```
Curso de Introducción al análisis complejo
Primer Semestre 2016
Cure--Universidad de la República
Abril de 2016
```

PRÁCTICO I

1. Escribir en forma cartesiana los siguientes números complejos:

$$(1+2i)^3 \quad , \quad \frac{5}{-3+4i} \quad , \quad (\frac{2+i}{3-2i})^2 \quad , \quad (1+i)^n - (1-i)^n.$$

2. Escribir en forma cartesiana los siguientes números complejos siendo $z = x + iy$:

$$z^4 \quad , \quad \frac{1}{z} \quad , \quad \frac{z-1}{z+1} \quad , \quad \frac{1}{z^2}.$$

3. i) Probar que si $z, w, \lambda \in \mathbb{C}$, entonces $|z - \lambda w|^2 = |z|^2 + |\lambda|^2|w|^2 - 2\operatorname{Re}(\overline{\lambda} z \overline{w})$.

   ii) Probar que si $z_1, \ldots, z_n, w_1, \ldots, w_n$ son números complejos, entonces

$$|\sum z_i w_i|^2 \leq (\sum |z_i|^2)(\sum |w_i|^2).$$

   Pista: Calcular $\sum |z_i - \lambda \overline{w_i}|^2$, luego sustituir $\lambda = \dfrac{\sum z_i w_i}{\sum |w_i|^2}$ y usar que la expresión primera es positiva o nula.

   iii) Usando la expresión de $\sum |z_i - \lambda \overline{w_i}|^2$ calculada anteriormente, probar que vale la igualdad: $|\sum z_i w_i|^2 \leq (\sum |z_i|^2)(\sum |w_i|^2)$, si y solo si existe un complejo u tal que $z_i = u\overline{w_i}$.

   iv) Probar la igualdad de Lagrange:

$$|\sum z_i w_i|^2 = (\sum |z_i|^2)(\sum |w_i|^2) - \sum_{1 \leq i < j \leq n} |z_i \overline{w_j} - z_j \overline{w_i}|^2,$$

   y deducir la desigualdad anterior.

4. Se considera el conjunto $\mathscr{C}$ de las matrices 2×2 con coeficientes reales de la forma:

$$\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}.$$

   Mostrar que el conjunto $\mathscr{C}$ es cerrado con respecto a las operaciones de suma y producto de matrices. Mostrar que $\mathscr{C}$ es un cuerpo isomorfo con $\mathbb{C}$ o sea mostrar que existe una biyección entre ambos que preserva las operaciones. Obs: no es necesario probar que $\mathscr{C}$ es un cuerpo y basta probar que hay una biyección entre los conjuntos que preserva las operaciones de suma producto el cero y el uno.

5. Probar que si $z, w \in \mathbb{C}$ y $|z|, |w| < 1$ entonces $|\dfrac{z-w}{1-\overline{z}w}| < 1$. Probar que si $|z| = 1$ o $|w| = 1$ entonces $|\dfrac{z-w}{1-\overline{z}w}| = 1$. ¿Que sucede si $|z| = |w| = 1$?

6. La fórmula $(\cos x + i \operatorname{sen} x)^n = \cos nx + i \operatorname{sen} nx$ se llama la formula de de Moivre. Usar dicha fórmula para calcular (en terminos de $\operatorname{sen} x$ y $\cos x$): las expresiones de $\cos 3x$, $\cos 4x$, $\operatorname{sen} 5x$, procurando si fuera posible expresarlos sólo en términos ya sea de sen o cos.

7. Los números complejos que para un n dado verifican la ecuación $z^n = 1$ se llaman las raíces enésimas de la unidad.

   i) La raíz enésima de la unidad dada por $\zeta_n = e^{\dfrac{2\pi i}{n}}$ tiene la propiedad que todas las otras raíces enésimas de la unidad son de la forma:

   $$\{1, \zeta_n, \zeta_n^2, \dots, \zeta_n^{n-2}, \zeta_n^{n-1}\}.$$

   ii) Probar que si p es un número natural que no es múltiplo de n entonces $1 + \zeta_n^p + \zeta_n^{2p} + \cdots + \zeta_n^{(n-1)p} = 0$.

   iii) ¿Se puede decir algo semejante sobre el valor de: $1 - \zeta_n^p + \zeta_n^{2p} + \cdots + (-1)^{n-1}\zeta_n^{(n-1)p}$?

8. *Geometría analítica usando complejos*

   i) La ecuación del círculo de centro $a \in \mathbb{C}$ y radio r se escribe como $|z - a|^2 = r^2$.

   ii) Mostrar que la ecuación $|z - a| = |z - b|$, $a, b \in \mathbb{C}$ representa la recta que pasa por el punto medio del segmento ab y es perpendicular a éste.

9. Se definen las funciones trigonométricas complejas como $\operatorname{sen} z = \dfrac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}$; $\cos z = \dfrac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}$.

   i) Probar las fórmulas trigonométricas usuales para esta situación.

   ii) Probar que si z es real, obtenemos las funciones trigonométricas reales¿Que se obtiene si tomamos z imaginario puro? (recordar las definiciones de las funciones trigonométricas hiperbólicas sh, ch).

   iii) Calcular $\operatorname{sen} i$, $\cos i$, $\tan(1 + i)$.

   iv) Usar las formulas de adición para calcular $\operatorname{sen}(x + iy)$ y $\cos(x + iy)$.

   v) Probar que $|\cos z|^2 = \operatorname{sh}^2 y + \cos^2 x = \operatorname{ch}^2 y - \operatorname{sen}^2 x = \dfrac{\operatorname{ch}(2y) + \cos(2x)}{2}$ y que $|\operatorname{sen} z|^2 = \operatorname{sh}^2 y + \operatorname{sen}^2 x = \operatorname{ch}^2 y - \cos^2 x = \dfrac{\operatorname{ch}(2y) - \cos(2x)}{2}$