Modulación y Procesamiento de señales
Examen – Curso 2015

Tecnólogo en Telecomunicaciones - FING/CURE
Universidad de la República

18 de diciembre de 2015

Indicaciones:

- La prueba tiene una duración de 4 horas.
- Cada hoja entregada debe indicar nombre, número de C.I., y número de hoja. La hoja 1 debe indicar además el total de hojas entregadas.
- Se evaluará explícitamente la claridad, prolijidad y presentación de las soluciones, desarrollos y justificaciones.
- Pueden utilizarse resultados teóricos del curso sin hacer su deducción siempre que la letra no lo exija explícitamente. Se evaluará la correcta formulación y validez de las hipótesis.

Pregunta

(a) Definir estabilidad BIBO (entrada acotada - salida acotada) para un sistema en tiempo discreto con entrada x y salida y.

(b) Enunciar la condición necesaria y suficiente de estabilidad BIBO para sistemas lineales invariantes en el tiempo. Demostrar la condición suficiente, justificando detalladamente cada paso.

(c) Dar el diagrama de bloques de un interpolador de orden L indicando todos los parámetros de cada uno de los bloques. Escribir la expresión del espectro resultante.

(d) Graficar el espectro en cada punto, para una entrada $X(e^{j\omega}) = \Lambda\left(\frac{\omega}{2\pi/3}\right)$ y $L = 3$.

Problema 1

Los sistemas de telefonía fija buscan transmitir señales de voz utilizando el menor ancho de banda posible, de tal manera que esta sea inteligible y los interlocutores puedan ser reconocidos. Empíricamente, este ancho de banda está comprendido entre las frecuencias 300 Hz y 3.4 kHz.

(a) Enunciar el teorema de muestreo.

(b) Determinar la menor frecuencia de muestreo f_s a la cual puede trabajar un sistema de telefonía fija.

Debido a la no linealidad de los filtros utilizados, este tipo de sistemas utiliza una frecuencia de muestreo de $f_s = 8\ kHz$. Trabajar con esta frecuencia de muestreo.

Suponer que luego del filtrado, se obtiene el siguiente espectro para una señal de voz $x(t)$ dada:

$$X(f) = (A/f_s)\Lambda\left(\frac{f}{2\ kHz}\right) * \{\delta(f - 2\ kHz) + \delta(f + 2\ kHz)\}$$

(c) Realizar un diagrama de bloques que represente el modelo matemático del proceso de muestreo. Explique brevemente el funcionamiento de cada bloque.

(d) Dar una expresión y realice un bosquejo para el espectro de la señal a la salida de cada bloque. Recordar que la señal a la entrada del filtro no es conocida a priori.

Un tecnólogo en Telecomunicaciones inexperto, concluye que la frecuencia de muestreo utilizada para capturar las señales de voz es muy grande y decide disminuirla a la mitad con el objetivo de liberar memoria en los servidores de una empresa que almacena conversaciones realizadas en el último mes.

(e) Proponer un método para realizar lo propuesto por el Tecnólogo y realizar un diagrama de bloques, explicando brevemente el funcionamiento de cada bloque.

(f) Dar una expresión y realizar un bosquejo del espectro a la salida de cada uno de los bloques del diagrama anterior para el caso de la señal de voz $x(t)$ brindada.

(g) Encontrar la señal reconstruída $x_r(t)$ que se obtendría a partir de un proceso de reconstrucción ideal a la frecuencia $f_s' = f_s/2$ de la señal $x(t)$, si la misma sufre el proceso propuesto por el operario. ¿Que le diría al Tecnólogo respecto de su decisión?

Problema 2

Una señal de voz $x(t)$ de rango dinámico $[-1\,,1]$, ancho de banda W y potencia S_x se transmite mediante un sistema PCM. El sistema usa frecuencia de muestreo $f_s \geq 2W$ y codificación binaria unipolar NRZ con pulso rectangular de amplitud A_T. La probabilidad de transmitir un 1 binario es p.

(a) Dibujar el diagrama de bloques del transmisor y receptor de un sistema PCM binario de q niveles (n bits) con cuantificación uniforme. Explicar el funcionamiento de cada bloque.

(b) Enunciar la condición necesaria para que el desempeño del sistema sea independiente del ruido introducido en el canal de transmisión. Bosquejar la SNR_D en función de la SNR_R, para dos niveles q, indicando el punto de trabajo óptimo. Justificar.

Se desea recibir la señal con al menos una cierta calidad SNR_D dada y utilizar la mínima cantidad posible de bits de codificación.

