Modulación y Procesamiento de Señales
Segundo parcial - Curso 2015

Tecnólogo en Telecomunicaciones - FING/CURE
Universidad de la República

20 de julio de 2015

Indicaciones:

- La prueba tiene una duración total de 3 horas y media, y un total de 60 puntos.
- Cada hoja entregada debe indicar nombre, número de C.I., y número de hoja. La hoja 1 debe indicar además el total de hojas entregadas. Utilice únicamente un lado de las hojas.
- Cada problema o pregunta se deberá comenzar en una hoja nueva. Se evaluará explícitamente la claridad, prolijidad y presentación de las soluciones, desarrollos y justificaciones.
- Pueden utilizarse resultados teóricos del curso sin hacer su deducción siempre que la letra no lo exija explícitamente. Se evaluará la correcta formulación y validez de las hipótesis.

Pregunta 1 [12 pts.]

(a) Indicar las características deseables de los códigos de línea empleados en la transmisión de señales PAM digitales.

(b) Comparar las características más relevantes de los códigos con retorno a cero y sin retorno a cero. Indicar un código de línea que mantenga la información de sincronismo en todo momento.

(c) Se tiene una fuente de información que emite símbolos cada $T_0 = 14$ ms de un alfabeto de $M = 100$ símbolos. Indicar el número de bits necesario para codificar cada símbolo, la cadencia de bits y el ancho mínimo del canal para poder recuperar el mensaje en recepción.

Pregunta 2 [12 pts.]

(a) Dar el diagrama de bloques de un sistema PCM M-ario (transmisor y receptor). Explicar brevemente la función de cada uno de los bloques.

(b) Bosquejar la relación entre la SNR_D y la SNR_R para dos cantidades de niveles de cuantización distintas, q_1 y q_2 con $q_1 < q_2$. Explicar las distintas regiones del gráfico e indicar el punto de trabajo óptimo.

(c) Indicar las ventajas y desventajas en la transmisión de una señal analógica codificada en PCM en comparación con la transmisión de la señal analógica sin codificar.

Problema 1 [18 pts.]

Se considera un sistema de transmisión bandabase unipolar binario. La fuente emite los símbolos lógicos "0" y "1" con probabilidad 1/5 y 4/5 respectivamente a una tasa de r símbolos/s y se utilizan pulsos $p(t) = sinc(rt)$ modulados con amplitudes 0 y A. El canal tiene ancho de banda $B_C = 48$ kHz e introduce ruido que se puede modelar como blanco, aditivo y gaussiano con densidad espectral de potencia $\eta/2$ constante, con $\eta = 3 \times 10^{-6}$ W/Hz. El filtro de recepción tiene ancho de banda $B_R = B_C$ y se muestrea en el instante óptimo.

(a) Bosquejar la onda conformada si se envía la secuencia 1010.

(b) Calcular y esbozar la densidad espectral de potencia de la señal PAM. Además, calcular la potencia de la señal PAM en función de A.

(c) Indicar el valor de la tasa de símbolos r que permite aprovechar al máximo el ancho de banda del canal sin introducir interferencia intersimbólica.

(d) Calcular la relación señal a ruido en recepción en función de A. Se asume que el transmisor compensa la atenuación del canal.

(e) Suponga que ahora el sistema trabaja con $A = 2$ y en recepción se utiliza el umbral $V = 0.8$. Indicar la probabilidad de error en recepción.

(f) ¿Es razonable suponer que utilizando un umbral $V = \frac{A}{2}$ se obtenga el mínimo error? Justificar.

Problema 2 [18 pts.]

Para transmitir señales de voz se diseña un sistema PCM binario con señalización polar NRZ con pulsos rectangulares de amplitud $A = \pm 3$ V. La señal de voz $x(t)$ capturada por el micrófono se filtra con un pasabajos de frecuencia de corte $f_c = 5$ kHz. La señal resultante limitada en banda se modela como un proceso con densidad de probabilidad $x(t) \sim \mathcal{N}(0, 4)$ para cada t ($x(t)$ es una variable aleatoria con distribución normal de media $\mu_x = 0$ y varianza $\sigma_x^2 = 4$). La frecuencia de muestreo se elige como $f_s = 1.5 \times f_N$, siendo f_N la frecuencia de muestreo mínima para que el sistema funcione correctamente. En el receptor se utiliza un filtro pasabajos de ancho de banda B_T. El canal cumple con las hipótesis habituales, con una densidad espectral de potencia $\eta/2$, siendo $\eta = 10^{-6}$ Watts/Hz y atenuación $L = 10$ en potencia.

