Ejercicios parciales años anteriores (2009-2014)

2009

1- Calcular las siguientes integrales:

$$a)\int_3^5 \frac{x^5+x^4-8}{x^3-4x}\,dx \quad b)\int x^2\cos x\,dx \quad c)\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x\,dx}{\sqrt{2\operatorname{sen}x+1}}$$

2- Sea $(a_n)_{n\geq 0}$ tal que: $a_0 = 1 \quad a_{n+1} = \sqrt{4+3a_n}$

Probar que: i) es monótona creciente

ii) está acotada superiormente

iii) Deducir que converge y calcular su límite

3- a) Sea $A_n = a_1 + a_2 + .. + a_n = \frac{2n}{4n+5} \quad \forall n \geq 1$

Clasificar $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ y en caso de convergencia calcular su suma

b) Sea $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{4^n}$

Clasificar la serie y en caso de convergencia calcular su suma. Fundamente

2010

4- Calcular:

$a)\ \int senx.cosx\,dx \qquad b)\int sen^2x\,dx \qquad c)\ \int x^2senx.cosx\,dx$

5- a) Sea: $(a_n)_{n\in N}/\begin{cases} a_0 = 2 \\ a_n = \frac{\sqrt{a_{n-1}}}{2} \end{cases}$

i) Probar que $a_n \geq \frac{1}{4} \quad \forall n \in N$ ii) Probar que $(a_n)\downarrow \quad \forall n \in N$

iii) Fundamentar que $\exists\ lim a_n$ y hallarlo.

b) $Sea\ \sum_{i=0}^{i=n}\left(\left(\frac{1}{2}\right)^{\alpha}\right)^n$ Discutir según α ϵ R la convergencia de la serie. En caso de que la serie sea convergente, calcular su suma.

2011

6- (a) Demostrar que la sucesión cuyo término general es: $a_n = n^2 + (-1)^n n^2$ es no acotada y hallar por lo menos un valor de n / a_n>2000000.

(b) Demostrar que $\lim_n \left(\frac{2n-3}{n+1}\right) = 2$ y hallar $n_0 \in N/a_n \in E_{2,\frac{1}{1000}}\ \forall n \geq n_0$

7- (a) Dada la serie: $\frac{2}{5}+\frac{4}{25}+\frac{8}{125}+\cdots$

i) Hallar las primeras cinco sumas parciales y probar que es convergente.

ii) Hallar la suma de la serie.

(b) Dada la serie: $\sum_{n\geq 1}\frac{1}{(n+1)(n+3)}$

i) Clasificar la serie y en caso de convergencia hallar su suma.

2012

8- Calcular las siguientes integrales:

a) $\displaystyle\int_{e}^{e^2} \frac{1}{x\left(log(x)\right)^2}dx$

b) $\displaystyle\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} e^{2x}\mathrm{sen}(x)dx$

c) $\displaystyle\int \frac{x^2}{(x-1)(x^2+2)}dx$

9- a) Clasifica la serie cuyo término general se da a continuación y en caso de convergencia halla su suma (determina a partir de qué número natural tiene sentido definir la serie): $a_n = \left(\frac{3}{5^n} + \frac{1}{2^n} - \frac{1}{n(n+1)}\right)$

b) Enuncia y demuestra los criterios de clasificación usados en la parte (a)

10- a) Estudia monotonía y acotación de:

$$a_n = \frac{n}{\sqrt{n^2+1}}$$

b) Considera la sucesión cuyo término general es: $x_n = \frac{n}{n^2+1}$

Prueba que el $\lim_n x_n = 0$ y determina cuántos términos de la sucesión quedan fuera del $E^*\left(0, \frac{1}{1000}\right)$.

11- a) Clasifica la siguiente serie y en caso de convergencia acota su suma, discute según $\alpha \in R$:

$$\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^{\left(\frac{\alpha}{3}\right)}}$$

b) Clasifica la serie $\sum_{n\geq 1} \frac{n^n}{n!}$

2013

12- Considera $a_n = \frac{3n^2-2}{2n^2}$ $\forall n \in N^*$

(a) Prueba que el límite de $\lim_n a_n = \frac{3}{2}$

(b) Determina cuántos términos de la sucesión quedan fuera del $E_{\frac{3}{2}, 10^{-4}}$

(c) Estudia monotonía de a_n, justifica tu conjetura.

13- (a) Deduce la clasificación de $\sum_{n\geq 0} q^n$, discutiendo según $q \in R$.

(b) Clasifica $\sum_{n\geq 2}\frac{2}{\sqrt[\alpha]{n^6}}$, discutiendo según $\alpha \in R^*$, acota el valor de su suma en los casos de convergencia.

14- (a) Halla las primitivas de $f(x) = \frac{x^4+x^2-1}{x^4+x^2}$

(b) Calcula: $\int_1^e \frac{L(x^2)}{x^3}dx$

2014

15- Considere la sucesión definida por $a_1 = \sqrt{5}$, $a_n = \sqrt{5 + a_{n-1}}$ para $n \geq 2$

(a) Demuestre que la sucesión está acotada superiormente.

(b) Demuestre que la sucesión es monótona creciente.

(c) Demuestre que la sucesión converge y calcule su límite. Enuncie y demuestre la propiedad usada en la fundamentación.

16- (a) (i) Demuestre que si a es un número real cualquiera y x es un real tal que $|x| < 1$, entonces $\sum_{n\geq 0} a.x^n = \frac{a}{1-x}$

(ii) ¿Qué puede afirmar acerca del comportamiento de la serie anterior si $|x| > 1$ y $a \in R$?

(b)Clasifique las siguientes series

(i) $\sum_{n\geq 1}\frac{2n-1}{(\sqrt{2})^n}$ (ii) $\sum_{n\geq 1}\frac{n^2+1}{n^3}$ (iii) $\sum_{n\geq 1}\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^{n+3}$

17- Determinar (si existen) una función $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ y una constante $c \in [0,2\pi]$ tales que $\int_c^{x^2} f(t)dt = sen(x^2) - 1$

(b) Sean $F(x) = arctg(x) - \frac{x}{x^2+1}$ y $G(x) = \int_{1/2}^{\frac{x^2}{x^2+1}} \sqrt{\frac{t}{1-t}}dt.$

(i) Muestre que F y G son primitivas de $f(x) = \frac{2x^2}{(x^2+1)^2}$

(ii) Sin calcular la integral, determine todas las funciones G. Fundamente enunciando y demostrando la propiedad usada.

(ii) Demuestre que existe un $x_0 \in (0,1)$ tal que $f(x_0) = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}$

(c) Determine $\int \frac{dx}{(x-2)\sqrt{x+2}}$