Clase 1

martes, 29 de marzo de 2016 17:14

Analisis complejo

Recuperar el cálculo usual, dif e integral para funciones complejas

$f: \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$. Crucial que la variable sea complejo

Las definiciones son parecidas pero es muy diferente del real

Es más rígido el conjunto de las funciones analíticas p.e si tienen una derivada continua las tienen todas

$\mathbb{C}$ → espacio vect / $\mathbb{R}$ y es igual a $\mathbb{R}^2$

→ y como espacio topológico también

$$p : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$$
$(x,y) ; (a,b)$

$\mathbb{C}$ z, w, ζ, ξ,

$$p\big((x,y),(x',y')\big) = (xx'-yy', xy'+yx')$$

conmutativa, asociativa, con neutro, tienen inverso, distributiva con respecto a $+$

Conmutativa es claro

Asociativa $p\big(p((x,y),(x',y')),(x'',y'')\big)$

$$= p\big((x,y), p((x',y'),(x'',y''))\big)$$

$(z.w).u = z.(w.u)$ $p \rightsquigarrow \cdot$

$(x,y) \longrightarrow z$ etc

$(1,0) \in \mathbb{R}^2$
$\downarrow$
$\mathbb{C}$ $\quad p\big((1,0),(x',y')\big) = (1.x' - 0y', 0x' + 1.y')$

$= (x', y')$

$\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$
$x \longrightarrow (x,0)$ $\Big\}\ \mathbb{R}^2$ $\quad (rx - 0y, 0x + ry)$ $\quad \parallel$

$\mathbb{C}$ $\mathbb{R}$-espacio vectorial $\quad r\cdot(x,y) = (r,0)(x,y)$
$= (rx, ry)$

$(1,0) \in \mathbb{R}^2 \quad 1_{\mathbb{C}}$ de $\mathbb{C}$

$\cancel{\text{}}$ $(0,1) = i$

$(0,1)\cdot(0,1) = (0.0 - 1.1, 0.1 + 1.0)$ se puede ver

$= (-1,0) = -1_{\mathbb{C}}$

$\boxed{i^2 = -1_{\mathbb{C}}}$ $\quad \boxed{(x,y) = (x,0)(1,0) + (y,0)(0,1)}$

$= (x.1, 0)\cancel{\text{}} + (y.0 - 0.1, y.1 + 0.0)$

$= (x,0) + (0,y) = (x,y)$

Pasando a la notación compleja podemos escribir $\quad (x,y) = x\,1 + y\,i \quad 1_{\mathbb{C}} = (1,0)$

$(x,0)$

$\mathbb{R} \to \mathbb{C}$
$x \longrightarrow (x,0)$

$\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$
$y \longrightarrow (y,0)$

Entonces de ahora en adelante escribimos

$(x,y) = x + yi$ $\quad \Big|\ \begin{array}{l} z = x + yi \\ w = x' + y'i \end{array}$ Dados

para calcular zw operamos con las operaciones usuales y las reglas usuales recordando siempre que $i^2 = -1$ $\quad i^2 = -1$

$(x + yi)(x' + y'i) = xx' + xy'i + yix' + yiy'i$

$= xx' + xy'i + yx'i - yy'$

$= xx' - yy' + (xy' + yx')i = (xx' - yy', xy' + yx')$

$= (x, y)\ (x', y')$

$\mathbb{C}$ $\quad z \cdot (w + w') = z w + z \cdot w'$

$(x+yi)(a+ib+c+id) = $

$(x+yi)((a+c) + i(b+d)) =$

$x(a+c) - y(b+d) + (y(a+c) + x(b+d))i$

$= xa - yb + (ya + xb)i + xc - yd + (yc + xd)i$

$(x+yi)(a+ib) + (x+yi)(c+id)$

$\mathbb{C}$ producto, neutro, suma 0, asociativa, todo elemento tiene opuesto

asociativo, distributivo

completando podremos que

$\forall z \neq 0 \Rightarrow \exists z^{-1}$ ES UN CUERPO

$c: \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ $\quad c(z) = \bar{z}$ $\quad c(x+yi) = x - yi$

T.L/R (T.L = transformación lineal)

$x+yi \xrightarrow{c} x - yi$

$r(x+yi) = rx + ryi \longrightarrow rx - ryi = r(x - yi)$

entonces $c(rz) = r c(z)$ si $x+yi = z$

$c^2 = id$ $\quad x+yi \longrightarrow x - yi \longrightarrow x + yi$

$\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$

$r \longrightarrow (r, 0)$ $\qquad \mathbb{R} = \{ z \in \mathbb{C} : c(z) = z \}$

el conjunto de los puntos fijos de la conjugación compleja es $\mathbb{R}$

Tenemos $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$ $\quad r \longrightarrow (r, 0)$

otra inmersión natural $(0, r)$, $\mathbb{C}$

$r \to (r, 0)$

$r \to (0, r)$

$\to r.i$

$= r.(0,1)$

$\mathbb{R}i \subset \mathbb{C} \supset \mathbb{R}$ dos inmersiones de

$\mathbb{R}$ en $\mathbb{C}$

$\mathbb{R}i = \{ z \in \mathbb{C} : c(z) = -z \}$

$\mathbb{R}$ en $\mathbb{C}$

imaginarios puros

reales

$K_i = \{z \in \mathbb{C} \,.\, c(z) = -z\}$

Otro los puntos fijos de c es $\mathbb{R}$ y los antifijos ($c(z) = -z$) so los imaginarios puros

