Modulación y Procesamiento de señales
Examen – Curso 2014

Tecnólogo en Telecomunicaciones - FING/CURE
Universidad de la República

9 de febrero de 2015

Indicaciones:

- La prueba tiene una duración de 4 horas.
- Cada hoja entregada debe indicar nombre, número de C.I., y número de hoja. La hoja 1 debe indicar además el total de hojas entregadas.
- Se evaluará explícitamente la claridad, prolijidad y presentación de las soluciones, desarrollos y justificaciones.
- Pueden utilizarse resultados teóricos del curso sin hacer su deducción siempre que la letra no lo exija explícitamente. Se evaluará la correcta formulación y validez de las hipótesis.

Pregunta

(a) Definir estabilidad BIBO para un sistema en tiempo discreto con entrada $x[n]$ y salida $y[n]$.

(b) Enunciar y demostrar las condicion suficiente de estabilidad BIBO para sistemas lineales invariantes en el tiempo. Justificar detalladamente cada paso.

(c) Enunciar el teorema del muestreo.

Problema 1

Una señal de voz $x(t)$ con ancho de banda W y potencia S_x conocidos se transmite a través de un sistema PCM. Se muestrea a una frecuencia $f_s \geq 2W$. El transmisor banda base del sistema utiliza una codificación binaria con señalización polar $a_k = \{A, -A\}$ y un pulso conformador rectangular adecuado. La probabilidad de que dicho transmisor reciba un "1" es p. El filtro de recepción tiene ancho de banda $B_R = B_T$ y obtiene muestras en el instante óptimo.

(a) Dibujar el diagrama de bloques del transmisor y receptor de un sistema PCM binario de q niveles (n bits), con cuantificación uniforme. Explicar el funcionamiento de cada bloque.

Se desea recibir la señal con al menos una cierta calidad SNR_D conocida y utilizar la mínima cantidad posible de bits de codificación.

(b) Indique cómo determinar los parámetros de funcionamiento del sistema (q, n, y el ancho de banda de transmisión B_T). Explique los criterios de elección de cada uno de ellos. Asumir que el cuantizador tiene un factor de escala completa $X_m = 1$.

(c) Calcular y bosquejar el espectro de la señal conformada para una probabilidad p genérica.

(d) ¿Qué valor de p permite aprovechar al máximo la potencia de transmisión?. Justifique.

(e) Bosquejar la SNR_D en función de SNR_R indicando la zona de trabajo más adecuada.

Se envía la señal conformada con una amplitud tal que la $\mathrm{SNR}_R = S_R/N_R$ es de 9. Asuma que los dígitos binarios que recibe el transmisor son equiprobables.

(f) ¿Cuál sería el umbral de decisión óptimo en el comparador?

(g) ¿Cuánto valdría la probabilidad de error en recepción P_e?

(h) El sistema propuesto, ¿operaría en la zona de funcionamiento adecuada? Justifique.

Problema 2

Se desea implementar un filtro $h[n]$ SLIT y causal, dado por la ecuación en diferencias,

$$y[n] = kx[n] + (1-k)y[n-1]$$

donde $x[n]$ y $y[n]$ son la entrada y la salida del filtro respectivamente y k una constante real.

(a) Hallar la transformada $\mathcal{Z}$ de la respuesta al impulso $h[n]$, $H(z)$, indicando la región de convergencia del filtro.

(b) Dar un diagrama de bloques que implemente este filtro.

(c) Indicar los posibles valores de k para que el filtro digital $h[n]$ sea estable

(d) Sobre la hipótesis de que k es tal que el sistema es estable, hallar la magnitud al cuadrado de la respuesta en frecuencia del filtro $|H(e^{j\theta})|^2$.

(e) Hallar k para que la ganancia del filtro en frecuencia $\theta = \pi/3$ sea $1/\sqrt{3}$ asegurando que el sistema resultante sea estable.

En lo que sigue, se empleará el valor de k calculado en la parte anterior.

(f) Calcular y esbozar la respuesta al impulso $h[n]$ del sistema.

