Modulación y Procesamiento de Señales
Segundo parcial - Curso 2014

Tecnólogo en Telecomunicaciones - FING/CURE
Universidad de la República

15 de julio de 2014

Indicaciones:

- La prueba tiene una duración total de 3 horas y media, y un total de 60 puntos.
- Cada hoja entregada debe indicar nombre, número de C.I., y número de hoja. La hoja 1 debe indicar además el total de hojas entregadas. Utilice únicamente un lado de las hojas.
- Cada problema o pregunta se deberá comenzar en una hoja nueva. Se evaluará explícitamente la claridad, prolijidad y presentación de las soluciones, desarrollos y justificaciones.
- Pueden utilizarse resultados teóricos del curso sin hacer su deducción siempre que la letra no lo exija explícitamente. Se evaluará la correcta formulación y validez de las hipótesis.

Pregunta 1 [15 pts.]

(a) Describa las transformaciones que sufre una señal PAM digital al viajar desde la fuente hasta llegar al receptor.

(b) Dibuje el diagrama de bloques del receptor regenerativo usado en la transmisión digital en banda base y describa su funcionamiento explicando qué hace cada bloque.

(c) Considere que la señal PAM es binaria unipolar NRZ con pulsos de amplitud $A = 1$ y con igual probabilidad de bits. Además, el transmisor compensa la atenuación del canal y el ruido en predetección tiene desviación estándar $\sigma = 0.12$. Si el comparador del receptor regenerativo usa el umbral $V = A/4$, calcule la probabilidad P_{e_0} de confundir un cero con un uno, la probabilidad P_{e_1} de confundir un uno con un cero y la probabilidad total P_e de error de detección de bits. Compare el resultado con el caso en que el receptor usa el umbral óptimo.

Pregunta 2 [12 pts.]

(a) Dar el diagrama de bloques de un sistema PCM M-ario (transmisor y receptor). Explicar brevemente la función de cada uno de los bloques.

(b) Bosquejar la relación entre la SNR_D y la SNR_R para dos cantidades de niveles de cuantización distintas, q_1 y q_2 con $q_1 < q_2$. Explicar las distintas regiones del gráfico e indicar el punto de trabajo óptimo.

Problema 1 [18 pts.]

Se considera un sistema de transmisión bandabase polar binario **RZ** (con retorno a cero) que utiliza pulsos rectangulares. La fuente emite los símbolos lógicos "0" y "1" de forma equiprobable. El tiempo de bit del código es T_b, el retorno a cero se produce en la mitad de tiempo de bit y la amplitud de los pulsos es $\pm A/2$. El filtro de recepción $H_R(f)$ es un pasabajos ideal de ancho de banda B_R y el canal cumple con las hipótesis habituales.

(a) Calcule y esboce la densidad espectral de potencia de la señal PAM. Además, calcule la potencia de la señal PAM en función de A.

(b) Indique el valor de la frecuencia de corte B_R del filtro de recepción $H_R(f)$ justificando su elección.

Se considera que el canal introduce ruido blanco gaussiano de potencia η W/Hz y el transmisor tiene un amplificador que compensa la atenuación del canal.

(c) Esboce la densidad espectral de potencia del ruido antes y después del filtro pasabajos del receptor.

(d) Calcule la probabilidad de error de bit de este sistema en función de la SNR_R y discuta el resultado comparando con el caso en que se usa codificación del línea polar NRZ.

Problema 2 [15 pts.]

Se desea enviar una señal analógica $x(t)$ utilizando un sistema PCM M-ario con señalización polar. La señal $x(t)$ tiene densidad espectral de potencia $G_x(f) = \frac{1}{W_x}\Lambda(W_x)$, con $W_x = 5$ kHz. El canal cumple las hipótesis habituales y tiene ancho de banda $B_T = 22$ kHz.

(a) Calcular el número máximo n de símbolos por palabra del código que es posible emplear.

(b) Determinar el rango de frecuencias de muestreo válidas en el sistema PCM, con n obtenido en la parte anterior.

Asumiendo que el sistema PCM trabaja sobre el umbral del error de decodificación, se requiere que la SNR_D sea superior a 50 dB. El cuantizador tiene un factor de escala $X_m = 1$.

