

PRÁCTICO II

1. Estudiar en qué puntos las siguientes funciones son derivables como funciones complejas (analíticas) y calcular sus derivadas:

$$f(x + iy) := x^2 + iy^2, h(x + iy) := x^2 + 2x - iy, g(x + iy) := 2xy + i(x + \frac{2}{3}y^3).$$

2. Calcular los valores que deben tomar $a, b, c \in \mathbb{R}$ para que f (resp.: g) sea analítica en \mathbb{C} :

$$f(x + iy) := x + ay + i(bx + cy) \text{ y } g(x + iy) = \cos x(\operatorname{ch} y + a \operatorname{sh} y) + i \operatorname{sen} x(\operatorname{ch} y + b \operatorname{sh} y).$$

3. Sea $D \subset \mathbb{C}$ un abierto conexo y $f : D \rightarrow \mathbb{C}$ analítica en D :

- (a) demostrar que si $f'(z) = 0$ para todo $z \in D$, entonces f es constante en D ;
- (b) demostrar que si existe $n \in \mathbb{N}^*$ tal que $f^{n+1}(z) = 0$ para todo $z \in D$, entonces f es un polinomio de grado $\leq n$.

4. Sea $D \subset \mathbb{C}$ un abierto conexo, $f : D \rightarrow \mathbb{C}$ analítica en D y $f(x + iy) = u(x, y) + iv(x, y)$. Probar que f es constante en D si se cumple una de las condiciones siguientes:

- (a) $v(x, y) = u(x, y)^2$ para todo $z = x + iy \in D$;
- (b) $u(x, y)^2 + v(x, y)^2 = cte$ para todo $z = x + iy \in D$;
- (c) existen $a, b \in \mathbb{R}^*$ tales que $au(x, y)^2 + bv(x, y)^2 = cte$ para todo $z = x + iy \in D$.

5. Sea $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ de la forma $f(x + iy) = u(x, y) + iv(x, y)$. Probar que f es analítica en \mathbb{C} si y sólo si existen $\lambda \in \mathbb{R}$ y $c \in \mathbb{C}$ tales que $f(z) = \lambda z + c$ para todo $z \in \mathbb{C}$.

6. Sea D un abierto convexo y $f : D \subset \mathbb{C}$. Demostrar que si f es analítica en D y $\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial x} = 0$ para todo $x + iy \in D$, entonces f es constante en D .

7. Demostrar que una función analítica en un abierto conexo D del plano complejo y cuyos valores son reales, se reduce a una constante.