(g) Dibujar el diagrama de polos y ceros del sistema indicando la región de convergencia. Indicar de que tipo de filtro se trata en cuanto a selectividad de frecuencias.

Fórmulas útiles

- Transformada de Fourier de pulso rectangular de duración τ

$$p(t) = \Pi\left(\frac{t}{\tau}\right) \quad \overset{\mathcal{F}}{\longleftrightarrow} \quad P(f) = \tau \operatorname{sinc} f\tau$$

- Densidad espectral de potencia de señal PAM digital

$$G_x(f) = \sigma_a^2 r_b |P(f)|^2 + (\mu_a r_b)^2 \sum_{k=-\infty}^{\infty} |P(kr_b)|^2 \delta\left(f - kr_b\right)$$

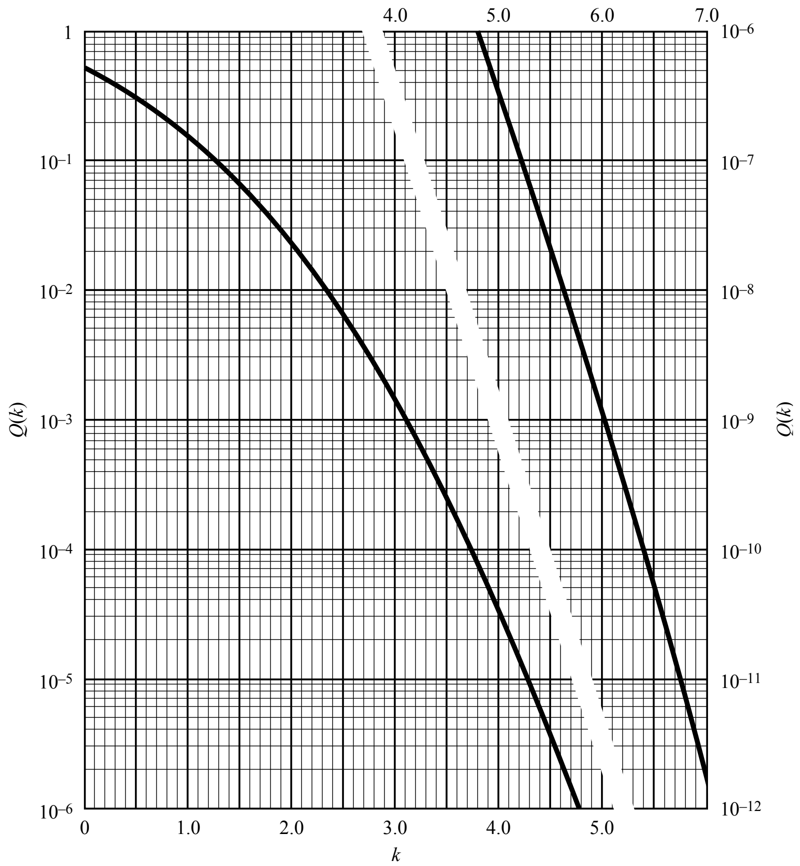
- En el caso de señalización M-aria polar, para que $P_e \approx 10^{-5}$, se tiene que cumplir que

$$SNR_R \approx 6(M^2 - 1).$$

- Relación señal a ruido en sistema PCM

$$\left(\frac{S}{N}\right)_D = \frac{S_x}{X_m^2}\left(\frac{3q^2}{1 + 4q^2 P_e}\right)\frac{f_s}{2W}.$$

- Función $Q(k)$ (cola de gaussiana)



Solución

Pregunta

(a) Un sistema es BIBO estable si para toda entrada acotada, la salida también es acotada. Formalmente, para toda entrada $x[n]$ tal que $|x[n]| \leq B_x < \infty$ para todo n, existe $B_y < \infty$ tal que la salida $y[n]$ cumple que $|y[n]| \leq B_y$ para todo n.