(a) Calcular la escala completa del cuantizador X_m en el transmisor de forma tal que menos del 4 % de las muestras superen la escala del cuantizador. Matemáticamente, esto es que $\Pr\{|x(t)| \geq X_m\} = 0.04$.

(b) Determinar la cantidad mínima de niveles de cuantización q de forma que el error de cuantización de cada muestra no supere 0.004 V en amplitud. Determinar el largo de palabra binaria n y la cantidad de niveles para cumplir con la condición.

(c) Calcular la condición que debe cumplir B_T para que el ruido de decodificación sea despreciable frente al ruido de cuantización. Asumir que los símbolos lógicos binarios son equiprobables.

(d) En las condiciones de la parte anterior, calcular la SNR_D del sistema y expresarla en decibeles.

(e) Calcular la cadencia de símbolos del sistema e indicar y el ancho de banda mínimo requerido para la transmisión. Interpretar el resultado e indicar si es posible construir el sistema PCM en las condiciones indicadas.

Fórmulas útiles

- Las siguientes funciones forman un par de transformadas de Fourier

$$p(t) = r \operatorname{sinc} rt \quad \overset{\mathcal{F}}{\longleftrightarrow} \quad P(f) = \Pi\left(\frac{f}{r}\right)$$

- Densidad espectral de potencia de señal PAM digital

$$G_x(f) = \sigma_a^2 r_b |P(f)|^2 + (\mu_a r_b)^2 \sum_{k=-\infty}^{\infty} |P(kr_b)|^2 \delta\left(f - kr_b\right)$$

- En el caso de señalización M-aria polar, para que $P_e \approx 10^{-5}$, se tiene que cumplir que

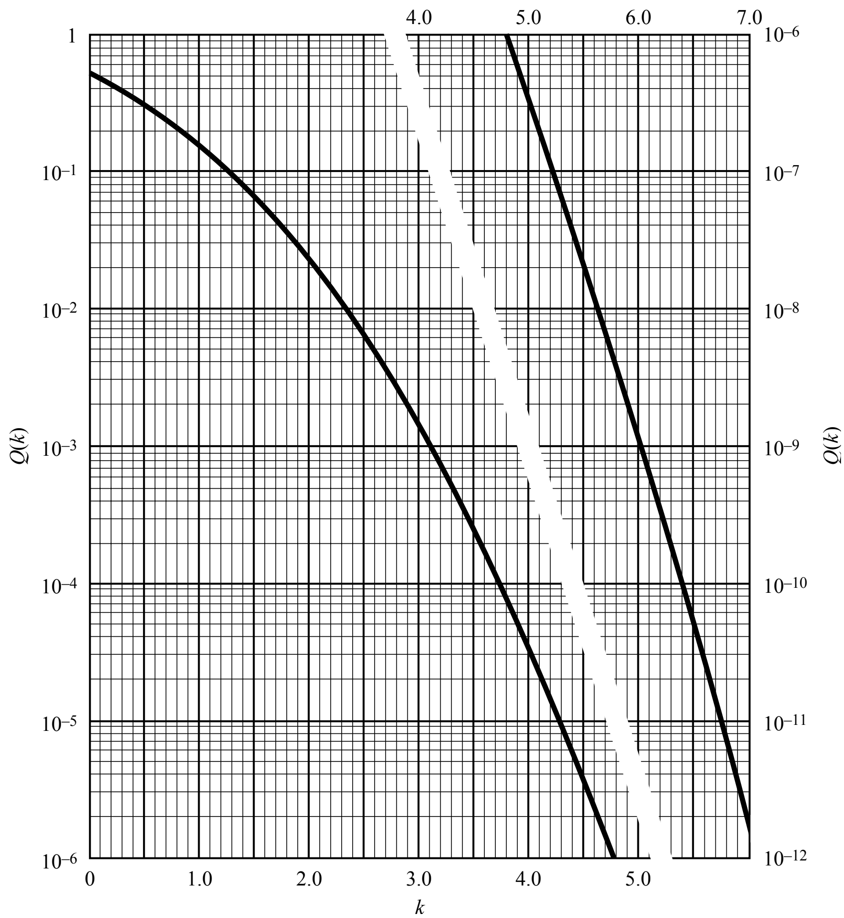
$$SNR_R \approx 6(M^2 - 1).$$

- Relación señal a ruido en sistema PCM

$$\left(\frac{S}{N}\right)_D = \frac{S_x}{X_m^2}\left(\frac{3q^2}{1+4q^2P_e}\right)\frac{f_s}{2W}.$$

- Función $Q(k)$ (cola de gaussiana): sea X la variable aleatoria con densidad de probabilidad $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$. Se cumple que

$$\Pr\left\{X \geq x\right\} = Q\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)$$



Solución

Pregunta 1

(a) Ver teórico.