$c : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ transf lineal $\quad c^2 = id$

$\Rightarrow$ tiene dos valores propios lo más que son 1 y -1

en este caso $\boxed{c(1) = 1}$ $\quad 1$ vector propio con valor propio 1.

$c(i) = -i \quad i$ vector propio con valor propio -1

$c(zw) = c(z)\,c(w)$

$$(x+yi)\cdot(x'+iy') = xx' - yy' + (yx' + xy')i$$

$$\downarrow c \qquad \downarrow \qquad\qquad \downarrow c$$

$$(x-yi)\cdot(x'-y'i) \longrightarrow xx' - yy' - (yx'+xy')i$$

Otra propiedad $\quad z \mapsto z\,c(z) \xrightarrow{\;c\;} c(z\,c(z))$

$$= c(z)\,c(c(z))$$

$$= z\,c(z)$$

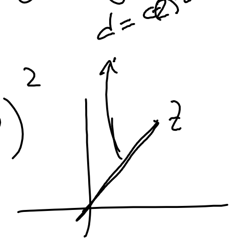
~~$z\,c(z)$ es fijo por c~~

$z\,c(z)$ es fijo por c

real $\quad z\,c(z) =$

$$(x+yi)(x-yi) = x^2 - (y)(-y) + (yx - xy)\,i$$

$$= x^2 + y^2$$



$$z\,c(z) = d^2(0,(x,y)) = (d(0,z))^2$$

$$z\,c(z) = x^2 + y^2 \geq 0$$

$$z\,c(z) = 0 \Longleftrightarrow z = 0$$

$\sqrt{x^2+y^2} = |z| = d(0,z)$ se llama

módulo de z

$$z\, c(z) = |z|^2 \quad \text{si } z \neq 0$$

$$|z| \neq 0$$

$$z\, \frac{c(z)}{|z|^2} = 1$$

$$\Rightarrow \frac{c(z)}{|z|^2} \text{ es el inverso de } z.$$

$z = x+yi$ $\quad z^{-1} = \frac{c(z)}{|z|^2} = \cancel{\frac{x+yi}{\sqrt{x^2+y^2}}}$

$$= \frac{x-yi}{x^2+y^2} = \frac{x}{x^2+y^2} - \frac{y}{x^2+y^2}\, i$$

$$(1+i)^{-1} = \frac{1-i}{2}$$

$\mathbb{C}$ es un cuerpo que $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$

que contiene a $\mathbb{R}$ que también es un cuerpo

$\mathbb{C}$ es una extensión de $\mathbb{R}$ y $\dim_{\mathbb{R}} \mathbb{C} = 2$

Extensión de $\mathbb{R}$ de grado 2

$k \subset K$ grado de K sobre k

$[K:k] = \dim_k K$ notación para la dimensión

Exponencial compleja todas las funciones usuales de $\mathbb{R}$ se definen en $\mathbb{C}$.

$z = x+iy$ $\quad e^z = e^x(\cos y + i \operatorname{sen} y)$

$z = iy$ $\quad \boxed{e^{iy} = \cos y + i \operatorname{sen} y}$

Se define para $\mathbb{R}$ como la exponencial real y para los imaginarios puros a partir de las funciones trigonométricas.

$$e^z = e^x \cdot e^{iy} \qquad z = x+iy$$

$e^z = e^a . e^{iy}$ $\quad z = a + iy$

exponencial real

funciones trigonométricas

ley de los exponentes

$a^x . a^y = a^{x+y}$

Propiedad de los exponentes

$e^{z+w} = e^z . e^w$

Dem

$z = a + iy$

$w = a + ib$

$z + w = (a + a) + (y + b)i$

$e^{z+w} = e^{(a+a)}(\cos(y+b) + i \operatorname{sen}(y+b))$ =

$e^z . e^w = e^a (\cos y + i \operatorname{sen} y) . e^a (\cos b + i \operatorname{sen} b)$

$= e^{a+a} (\cos y + i \operatorname{sen} y)(\cos b + i \operatorname{sen} b)$

$\boxed{\cos(y+b) = \cos y \cos b - \operatorname{sen} y \operatorname{sen} b}$

ley aditiva de cos.

Tenemos que probar la igualdad