(b) Condición necesaria y suficiente de estabilidad: un sistema lineal invariante en el tiempo es estable si y solo si la respuesta al impulso es absolutamente sumable.
Formalmente: sea $x[n]$ la entrada a un *SLIT* con respuesta al impulso $h[n]$ y $y[n]$ la salida correspondiente. Si $|x[n]| \leq B_x < \infty$ para todo n, se cumple que,

$$|y[n]| \leq B_y \quad \forall n \quad \Longleftrightarrow \quad S = \sum_{k=-\infty}^{\infty} |h[k]| \leq \infty$$

Demostración: ver teórico.

(c) El teorema de muestreo indica que si una señal se muestrea a una frecuencia de muestreo superior al doble de la frecuencia máxima que contiene la señal, las muestras determinan unívocamente a la señal.
Formalmente: sea $x_c(t)$ una señal de banda limitada con

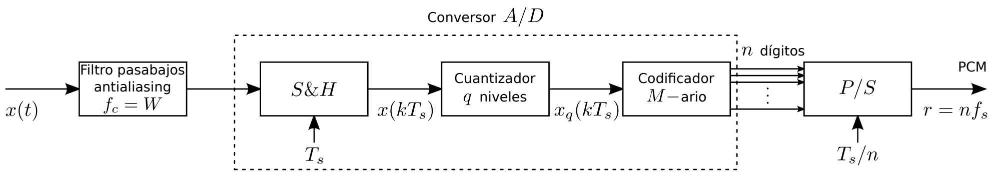
$$X_c(j\Omega) = 0, \qquad \text{para } |\Omega| \geq \Omega_N.$$

Entonces, $x_c(t)$ esta unívocamente determinada por sus muestras $x[n] = x_c(nT)$, $n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$, si

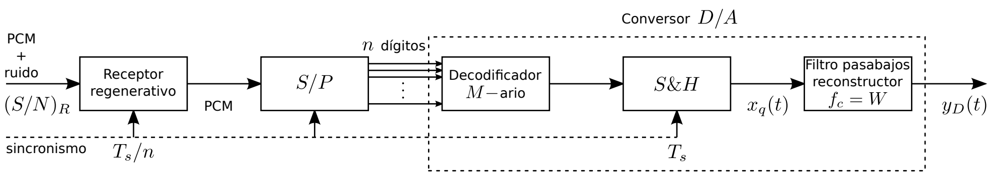
$$\Omega_s = \frac{2\pi}{T} \geq 2\Omega_N.$$

Problema 1

(a) Transmisor PCM:



Receptor PCM:



Explicación de los bloques: ver teórico.

(b) La relación señal a ruido en un sistema PCM esta dada por

$$\left(\frac{S}{N}\right)_D = \frac{S_x}{X_m^2}\left(\frac{3q^2}{1+4q^2P_e}\right)\frac{f_s}{2W}.$$

Como se trabaja sobre el umbral de error, el ruido de cuantización predomina sobre el ruido de decodificación ($P_e \ll 1/4q^2$) resultando en

$$\left(\frac{S}{N}\right)_D = 3q^2 S_x \frac{f_s}{2W},$$

donde se asumió que la escala completa del cuantizador es $X_m = 1$.
Por lo tanto, la cantidad de niveles q del cuantizador para lograr cierto valor SNR_D es

$$q = \left\lceil \sqrt{\frac{\mathrm{SNR}_D}{3S_x}\frac{2W}{f_s}} \right\rceil,$$

donde $\lceil\cdot\rceil$ representa la función techo, cuya salida es el entero inmediatamente superior al argumento.
La cantidad n de dígitos binarios necesaria para representar q niveles de cuantización es

$$2^n \geq q \quad \iff \quad n \geq \log_2 q$$

y por lo tanto, la cantidad de dígitos del cuantizador es

$$n = \left\lceil \log_2 \sqrt{\frac{\mathrm{SNR}_D}{3S_x}\frac{2W}{f_s}} \right\rceil.$$