(c) Indicar cómo determinar los parámetros del sistema (la escala completa X_m, q, n, y el ancho de banda de transmisión B_T) en función de los parámetros conocidos. Explique los criterios de elección de cada uno de ellos.

(d) Calcular y bosquejar el espectro de la señal conformada para una probabilidad p genérica.

(e) ¿El pulso conformador cumple los criterios para que no exista interferencia intersimbólica? ¿Por qué?

(f) ¿Existe algún valor de p que permita anular la componente de continua sin modificar el envio de información? Justifique.

El canal introduce ruido blanco gaussiano con densidad espectral de potencia $\eta/2$ y produce atenuación L en potencia. El ancho de banda de transmisión considerando el ancho de banda del canal y el filtro de recepción es B_T. Se asume que la interferencia intersimbólica es despreciable. Se asume un valor de $p = 1/2$.

(g) Indicar la SNR_R en función de los parámetros conocidos.

(h) Indicar el umbral óptimo de decisión del comparador del receptor. Calcular la probabilidad de error P_e en recepción con el umbral óptimo y el valor de probabilidad de símbolos binarios p indicado en la parte (d). Se asume que el receptor muestrea la señal recibida en los instantes de muestreo óptimos.

(i) Determinar la mínima SNR_R necesaria para que la SNR_D sea independiente del ruido introducido en el canal.

(j) Determinar que relación deben cumplir la amplitud de la señal A_T y la potencia transmitida S_T para trabajar por encima de SNR_{Rmin}, en función de η, B_T y L.

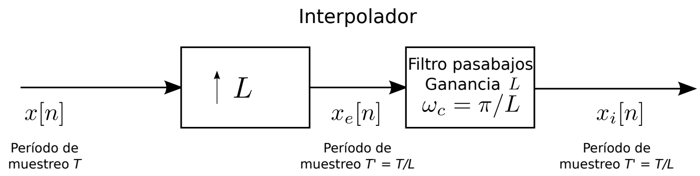
Solución

Pregunta

(a) Ver teorico.

(b) Ver teorico.

(c) Diagrama de bloques del interpolador:



El espectro de la señal interpolada en función del espectro de la señal original es

$$X_e(e^{j\omega}) = X(e^{j\omega L})$$

La transformada de Fourier de la salida del expansor es una versión escalada de la transformada de Fourier de la entrada, es decir, ω es reemplazado por ωL. Esto es una compresión por un factor de L del eje de frecuencia.

Problema 1

(a) Ver Teórico.

(b) La mínima frecuencia de muestreo en este caso es $f_s^{min} = 2{\times}3.4\ kHz = 6.8\ kHz$

(c) Ver Teórico.

(d) Se debe Se debe incluir previo al sistema un filtrado pasabajo con frecuencia de corte $f_s/2$ debido a que las señales entrantes no son a priori conocidas y pueden tener frecuencias fuera del espectro. Estas frecuencias deben ser filtradas para evitar problemas de alliasing. Ver teórico.

(e) Se requiere un bloque decimador digital. Ver teórico.

(f) Ver Teórico.

(g) El espectro de la señal reconstruida es:

$$X_r(f) = 2(A/f_s)\Pi(f/2\ kHz)$$

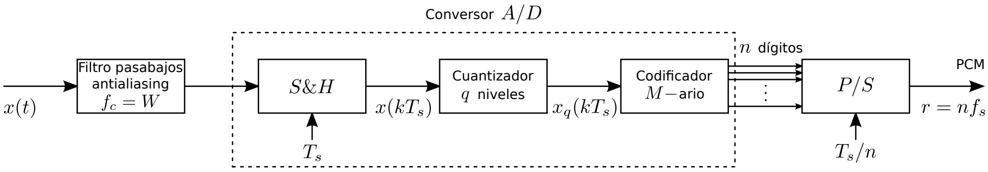
Mientras que la señal reconstruida es:

$$x_r(t) = \mathbb{F}^{-1}\left\{X_r(f)\right\} = 2(A/f_s)(2\ kHz)sinc\left((2\ kHz).t)\right) = (A/2)sinc\left((2\ kHz).t)\right)$$

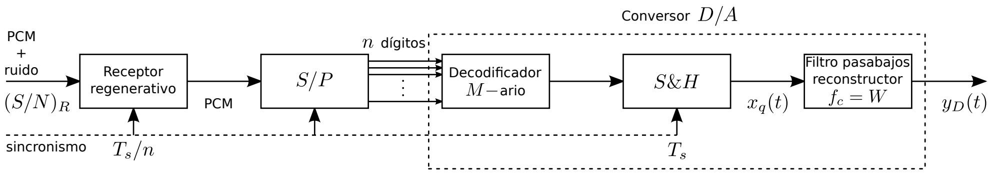
La decisión de decimar no fue correcta debido a que generó el problema de alliasing.

