Modulación y Procesamiento de Señales
Examen Julio 2016

Tecnólogo en Telecomunicaciones - FING/CURE
Universidad de la República

1 de agosto de 2016

Indicaciones:

- La prueba tiene una duración total de 4 horas.
- Cada hoja entregada debe indicar nombre, número de C.I., y número. La hoja 1 debe indicar además el total de hojas entregadas.
- Se deberá utilizar únicamente un lado de las hojas.
- Cada problema o pregunta se deberá comenzar en una hoja nueva.
- Se evaluará explícitamente la claridad, prolijidad y presentación de las soluciones, desarrollos y justificaciones.
- Pueden utilizarse resultados teóricos del curso sin hacer su deducción siempre que la letra no lo exija explícitamente. Se evaluará la correcta formulación y validez de hipótesis.

Pregunta

(a) Definir linealidad, invariancia en el tiempo y estabilidad BIBO para sistemas de tiempo discreto.

(b) Enunciar la condición necesaria y suficiente de estabilidad BIBO para sistemas lineales invariantes en el tiempo .

(c) Estudiar estabilidad de los siguientes sistemas, donde $x[n]$ es la entrada, $y[n]$ la salida y $h[n]$ es la respuesta al impulso.

(i) $y[n] = x[n] + 2x[n-1] + x[n-2] + 500x[n-3]$

(ii) $y[n] = x[2n+1]$

(iii) Sistema SLIT con $h[n] = \sin(\pi n/3)u[n]$

(d) Enunciar el Teorema de Muestreo

Problema 1

Un Tecnólogo en Telecomunicaciones se enfrenta al problema de filtrar una señal:

$$x(t) = 2\sin(2\pi 100t) + 3\cos(2\pi 200t).$$

(a) Calcular el espectro $X(f)$ de la señal $x(t)$ y bosquejar su módulo.

Para solucionar este problema el Tecnólogo decide muestrear la señal y filtrarla utilizando un filtro digital.

(b) ¿Cuál es la mínima frecuencia de muestreo que debe utilizar?

De ahora en adelante asuma que se trabaja al triple de la frecuencia de muestreo calculada en la parte anterior.

(c) Bosquejar el módulo del espectro $|X(e^{j\omega})|$ de la señal muestreada $x[n]$.

Para filtrar la señal, se decide utilizar un filtro causal con respuesta al impulso $h[n]$ y cuya transformada Z es:

$$H(z) = \frac{\beta z}{z - \alpha}$$

(d) Hallar α y β para que la respuesta en frecuencia $H(e^{j\omega})$ valga 4 en $\omega = 0$ y $\frac{4}{3}$ en $\omega = \pi$

(e) Dibujar el diagrama de ceros y polos del filtro. ¿Es un filtro estable? Justifique.

(f) Encontrar y bosquejar el módulo del espectro $Y(e^{j\omega})$ de la salida del filtro. ¿Qué efecto tiene el filtro sobre la señal?

Para implementar el filtro en la computadora, el Tecnólogo necesita la respuesta al impulso del filtro $h[n]$.

(g) Calcular $h[n]$.

(h) Encontrar la ecuación en recurrencias que relaciona la salida $y[n]$ con la entrada $x[n]$.

(i) Dibujar el diagrama de bloques del sistema en forma canónica (mínima cantidad de retardos).

Problema 2

Se desea enviar una señal analógica $x(t)$ utilizando un sistema PCM M-ario. La señal $x(t)$ tiene densidad espectral de potencia $G_x(f) = \frac{1}{W}\Pi\left(\frac{f}{W}\right)$, con $W = 10\,kHz$. El canal cumple las hipótesis habituales, tiene ancho de banda $B_T = 18\,kHz$, produce una atenuación $L = 5$ en potencia e introduce ruido blanco aditivo y gaussiano con densidad espectral de potencia $\eta/2 = 10^{-6}\,W/Hz$.

(a) Dar el diagrama de bloques de un sistema PCM M-ario (transmisor y receptor). Explicar la función de cada uno de los bloques.

(b) Determinar el ancho de banda de la señal $x(t)$ y su potencia S_x.

(c) Calcular el número máximo n de símbolos por palabra de código, que es posible emplear.

(d) Indicar el rango de frecuencias de muestreo válidas del sistema PCM, con n obtenido en la parte anterior.

Asumiendo que el sistema PCM M-ario trabaja en la zona de predominio del error de cuantificación, se requiere que la SNR_D sea superior a $30\,dB$. El cuantificador tiene un factor de escala de $X_m = 1$.

(e) Para n y la mínima frecuencia de muestreo f_s obtenidos, determinar la menor cantidad de niveles de cuantización q necesarios, el mínimo número de símbolos M del código y la cadencia de símbolos r en kbps.

(f) Bosquejar la relación señal a ruido en detección SNR_D, en función de la relación señal a ruido en el recepción SNR_R, para valores de niveles de cuantificación q_1 y q_2 tales que $q_1 > q_2$. Indicar el punto de trabajo óptimo en el caso del sistema propuesto.

Para transmitir por el canal se utiliza señalización polar y pulsos rectangulares.