La cadencia de símbolos de la señal PCM es $r = nf_s$. Para que no se produzca ISI, el ancho de banda de transmisión tiene que cumplir que

$$B_T \geq \frac{1}{2}r = \frac{1}{2}nf_s \geq nW.$$

(c) La densidad espectral de potencia de la señal PCM de la forma

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k p(t-kD), \qquad \text{con } D = 1/r$$

es

$$G_x(f) = \sigma_a^2 r|P(f)|^2 + (\mu_a r)^2 \sum_{k=-\infty}^{\infty} |P(kr)|^2 \delta\left(f-kr\right). \tag{1}$$

En este caso, el código de línea es polar sin retorno a cero, por lo que el pulso conformador es

$$p(t) = \Pi\left(\frac{t}{D}\right)$$

que tiene transformada de Fourier

$$P(f) = D\,\mathrm{sinc}\, fD = \frac{1}{r}\,\mathrm{sinc}\,\frac{f}{r}. \tag{2}$$

Sustituyendo este resultado en la ecuación 2, la densidad espectral de potencia queda

$$G_x(f) = \frac{\sigma_a^2}{r}\,\mathrm{sinc}^2\,\frac{f}{r} + \mu_a^2 \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta\left(f-kr\right)\mathrm{sinc}^2\, k \tag{3}$$

y como con k entero,

$$\operatorname{sinc} k = \begin{cases} 1 & \text{si } k = 0 \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

la densidad espectral de potencia se reduce a

$$G_x(f) = \frac{\sigma_a^2}{r} \operatorname{sinc}^2 \frac{f}{r} + \mu_a^2 \delta(f) \tag{4}$$

Falta calcular μ_a y σ_a^2. La probabilidad de los símbolos $a_k = A, -A$ es p y $1-p$ respectivamente. La media de a_k es por lo tanto

$$\mu_a = E\{a_k\} = Ap - A(1-p) = A(2p-1), \tag{5}$$

y la varianza es

$$\sigma_a^2 = E\{a_k^2\} - \mu_a^2.$$

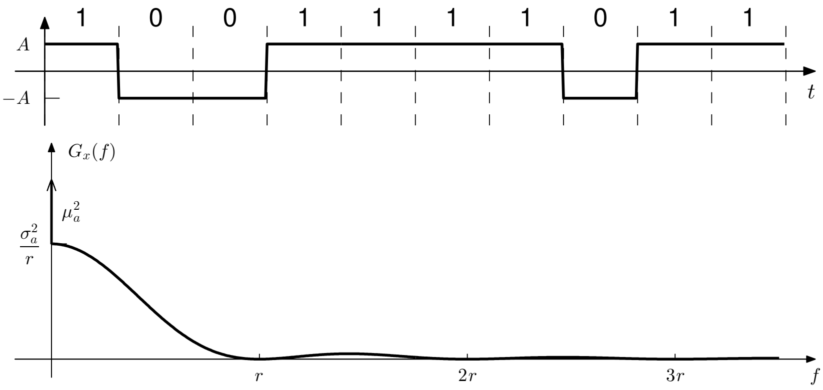
Como

$$E\{a_k^2\} = A^2 p + (-A)^2(1-p) = A^2,$$

la varianza queda

$$\sigma_a^2 = A^2 - A^2(2p-1)^2 = 4A^2 p(1-p) \tag{6}$$

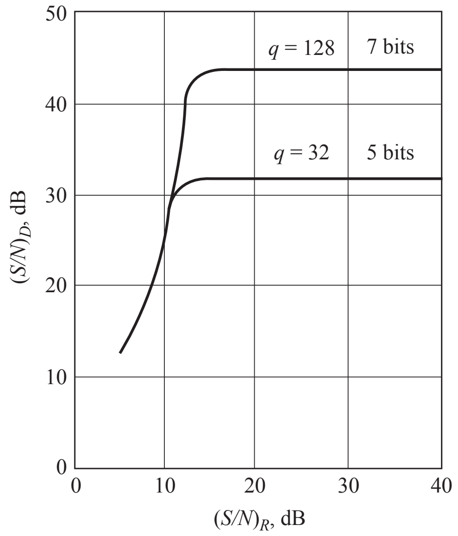
Sustituyendo las ecuaciones 5 y 6 en la ecuación 4 se obtiene el resultado buscado. En la siguiente figura se grafica la densidad espectral de potencia con $A = 1$, $r = 1$ y $p = 0.8$.