(b) Ver teórico.

(c) Para codificar 100 símbolos con palabras binarias, se necesita un largo de palabra n tal que

$$2^n \geq 100 \qquad \Leftrightarrow \qquad n \geq \log_2(100) \approx 6.64.$$

Por lo tanto, se necesitan palabras de $n = 7$ bits ($2^7 = 128 > 100$).
Dado que se deben transmitir 7 bits en 14 ms, cada bit debe ser enviado en 2 ms. En el código de línea binario la tasa de bits es de

$$r_b = \frac{1}{0.002} = 500 \text{ bps}.$$

Para recuperar la señal en recepción el ancho de banda del canal debe cumplir que

$$B \geq r_b/2 = 250 \text{ bps}.$$

Pregunta 2

(a) Ver teórico.

(b) Ver teórico.

Problema 1

(b) La densidad espectral de potencia de una señal PAM de la forma

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k p(t - kD)$$

es

$$G_x(f) = \sigma_a^2 r_b |P(f)|^2 + (\mu_a r_b)^2 \sum_{k=-\infty}^{\infty} |P(kr_b)|^2 \delta(f - kr_b) \tag{1}$$

El pulso conformador es

$$p(t) = \text{sinc}(rt).$$

que tiene transformada de Fourier

$$P(f) = \frac{1}{r}\Pi\left(\frac{f}{r}\right).$$

La media y la varianza son

$$\mu_a = \mathbb{E}\{a_k\} = 0 \times \frac{1}{5} + A \times \frac{4}{5} = \frac{4}{5}A,$$

$$\sigma_a^2 = \mathbb{E}\left\{a_k^2\right\} - \mu_a^2 = \frac{4}{5}A^2 - \frac{16}{25}A^2 = \frac{4}{25}A^2$$

Sustituyendo en la ecuación 1 se obtiene la PSD, que queda

$$G_x(f) = \frac{4A^2}{25r}\Pi\left(\frac{f}{r}\right) + \frac{16A^2}{25}\delta(f).$$

La potencia de la señal se puede calcular como la integral de la PSD,

$$S_x = \int_{-\infty}^{+\infty} G_x(f)df = \frac{4A^2}{25} + \frac{16A^2}{25} = \frac{4}{5}A^2$$

(c) Se debe cumplir que $r \leq 2B_C$, dada la característica del pulso conformador se puede transmitir a tasa máxima $r_{max} = 2B_C = 96$ kbps.

(d) Como el transmisor compensa la atenuación del canal, se cumple que $S_R = S_x$, y por la parte (b) se tiene que

$$S_R = \frac{4}{5}A^2$$

Además, teniendo en cuenta que $N_R = \sigma_n^2 = \eta B_C$, se tiene que

$$\left(\frac{S}{N}\right)_R = \frac{4A^2}{5\eta B_C}$$

(e) La probabilidad de error en recepción es

$$\begin{aligned} Pe &= P_0 \times P_{e0} + P_1 \times P_{e1} \\ &= P_0 Q\left(\frac{V}{\sigma_n}\right) + P_1 Q\left(\frac{A-V}{\sigma_n}\right) \\ &\approx \frac{1}{5}Q\left(\frac{2}{0.38}\right) + \frac{4}{5}Q\left(\frac{2-0.8}{0.38}\right) \\ &\approx \frac{1}{5}Q(2.1) + \frac{4}{5}Q(3.2) \\ &\approx \frac{1}{5}0.02 + \frac{4}{5}0.0007 \\ &\approx 4.5 \times 10^{-3} \end{aligned}$$

(f) Dado que los símbolos no son equiprobables no es de esperar se obtenga el mínimo error en $V = \frac{A}{2}$. Como es más probable enviar un “1” por lo tanto P_{e1} tiene un mayor peso que P_{e0} en la probabilidad de error. Es preferible equivocarse en un “0” por lo que el umbral óptimo debe estar más cerca del símbolo “0”.