Problema 2

(a) Transmisor PCM:



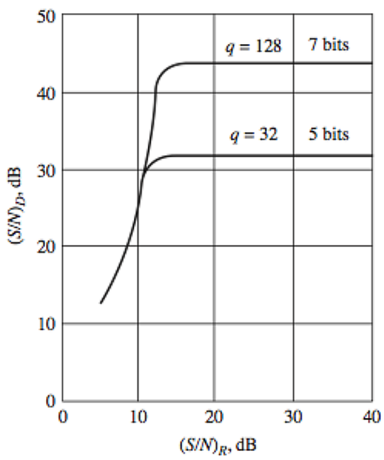
Receptor PCM:



Explicación de los bloques: ver teórico.

(b) Para que el sistema trabaje sobre el umbral óptimo, el ruido de cuantificación debe predominar frente al ruido de decodificación.

$$\sigma_q^2 >> \sigma_d^2$$



Noise performance of PCM for different quantization levels.

Se trabaja en el codo de la curva cuando la SNR_D es constante. En esta zona se tiene menor potencia de transmisión y la misma SNR_D que con potencias de transmisión mayores (para las cuales no aumenta la SNR_D).

(c) Cómo la señal a transmitir tiene rango dinámico entre $[-1, 1]$, el cuantizador debe tener una escala completa de $X_m = 1$.
Por otro lado, la relación señal a ruido en un sistema PCM esta dada por

$$\left(\frac{S}{N}\right)_D = \frac{S_x}{X_m^2}\left(\frac{3q^2}{1+4q^2P_e}\right)\frac{f_s}{2W}.$$

Como se trabaja sobre el umbral de error, el ruido de cuantización predomina sobre el ruido de decodificación ($P_e \ll 1/4q^2$) resultando en

$$\left(\frac{S}{N}\right)_D = \frac{S_x}{X_m^2} 3q^2 \frac{f_s}{2W}.$$

Despejando, la cantidad de niveles q del cuantizador para lograr cierta SNR_D deseada es

$$q = \left\lceil X_m \sqrt{\frac{\mathrm{SNR}_D}{3S_x} \frac{2W}{f_s}} \right\rceil,$$

donde $\lceil \cdot \rceil$ representa la función techo, cuya salida es el entero inmediatamente superior al argumento.
La cantidad n de dígitos binarios necesaria para representar q niveles de cuantización es

$$2^n \geq q \quad \Longleftrightarrow \quad n \geq \log_2 q$$

y por lo tanto, la cantidad de dígitos del cuantizador es

$$n = \left\lceil \log_2 X_m \sqrt{\frac{\mathrm{SNR}_D}{3S_x} \frac{2W}{f_s}} \right\rceil.$$

La cadencia de símbolos de la señal PCM es $r = nf_s$. El ancho de banda mínimo para poder transmitir está establecido por el teorema de señalización de Nyquist, y es

$$B_T \geq \frac{1}{2} r = \frac{1}{2} n f_s$$

(d) La densidad espectral de potencia de la señal PCM de la forma

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k p(t - kD), \qquad \text{con } D = 1/r$$

es

$$G_x(f) = \sigma_a^2 r |P(f)|^2 + (\mu_a r)^2 \sum_{k=-\infty}^{\infty} |P(kr)|^2 \delta\left(f - kr\right). \tag{1}$$

En este caso, el código de línea es unipolar sin retorno a cero, por lo que el pulso conformador es

$$p(t) = \Pi\left(\frac{t}{D}\right)$$

que tiene transformada de Fourier

$$P(f) = D \operatorname{sinc} fD = \frac{1}{r} \operatorname{sinc} \frac{f}{r}. \tag{2}$$

Sustituyendo este resultado en la ecuación 2, la densidad espectral de potencia queda

$$G_x(f) = \frac{\sigma_a^2}{r} \operatorname{sinc}^2 \frac{f}{r} + \mu_a^2 \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta\left(f - kr\right) \operatorname{sinc}^2 k \tag{3}$$

y como con k entero,

$$\operatorname{sinc} k = \begin{cases} 1 & \text{si } k = 0 \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

la densidad espectral de potencia se reduce a

$$G_x(f) = \frac{\sigma_a^2}{r} \operatorname{sinc}^2 \frac{f}{r} + \mu_a^2 \delta\left(f\right) \tag{4}$$