(d) La señal PCM tiene un componente de continua producto de que los símbolos no son equiprobables y por lo tanto, $\mu_a \neq 0$. Este nivel de continua se manifiesta en el espectro mediante la delta en continua y como no lleva información, significa un desperdicio de potencia. Para evitarlo, la media de los símbolos debe ser nula, lo que se logra con probabilidad de símbolos $p = 1/2$, como se ve en la ecuación 5.

(e) En un sistema PCM deben evitarse los errores de decodificación, ya que alteran la amplitud de la señal en gran magnitud y si ocurren muy frecuentemente, deterioran tanto la forma de onda que el mensaje se hace irreconocible. Los sistemas de comunicación PCM se diseñan para operar en la región donde $P_e \ll 1/4q^2$, es decir, donde el ruido de decodificación es despreciable frente al ruido de cuantización. En la figura de la SNR_D en función de la SNR_R, es la región alrededor del punto de inflexión.

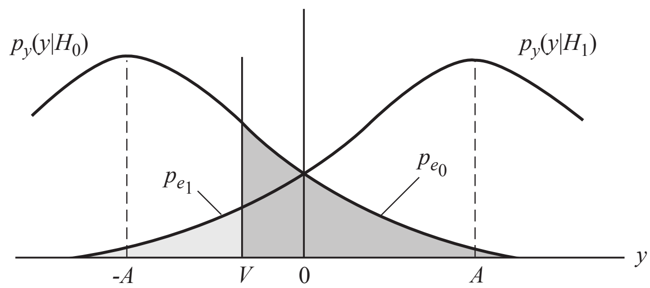
(f) Por tratarse de un código polar con símbolos equiprobables, el umbral de decisión óptimo es $V_{\text{opt}} = 0$.



(g) La probabilidad de error en recepción es

$$P_e = P_0 P_{e_0} + P_1 P_{e_1}$$

donde P_0 y P_1 son las probabilidades de recibir un 0 y un 1 respectivamente y P_{e_0} P_{e_1} son las probabilidades de cometer un error al recibir un cero (interpretar a un 0 como un 1) y de cometer un error al recibir un 1 en el receptor regenerativo. A partir



de la figura, se observa que

$$P_{e_0} = Q\left(\frac{A+V}{\sigma}\right), \qquad P_{e_1} = Q\left(\frac{A-V}{\sigma}\right),$$

y la probabilidad de error queda

$$P_e = (1-p)Q\left(\frac{A+V}{\sigma}\right) + pQ\left(\frac{A-V}{\sigma}\right)$$

Teniendo en cuenta que los símbolos son equiprobables y empleando el umbral óptimo se llega a que

$$P_e = Q\left(\frac{A}{\sigma}\right).$$

Falta expresar A/σ en función de la SNR_R. Como los símbolos son equiprobables, la potencia de la señal PCM coincide con la potencia de la señal periódica $x_p(t)$ obtenida de codificar la secuencia $\ldots 1010101010 \ldots$. Por lo tanto, la potencia se puede calcular como

$$
\begin{aligned}
S_x &= \frac{1}{2D}\int_0^{2D} x_p^2(t)dt \\
&= \frac{1}{2D}\left[\int_0^{D} A^2 dt + \int_D^{2D} (-A)^2\, dt\right] \\
&= \frac{1}{2D}\int_0^{2D} A^2 dt \\
&= A^2
\end{aligned}
$$

y asumiendo que el transmisor amplifica la señal para compensar las pérdidas en el canal,

$$S_R = S_x = A^2 \quad \Rightarrow \quad A = \sqrt{S_R}.$$

Como σ^2 es la potencia del ruido aditivo introducido en el cana, se tiene ademas que

$$\sigma = \sqrt{N_R}$$

concluyendo que en este caso,

$$P_e = Q\left(\frac{A}{\sigma}\right) = Q\left(\sqrt{SNR_R}\right)$$

Por lo tanto, si la SNR$_R$=9, la probabilidad de error es

$$P_e = Q(3) \approx 10^{-3}.$$

(h) Para que un sistema PCM opere adecuadamente, debe operar sobre el umbral del error de decodificación, donde la probabilidad de error de decodificación cumple que $P_e < 10^{-5}$. Por lo tanto, el sistema PCM especificados no funcionaría correctamente.