(g) Indicar el ancho de banda óptimo del filtro receptor para no introducir interferencia intersimbólica.

(h) Calcular la potencia de ruido en recepción N_R.

(i) Calcular la potencia mínima de transmisión S_T^{min} que garantice el predominio del error de cuantificación en detección.

Solución

Pregunta

(a)

(b)

(c)

(i) Se implementa con filtro FIR, entonces es estable.

(ii) Para toda entrada acotada la salida es acotada, entonces estable.

(iii) Nos dan $h[n]$ que caracteriza sistema SLIT. Como $\sum_{n=-\infty}^{+\infty} |h[n]|$ diverge, entonces el sistema no es estable.

(d)

Problema 1

(a)

$$X(f) = j(\delta(f+100) - \delta(f-100)) + \frac{3(\delta(f+200) + \delta(f-200))}{2}$$

(b)

$$f_s^{min} = 2 \times 200Hz = 400Hz$$

(c)

$$f_s = 3 \times 400Hz = 1200Hz$$

La frecuencia $\omega = \pi$ corresponde con $fs/2 = 600Hz$, entonces:

$$x[n] = 2\sin\left(\frac{\pi}{6}t\right) + 3\cos\left(\frac{\pi}{3}t\right).$$

(d)

$$H(e^{j0}) = H(z=1) = \frac{\beta}{1-\alpha} = 4$$

$$H(e^{j\pi}) = H(z=-1) = \frac{\beta}{1+\alpha} = 4/3$$

Entonces: $\alpha = 1/2$ y $\beta = 2$

(e) Si, porque $|\alpha| < 1$.

(f)

$$|H(e^{j0})| = \frac{2}{\sqrt{5/4 - \cos(\omega)}}$$

$$|H(e^{j\pi/6})| = \frac{2}{\sqrt{5/4 - \sqrt{3}/2}} = \frac{4}{\sqrt{5 - 2\sqrt{3}}} \approx 3.22$$

$$|H(e^{j\pi/3})| = \frac{2}{\sqrt{5/4 - 1/2}} = \frac{4}{\sqrt{3}} \approx 2.3$$

(g)

$$h[n] = 2\left(\frac{1}{2}\right)^n u[n]$$

(h)

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{2}{1 - \frac{1}{2}z^{-1}}$$

$$y[n] = \frac{y[n-1]}{2} + 2x[n]$$

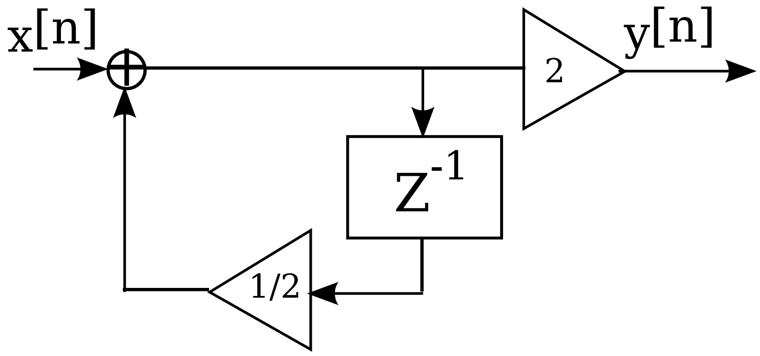
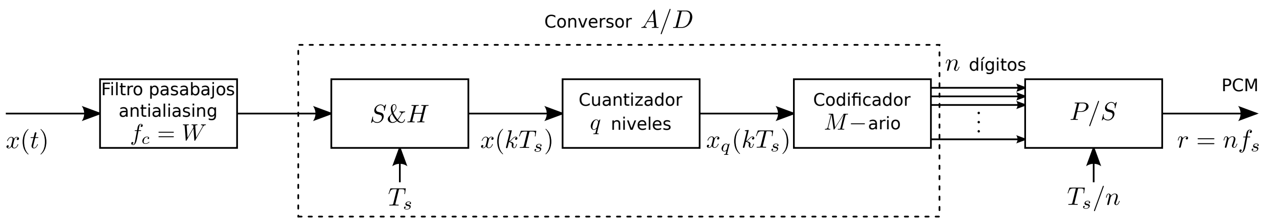


Figura 1: Diagrama de bloques.

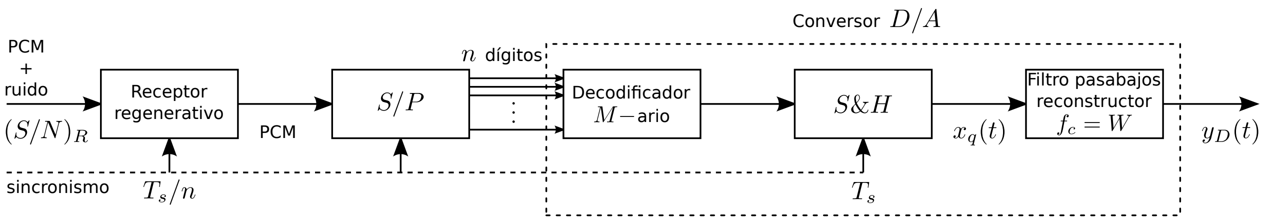
(i)

Problema 2

(a) Transmisor PCM:



Receptor PCM:



Explicación de los bloques: ver teórico.