Falta calcular μ_a y σ_a^2. La probabilidad de los símbolos $a_k = A_T,\ 0$ es p y $(1-p)$ respectivamente. La media de a_k es por lo tanto

$$\mu_a = E\{a_k\} = A_T p - 0(1-p) = A_T p, \tag{5}$$

y la varianza es

$$\sigma_a^2 = E\{a_k^2\} - \mu_a^2.$$

Como

$$E\{a_k^2\} = A_T^2 p + (-0)^2(1-p) = A_T^2 p,$$

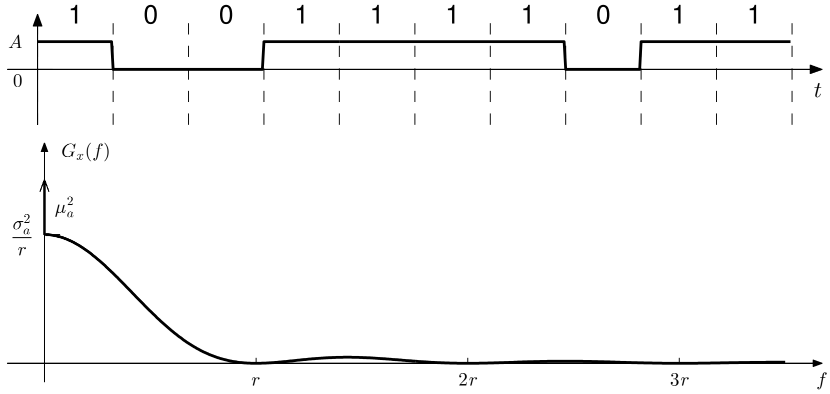
la varianza queda

$$\sigma_a^2 = A_T^2 p - (A_T p)^2 = A_T^2 p(1-p) \tag{6}$$

Sustituyendo las ecuaciones 5 y 6 en la ecuación 4 se obtiene el resultado buscado,

$$G_x(f) = A_T^2 p(1-p)\frac{1}{r}\operatorname{sinc}^2\frac{f}{r} + (A_T p)^2\delta(f)$$

En la siguiente figura se grafica la densidad espectral de potencia con $A_T = 1$, $r = 1$ y $p = 0.3$.



(f) La señal PCM tiene un componente de continua $\mu_a = pA$. Este nivel de continua se manifiesta en el espectro mediante la delta en continua y como no lleva información, significa un desperdicio de potencia. Para evitarlo, se tendría que hacer $p = 0$, pero esto implica que no se estaría enviando información pues siempre se transmitiría un 0 binario con probabilidad $(1-p) = 1$. Por lo tanto no se puede anular la componente de continua sin dejar de enviar información en el caso de codificación unipolar.

(g) Teniendo en cuenta que $p = 1/2$ y se usa codificación con pulso rectangular unipolar NRZ con amplitud A_T, la potencia de la señal transmitida es

$$S_T = A_T^2/2,$$

y como el canal produce atenuación L en potencia, la potencia de la señal recibida es

$$S_R = \frac{S_T}{L} = \frac{A_T^2}{2L}.$$

La potencia del ruido en predetección es

$$N_R = \eta B_T.$$

Por lo tanto, la SNR_R es

$$SNR_R = \frac{S_R}{N_R} = \frac{A_T^2}{2\eta B_T L}.$$

(h) Por tratarse de un código unipolar con símbolos equiprobables, el umbral de decisión óptimo es $V_{\text{opt}} = A/2$ y con ese umbral, la probabilidad de error es

$$P_e = Q\left(\sqrt{SNR_R/2}\right)$$

(i) Para que la SNR_D sea independiente del ruido introducido en el canal, el único ruido relevante debe ser el de cuantificación. Para que esto ocurra un criterio razonable es pedir que $P_e \leq 10^{-5}$. Con la probabilidad de error calculada en la parte anterior resulta:

$$P_e = Q\left(\sqrt{SNR_R/2}\right) \leq 10^{-5}$$

Entonces

$$\sqrt{SNR_R/2} \geq 4.3$$

Por lo que el valor de la SNR_{Rmin} es

$$SNR_{Rmin} = 2(4.3)^2 \approx 37$$

(j)

$$SNR_R = \frac{S_R}{N_R} = \frac{A_T^2}{2\eta B_T L}.$$

Entonces

$$A_T = \sqrt{SNR_R 2\eta B_T L} \geq 8.6\sqrt{\eta B_T L}$$

y

$$S_T = A_T^2/2 \geq (8.6)^2\eta B_T L/2$$