Problema 2

(a) La función de transferencia del sistema se obtiene aplicando la transformada $\mathcal{Z}$ a la ecuación en recurrencia,

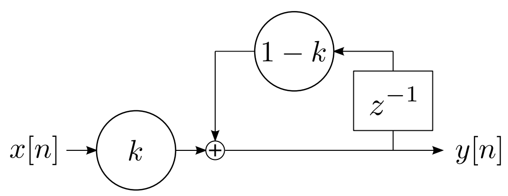
$$Y(z) - (1-k)z^{-1}Y(z) = kX(z)$$

y despejando $H(z) = Y(z)/X(z)$,

$$H(z) = \frac{k}{1-(1-k)z^{-1}}$$

El sistema tiene un polo en $z_p = 1-k$. Como el sistema es causal, la región de convergencia es $|z| > 1-k$.

(b) Diagrama de bloques del sistema



(c) Para que el filtro sea estable, la circunferencia unidad debe estar contenida en la ROC. Como además el sistema es estable, lo anterior implica que todos los polos deben estar contenidos dentro del círculo unidad. En este caso,

$$|z_p| = |1-k| < 1 \quad \Rightarrow \quad -1 < 1-k < 1 \quad \Rightarrow \quad -2 < -k < 0,$$

concluyendo que la condición de k para estabilidad del sistema es

$$0 < k < 2. \tag{7}$$

(d) La respuesta en frecuencia del sistema es

$$\begin{aligned} H\left(e^{j\theta}\right) &= \frac{k}{1-(1-k)e^{-j\theta}} \\ &= \frac{k}{1-(1-k)\cos(-\theta)-j(1-k)\sin(-\theta)} \\ &= \frac{k}{1-(1-k)\cos(\theta)+j(1-k)\sin(\theta)} \end{aligned}$$

Tomando la magnitud al cuadrado, se obtiene que

$$\begin{aligned} \left|H\left(e^{j\theta}\right)\right|^2 &= \frac{k^2}{\left(1-(1-k)\cos(\theta)\right)^2+(1-k)^2\sin^2(\theta)} \\ &= \frac{k^2}{1-2(1-k)\cos(\theta)+(1-k)^2} \end{aligned} \tag{8}$$

(e) Se quiere encontrar k de forma que $\left|H\left(e^{j\pi/3}\right)\right|^2 = 1/3$. Para eso, se evalúa la ecuación 8 en $\theta = \pi/3$,

$$\left|H\left(e^{j\pi/3}\right)\right|^2 = \frac{k^2}{1-(1-k)+(1-k)^2} = \frac{1}{3}$$

Despejando, se llega a que k tiene que cumplir que

$$2k^2+k-1=0, \qquad \Rightarrow \qquad k=\frac{1}{2} \quad \text{o} \quad k=-1$$

Para que el sistema sea estable, se tiene que cumplir la condición de la ecuación 7, y por lo tanto, se elige

$$k = \frac{1}{2}.$$

(f) Con el valor de k encontrado, la función de transferencia del sistema es

$$H(z) = \frac{\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{2}z^{-1}}$$

y aplicando la antitransformada $\mathcal{Z}$ se obtiene la respuesta al impulso,

$$\begin{aligned} h[n] &= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^n u[n] \\ &= \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} u[n]. \end{aligned}$$

(g) El sistema tiene un polo en $z_p = 1/2$ y un cero en $z_z = 0$. De esta forma, el sistema es un filtro pasabajos.