(c) Para n y la mínima frecuencia de muestreo f_s obtenidos en las partes anteriores, determinar el número mínimo de símbolos M del código y la cadencia de símbolos en **kbps**.

(d) Asumiendo que el error de decodificación tiene un efecto despreciable si $P_e \leq 10^{-5}$, indicar la condición que debe cumplir la SNR_R en este caso para que el ruido de decodificación sea despreciable frente al ruido de cuantización.

Fórmulas útiles

- Transformada de Fourier de pulso rectangular de duración τ

$$p(t) = \Pi\left(\frac{t}{\tau}\right) \quad \stackrel{\mathcal{F}}{\longleftrightarrow} \quad P(f) = \tau \operatorname{sinc} f\tau$$

- Densidad espectral de potencia de señal PAM digital

$$G_x(f) = \sigma_a^2 r_b |P(f)|^2 + (\mu_a r_b)^2 \sum_{k=-\infty}^{\infty} |P(kr_b)|^2 \delta\left(f - kr_b\right)$$

- Probabilidad de error del receptor regenerativo con bits equiprobables y umbral V óptimo

$$P_e = Q\left(\frac{A}{2\sigma}\right) = \begin{cases} Q\left(\sqrt{\frac{1}{2}(S/N)_R}\right) & \text{Unipolar NRZ} \\ Q\left(\sqrt{(S/N)_R}\right) & \text{Polar NRZ} \end{cases}$$

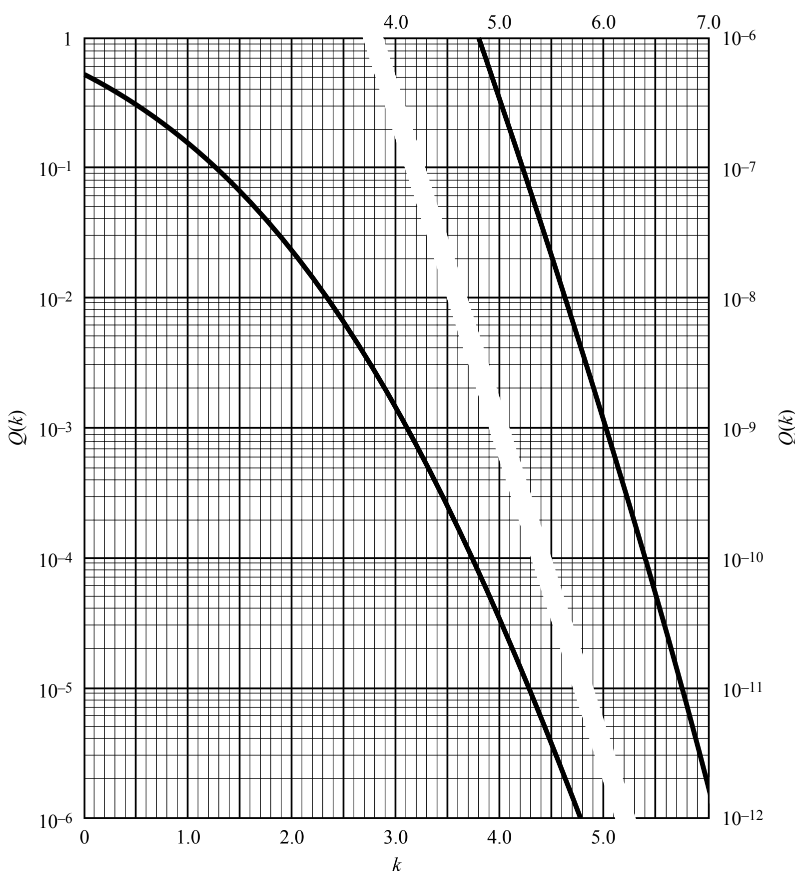
- En el caso de señalización M-aria polar, para que $P_e \approx 10^{-5}$, se tiene que cumplir que

$$SNR_R \approx 6(M^2 - 1).$$

- Relación señal a ruido en sistema PCM

$$\left(\frac{S}{N}\right)_D = \frac{S_x}{X_m^2}\left(\frac{3q^2}{1 + 4q^2 P_e}\right)\frac{f_s}{2W}.$$

- Función $Q(k)$ (cola de gaussiana)



Solución

Pregunta 1

(a) Ver teórico.