Problema 2

(a) Hay que calcular X_m de forma tal que

$$\Pr\{|x(t)| \geq X_m\} = P, \qquad \text{con } P = 0.04.$$

Cómo

$$\begin{aligned} \Pr\{|x(t)| \geq X_m\} &= \Pr\{x(t) \geq X_m\} + \Pr\{x(t) \leq -X_m\} \\ &= 2\Pr\{x(t) \geq X_m\}. \end{aligned}$$

Por lo tanto, el problema consiste en calcular X_m tal que

$$\Pr\{x(t) \geq X_m\} = \frac{P}{2}.$$

Como $x(t) \sim \mathcal{N}(\mu_x, \sigma_x^2)$, se tiene que

$$\Pr\{x(t) \geq X_m\} = Q\left(\frac{X_m - \mu_x}{\sigma_x}\right) = \frac{P}{2}.$$

Buscando en la gráfica de la cola de la gaussiana, se ve que $Q(2) \approx 2 \times 10^{-2}$, y por lo tanto,

$$\frac{X_m - \mu_x}{\sigma_x} = 2.$$

Como $\mu_x = 0$ y $\sigma_x^2 = 4$ se obtiene que

$$X_m = 4.$$

(b) Si el cuantizador emplea redondeo para aproximar el valor de la muestra al nivel de cuantización mas cercano, el error de cuantización máximo cumple que

$$|e_q| = \frac{\Delta}{2} \leq 0.004.$$

donde Δ es la distancia entre niveles de cuantización sucesivos. Por lo tanto, la condición pedida implica que $\Delta \leq 0.008$. Además,

$$q = \frac{2X_m}{\Delta} \geq \frac{2 \times 4}{0.008} = 1000.$$

Como la codificación es binaria, se tiene que

$$q = 2^n \geq 1000,$$

y por lo tanto,

$$n \geq \frac{\log 1000}{\log 2} = 9.97.$$

Como n tiene que ser entero, se elige $n = 10$ y por lo tanto, $q = 1024$.

(c) Para que se cumpla que el ruido de decodificación sea despreciable, se tiene que cumplir que

$$SNR_R \geq 6(M^2 - 1).$$

Como

$$SNR_R = \frac{S_R}{N_R} = \frac{S_T/L}{\eta B_T},$$

donde S_T es la potencia de transmisión, la condición en el ancho de banda del filtro de recepción es

$$B_T \leq \frac{S_T/L}{6(M^2 - 1)\eta}$$

Teniendo en cuenta que los símbolos binarios son equiprobables de amplitud $A\pm 3$ V, la potencia de transmisión es

$$S_T = S_x = 9 \text{ W},$$

donde se consideró que en el transmisor no hay amplificador. Por lo tanto,

$$B_T \leq \frac{9/10}{6(2^2 - 1)10^{-6}} = 50000 \text{ Hz}.$$

(d) Como se asume que se trabaja sobre el umbral de error, la SNR_D es

$$SNR_D = 3q^2 \frac{S_x}{X_m^2} \frac{f_s}{2W} \tag{2}$$

La frecuencia de muestreo mínima para que se cumpla el teorema de muestreo es $f_N = 2f_c$, ya que la señal analógica se filtra con un pasabajos limitándola en banda a frecuencia $W = f_c$. La frecuencia de muestreo es entonces $f_s = 1.5f_N = 3f_c = 15$ kHz. Además, $S_x = \sigma_x^2$. Por lo tanto,

$$SNR_D = 3 \times 1024^2 \times \frac{4}{4^2} \times \frac{15000}{10000} \approx 1.2 \times 10^6,$$

y en decibeles queda

$$SNR_D \approx 60 \text{ dB}.$$

(e) La cadencia de símbolos es

$$r = nf_s = 10 \times 15000 = 150 \text{ kbps},$$

y el ancho de banda de transmisión debe cumplir que,

$$B_T \geq \frac{r}{2} = 75000 \text{ Hz}.$$

Comparando con el resultado de la parte (c), se ve que no es posible diseñar un sistema PCM con las características indicadas, ya que se requiere un ancho de banda de transmisión grande haciendo que el ruido en recepción debido al ruido del canal no permite trabajar sobre el umbral. En otras palabras, la SNR_R es tal que el ruido de decodificación no es despreciable frente al ruido de cuantización.