(b) El ancho de banda de la señal es $W_x = W/2$ y la potencia es $S_x = \int_{-\infty}^{+\infty} G_x(f)df = 1$

(c) Para que no se produzca ISI y el muestreo sea el adecuado, el ancho de banda de transmisión tiene que cumplir que

$$B_T \geq \frac{1}{2}r = \frac{1}{2}nf_s \geq nW_x.$$

Con lo cual se tiene que

$$n \leq \frac{B_T}{W_x} = \frac{2B_T}{W} = \frac{2 \times 18}{10} = 3.6$$

por lo tanto

$$n_{max} = \left\lfloor \frac{2B_T}{W} \right\rfloor = 3$$

donde $\lfloor \cdot \rfloor$ representa la función piso, cuya salida es el entero inmediatamente inferior al argumento.

(d)

$$\frac{2B_T}{n} \geq f_s \geq 2W_x \Longrightarrow 12\,kHz \geq f_s \geq 10\,kHz.$$

Se tienen una frecuencia de muestreo mínima de $f_s^{min} = 10\,kHz$

(e) La relación señal a ruido en un sistema PCM esta dada por

$$\left(\frac{S}{N}\right)_D = \frac{S_x}{X_m^2}\left(\frac{3q^2}{1+4q^2P_e}\right)\frac{f_s}{2W_x}.$$

Como se trabaja sobre el umbral de error, el ruido de cuantización predomina sobre el ruido de decodificación ($P_e \ll 1/4q^2$) resultando en

$$\left(\frac{S}{N}\right)_D = 3q^2 S_x \frac{f_s}{2W_x},$$

Por lo tanto, la cantidad de niveles q del cuantizador para lograr cierto valor SNR_D es

$$q = \left\lceil \sqrt{\frac{\mathrm{SNR}_D}{3S_x}\frac{2W_x}{f_s}} \right\rceil = \left\lceil \sqrt{\frac{10^2 \times 10\,kHz}{3 \times 10\,kHz}} \right\rceil = 19$$

donde $\lceil \cdot \rceil$ representa la función techo, cuya salida es el entero inmediatamente superior al argumento. Luego se tiene que $M^n \geq q$ con lo cual resulta

$$M = \lceil \sqrt[n]{q} \rceil = 3$$

La cadencia de símbolos de la señal PCM es $r = nf_s = 30\,kbps$.

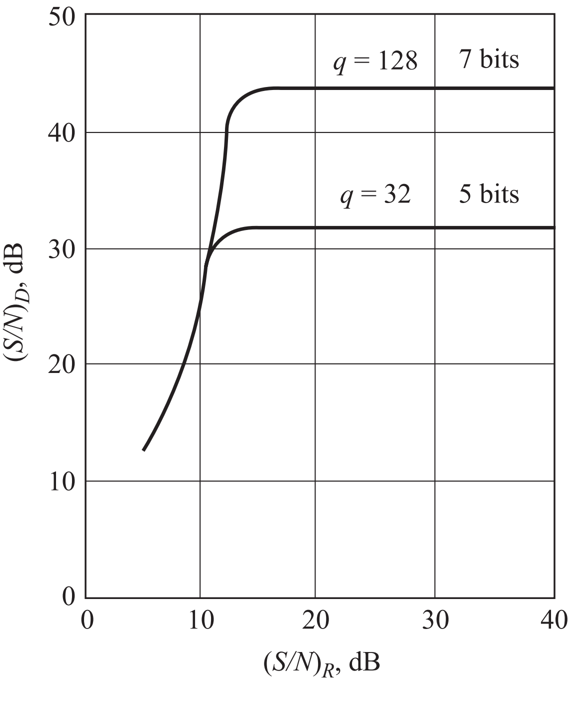
(f) En un sistema PCM deben evitarse los errores de decodificación, ya que alteran la amplitud de la señal en gran magnitud y si ocurren muy frecuentemente, deterioran tanto la forma de onda que el mensaje se hace irreconocible. Los sistemas de comunicación PCM se diseñan para operar en la región donde $P_e \ll 1/4q^2$, es decir, donde el ruido de decodificación es despreciable frente al ruido de cuantización. En la figura de la SNR_D en función de la SNR_R, es la región alrededor del punto de inflexión.

(g) Para no introducir más ruido de lo necesario y no generar ISI el ancho de banda del filtro de recepción debe ser $B_R = B_T$.

(h) $N_R = \int_{-B_R}^{B_R} \eta/2df = \eta B_R = 0.018\,W$

(i) Para trabajar sobre el umbral de error se debe cumplir $SNR_R = \frac{S_T}{LN_R} \geq 6(M^2-1)$ por lo tanto

$$S_T^{min} = 6L\,N_R(M^2-1) = 6 \times 5 \times (0.018\,W) \times 8 = 4.32\,W$$


50
40
30
20
10
0
$q = 128$
7 bits
$q = 32$
5 bits
$(S/N)_D$, dB
0
10
20
30
40
$(S/N)_R$, dB