(b) Ver teórico.

(c) La probabilidad de confundir un "0" con un "1" es

$$P_{e_0} = Q\left(\frac{V}{\sigma}\right) = Q\left(\frac{A}{4\sigma}\right) = Q\left(\frac{1}{4 \times 0.12}\right) \approx Q(2.1) \approx 2 \times 10^{-2}$$

La probabilidad de confundir un "1" con un "0" es

$$P_{e_1} = Q\left(\frac{A-V}{\sigma}\right) = Q\left(\frac{3A}{4\sigma}\right) = Q\left(\frac{3}{4 \times 0.12}\right) \approx Q(6.3) \approx 2 \times 10^{-10}$$

La probabilidad total de error es

$$P_e = \frac{1}{2}\left(P_{e_0} + P_{e_1}\right) \approx 1 \times 10^{-2}$$

El umbral óptimo del receptor es $V = A/2$, y en ese caso, la probabilidad de error es

$$P_e = Q\left(\frac{A}{2\sigma}\right) = Q\left(\frac{1}{2 \times 0.12}\right) \approx Q(4.2) \approx 2 \times 10^{-5}$$

Pregunta 2

(a) Ver teórico.

(b) Ver teórico.

Problema 1

(a) La densidad espectral de potencia de una señal PAM de la forma

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k p(t - kD)$$

es

$$G_x(f) = \sigma_a^2 r_b |P(f)|^2 + (\mu_a r_b)^2 \sum_{k=-\infty}^{\infty} |P(kr_b)|^2 \delta\left(f - kr_b\right). \tag{1}$$

Como el código de línea es con retorno a cero, el pulso conformador es

$$p(t) = \Pi\left(\frac{t}{T_b/2}\right)$$

que tiene transformada de Fourier

$$P(f) = \frac{T_b}{2}\operatorname{sinc}\frac{fT_b}{2} = \frac{1}{2r_b}\operatorname{sinc}\frac{f}{2r_b}.$$

Como $a_k = \pm A/2$ de forma equiprobable, se tiene que

$$\mu_a = 0, \qquad \sigma_a^2 = \frac{A^2}{4}$$

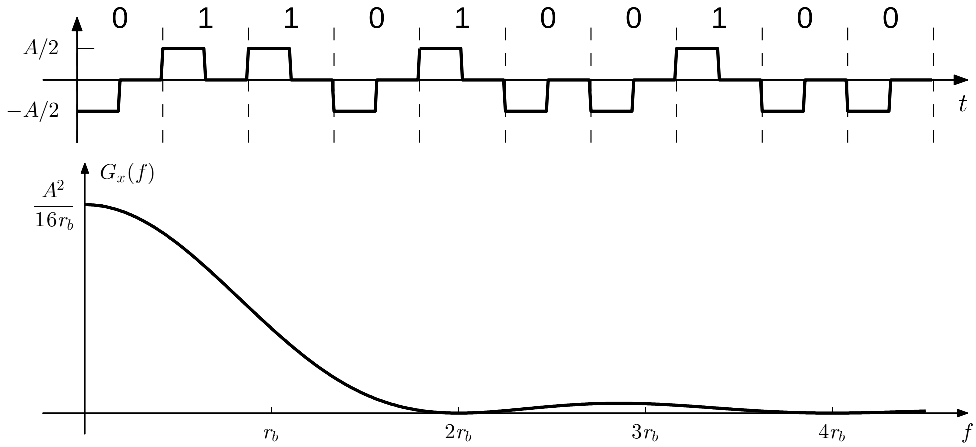


Figura 1: Densidad espectral de potencia de PAM polar RZ.

