\int_0^{2\pi} \frac{i e^{it}}{e^{it}} dt = 2i\int_0^{2\pi} dt$$

$$= 2i\pi$$