Modulación y Procesamiento de Señales
Solución de examen - Curso 2012

Tecnólogo en Telecomunicaciones - FING/CURE
Universidad de la República

19 de julio de 2012

Pregunta

(a) Un sistema discreto, lineal e invariante en el tiempo (SLIT) es estable si y sólo si su respuesta al impulso $h[k]$ es absolutamente sumable. Es decir, si se cumple:

$$S = \sum_{k=-\infty}^{\infty} |h[k]| < \infty \tag{1}$$

(b) ($\Leftarrow$) Sea un SLIT con $h[k]$ tal que cumpla con la ecuación 1. Sea además $x[n]$ una entrada generérica acotada por un B_x positivo y sea $y[n]$ su salida. Se cumplirá entonces:

$$y[n] = x[n] * h[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[n-k].h[k]$$

Acotando el módulo de $y[n]$:

$$|y[n]| = |\sum_{k=-\infty}^{\infty} x[n-k].h[k]| \leq \sum_{k=-\infty}^{\infty} |x[n-k]|.|h[k]| \leq B_x. \sum_{k=-\infty}^{\infty} |h[k]| = B_x.S < \infty$$

Por lo que $y[n]$ será acotada para toda entrada acotada $x[n]$ a un SLIT con respuesta al impulso tal que cumpla con la ecuación 1. Esta ecuación es entonces una condición suficiente de estabilidad para este tipo de sistemas. Probaremos en lo siguiente que esta condición es además necesaria.

($\Rightarrow$) Veremos que si $S = \infty$ siempre se podrá entontrar una entrada acotada tal que el sistema arroje una salida no acotada. Supongamos entonces $S = \infty$ en la ecuación 1 y tomemos la siguiente entrada acotada:

$$x[n] = \begin{cases} \frac{h^*[-n]}{|h[-n]|}, & h[-n] \neq 0, \\ 0, & h[-n] = 0, \end{cases}$$

donde $h^*[n]$ es el complejo conjugado de $h[n]$. La salida $y[n]$ se puede calcular de la siguiente manera:

$$y[n] = x[n] * h[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[n-k].h[k]$$

Evaluando para $y[0]$ obtenemos:

$$y[0] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[-k].h[k] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{h^*[k]}{|h[k]|}.h[k] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{|h[k]|^2}{|h[k]|} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} |h[k]| = \infty$$

Q.E.D

Problema 1

(a) Ver teórico.

(b) La mínima frecuencia de muestro en este caso es $f_s^{min} = 2 \times 3.4\ kHz = 6.8\ kHz$

(c) Ver teórico.

(d) Ver teórico. Se debe incluir previo al sistema un filtrado pasabajo con frecuencia de corte $f_s/2$ debido a que las señales entrantes no son a priori conocidas y pueden tener frecuencias fuera del espectro. Estas frecuencias deben ser filtradas para evitar problemas de alliasing.

(e) Se requiere un bloque decimador digital. Ver teórico.

(f) Ver teórico.

(g) El espectro de la señal reconstruida sería $X_r(f) = 2(A/f_s)\Pi\left(2f/f_s^{'}\right) = 2(A/f_s)\Pi\left(f/2kHz\right)$. La señal reconstruida será entonces:

$$x_r(t) = \mathcal{F}^{-1}\{X_r(f)\} = 2(A/f_s)(2kHz)sinc(2kHz.t) = (A/2)sinc(2kHz.t)$$

La decisión de decimar no fue correcta debido a que generó el problema de alliasing.

Problema 2

(a) Ver teórico.

(b) La autocorrelación del proceso $x(t)$ es $R_x(\tau) = sinc^2(W_x\tau)$, por tanto, su densidad espectral de potencia es:

$$G_x(f) = \mathcal{F}\{R_x(\tau)\} = \frac{1}{W_x}\bigwedge\left(\frac{f}{W_x}\right)$$

El ancho de banda de esta señal es igual a $W_x = 5$ kHz.

(c) La mínima frecuencia de trasmisión es: $f_s = 2W_x = 10$ kHz.

(d) El ancho de banda de trasmisión debe ser tal que: $B_T \geq \frac{nf_s}{2} = nW_x$. Con lo cual n debe ser $n \leq \frac{B_T}{W_x} = 3$, de donde se obtiene $n = 3$.

(e) Como la señal está normalizada, el máximo del rango de cuatificación E_{max} es igual a 1. Sobre la hipótesis de que $P_e << 1/4q^2$ y que se usa la mínima frecuencia de muestreo posible, la relación señal a ruido en detección se puede hallar de la siguiente manera: $\text{SNR}_D = 3q^2S_x$. La potencia de la señal S_x es:

$$S_x = R_x(0) = \int_{-\infty}^{+\infty} G_x(f)df = 1$$

Por lo tanto la condición implica qué: $\text{SNR}_D = 3q^2 > 10^6$, y como consecuencia, $q = M^n > \sqrt{10^6/3}$. Depenjando M tenemos:

$$M \geq e^{\frac{Ln(\sqrt{10^6/3})}{n}} \approx 8.32 \quad \longrightarrow \quad M_{min} = 9 \quad \longrightarrow \quad q_{min} = 9^3 = 729$$

(f) Ver teórico. Para estar en el punto óptimo se debe trabajar con un valor de SNR_R justo sobre el umbral de recepción PCM.

(g) Se debe diseñar la potencia de trasmisión para trabajar sobre el umbral de recepción. Dicho umbral puede estimarse mediante la siguiente expresión: $\text{SNR}_R^{umbral} \approx 6(M^2 - 1) = 480$. Se debe garantizar entonces:

$$SNR_R = \frac{S_R}{N_R} \gtrsim SNR_R^{umbral} = 480$$

Como $N_R = \eta B_T$ y $S_R = S_T/L$ se obtiene:

$$S_T \gtrsim SNR_R^{umbral}L\eta B_T = 36\ W \quad \longrightarrow \quad S_T^{min} \approx 36\ W$$