Sustituyendo en la ecuación 1 se llega al resultado buscado

$$G_x(f) = \frac{A^2}{16r_b}\,\text{sinc}^2\,\frac{f}{2r_b}.$$

donde $r_b = 1/T_b$.
Si se usa como criterio de ancho de banda la frecuencia donde se produce el primer cruce por cero, la señal PAM tiene ancho de banda $2r_b$.
Como los símbolos son equiprobables, la potencia de la señal PAM coincide con la potencia de la señal periódica $x_p(t)$ obtenida de codificar la secuencia $\dots 1010101010\dots$. Por lo tanto, la potencia se puede calcular como

$$\begin{aligned}
S_x &= \frac{1}{2T_b}\int_0^{2T_b} x_p^2(t)dt \\
&= \frac{1}{2T_b}\left[\int_0^{T_b/2}\left(\frac{A}{2}\right)^2 dt + \int_{T_b}^{3Tb/2}\left(-\frac{A}{2}\right)^2 dt\right] \\
&= \frac{1}{T_b}\int_0^{T_b/2}\frac{A^2}{4}dt \\
&= \frac{A^2}{8}
\end{aligned}$$

Una alternativa para calcular la potencia, es mediante la integral de la densidad espectral de potencia,

$$\begin{aligned}
S_x = R_x(0) &= \int_{-\infty}^{\infty} G_x(f)df \\
&= \frac{A^2}{16r_b}\int_{-\infty}^{\infty}\text{sinc}^2\left(\frac{f}{2r_b}\right)df. \qquad (2)
\end{aligned}$$

La identidad de Parseval indica que si $x(t)$ y $X(f)$ son un par de transformadas de Fourier, se cumple que

$$\int_{-\infty}^{\infty}|x(t)|^2dt = \int_{-\infty}^{\infty}|X(f)|^2df$$

Como

$$\frac{2}{T_b}\Pi\left(\frac{t}{T_b/2}\right) \quad \overset{\mathcal{F}}{\longleftrightarrow} \quad \text{sinc}\,\frac{fT_b}{2} = \text{sinc}\,\frac{f}{2r_b},$$

por la identidad de Parseval se tiene que

$$\int_{-\infty}^{\infty}\text{sinc}^2\left(\frac{f}{2r_b}\right)df = \int_{-\infty}^{\infty}\left[\frac{2}{T_b}\Pi\left(\frac{t}{T_b/2}\right)\right]^2 dt = \int_0^{T_b/2}\left(\frac{2}{T_b}\right)^2 dt.$$

Sustituyendo en la ecuación 2 con $r_b = 1/T_b$

$$\begin{aligned} S_x &= \frac{A^2}{16r_b}\int_0^{1/(2r_b)} (2r_b)^2 df \\ &= \frac{A^2}{16r_b}4r_b^2\left(\frac{1}{2r_b}-0\right) \\ &= \frac{A^2}{8}. \end{aligned}$$

(b) El filtro $H_R(f)$ del receptor tiene que eliminar el ruido sin introducir ISI. Por lo tanto, la frecuencia de corte debe ser

$$B_R = 2r_b = \frac{2}{T_b}\ \text{Hz}.$$

De esta forma el pasabajos deja pasar el lóbulo principal de la señal PAM, que es donde está contenida la mayor parte de la energía.

(c) El resultado se muestra en la figura 2.

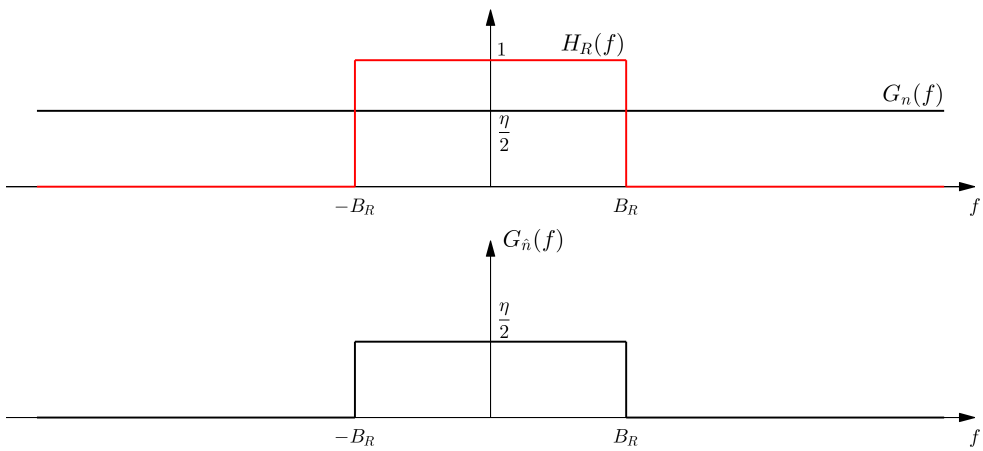


Figura 2: Ruido introducido por el canal antes y después del filtro pasabajos del receptor.

(d) La probabilidad de error de bit del receptor regenerativo es

$$P_e = Q\left(\frac{A}{2\sigma}\right)$$

Como el transmisor compensa la atenuación del canal, se cumple que $S_R = S_x$, y por la parte (a) se tiene que

$$S_R = \frac{A^2}{8}$$

Además, teniendo en cuenta que $N_R = \sigma^2$,

$$\frac{S_R}{N_R} = \frac{A^2}{8\sigma^2} \quad\Longleftrightarrow\quad \frac{2S_R}{N_R} = \frac{A^2}{4\sigma^2} \quad\Longleftrightarrow\quad \frac{A}{2\sigma} = \sqrt{2SNR_R}.$$

Finalmente, la probabilidad de error para este sistema queda

$$P_e = Q\left(\sqrt{2SNR_R}\right).$$

Si se usa codificación polar NRZ, la probabilidad de error del receptor es

$$P_e = Q\left(\sqrt{SNR_R}\right)$$

y como la función $Q(k)$ es monótonamente decreciente con k, la probabilidad de error con el código RZ es menor que con el código NRZ para SNR_R iguales, o equivalentemente, para potencias de transmisión iguales.

Problema 2

(a) Para que no exista ISI el ancho de banda de transmisión debe cumplir $B_T \geq r/2$. La cadencia de símbolos de la señal PCM es $r = nf_s$ y se tiene que cumplir el teorema de muestreo si se quiere reconstruir la señal, por lo tanto $f_s \geq 2W_x$. Combinando estas inecuaciones se tiene que

$$2W_x \leq fs \leq \frac{2B_T}{n} \tag{3}$$

y por lo tanto,

$$n \leq \frac{B_T}{W_x}.$$

Sustituyendo los valores de la letra

$$n \leq \frac{(22 \text{ kHz})}{(5 \text{ kHz})} \qquad \Longrightarrow \qquad n_{max} = 4$$

(b) El rango de frecuencias válidas está dado por la ecuación 3,

$$2(5 \text{ kHz}) \leq fs \leq \frac{2(22 \text{ kHz})}{n_{max}} \qquad \Longrightarrow \qquad 10 \text{ kHz} \leq fs \leq 11 \text{ kHz}$$

(c) Como se trabaja sobre el umbral de error, el ruido de cuantización predomina sobre el ruido de decodificación ($P_e \ll 1/4q^2$) resultando en

$$\left(\frac{S}{N}\right)_D = 3q^2 S_x \geq 10^{50\text{dB}/10} = 1 \times 10^5 \tag{4}$$

Como $q = M^n$, y la potencia de la señal es

$$S_x = \int_{-\infty}^{+\infty} G_x(f)df = 1,$$

sustituyendo estos resultados en la ecuación 4 y despejando M se llega a que

$$M^{n_{max}} \geq \sqrt{\frac{1 \times 10^5}{3}} \approx 183$$

Con $n_{max} = 4$, el primer entero M que verifica esta expresión es $M_{min} = 4$, con lo cual se tienen $q = 256$ niveles de cuantización.
Dado los valores de f_s y n_{max}, la cadencia de símbolos resultante es

$$r = nf_s = 4 \text{ símbolos/muestra} \times 10000 \text{ muestras/s} = 40 \text{ kbaudios}.$$

y la cadencia en kbps es

$$r_b = r \log_2 M = 2r = 80 \text{ kbps}.$$

(d) En el caso de codificación M-aria polar NRZ se puede demostrar que para que $P_e \approx 10^{-5}$, se tiene que cumplir que $SNR_R \approx 6(M^2 - 1)$, que con los valores obtenidos resulta en $SNR_R \approx 90$.