Modulación y procesamiento de señales
Segundo parcial – Curso 2013

Tecnólogo en Telecomunicaciones - FING/CURE
Universidad de la República

8 de julio de 2013

Indicaciones:

- La prueba tiene una duración de 4 horas y un total de 60 puntos.
- Cada hoja entregada debe indicar nombre, número de C.I., y número de hoja. La hoja 1 debe indicar además el total de hojas entregadas.
- Cada problema o pregunta se deberá comenzar en una hoja nueva. Se evaluará explícitamente la claridad, prolijidad y presentación de las soluciones, desarrollos y justificaciones.
- Pueden utilizarse resultados teóricos del curso sin hacer su deducción siempre que la letra no lo exija explícitamente. Se evaluará la correcta formulación y validez de las hipótesis.

Pregunta [12 pts.]

Para las siguientes afirmaciones, conteste si son verdaderas o falsas, justificando su respuesta.

(a) En un sistema ASK binario si se aumenta el tiempo de bit la probabilidad de error en recepción aumenta.

(b) La eficiencia espectral de un sistema 4-QAM es mayor que la eficiencia espectral de un sistema ASK binario.

(c) La potencia trasmitida en un sistema 8-PSK es menor que la potencia trasmitida en un sistema 16-PSK.

Problema 1 [18 pts.]

Considere una fuente binaria que genera símbolos de manera independiente a una tasa $r_b = 1/T_b$ conocida. Se sabe que la probabilidad de enviar un '1' es $\mathbf{p}$. Se trasmite esta información con un sistema digital banda base. Se utiliza una señalización polar $\{a_k\} = \{A, -A\}$ y un pulso conformador $p(t) = \Pi\left(\frac{t}{T_b}\right)$.

(a) Encontrar una expresión para la densidad espectral de potencia de la señal conformada en función de la probabilidad $\mathbf{p}$. Bosquejar.

(b) ¿Que valor de $\mathbf{p}$ permite aprovechar al máximo la potencia de transmisión?

(c) ¿Que ancho de banda mínimo es requerido en el canal de trasmisión?

Suponga que el canal tiene ancho de banda B_T banda base que cumple con los requerimientos mínimos e introduce ruido que se puede modelar como blanco, aditivo, gaussiano con densidad espectral de potencia $\eta/2$ constante. El filtro de recepción tiene ancho de banda $B_R = B_T$ y se muestrea en el instante óptimo.

(d) ¿Cuál es el umbral de decisión óptimo en el comparador para **p**= 0.7?

Si ahora se desea transmitir la misma información binaria pero a través de un sistema de modulación pasabanda 4-QAM.

(e) ¿Qué ancho de banda mínimo es requerido? El canal anterior, ¿necesariamente cumple con este requerimiento? Explique.

(f) Dibuje la constelación de un sistema de estas características.

Problema 2 [15 pts.]

Se desea enviar señales analógicas (supuestas normalizadas) utilizando un sistema PCM con un codifador M-ario de 16 dígitos. La máxima frecuencia de muestreo que puede lograr el sistema disponible es de $f_s = 10$ kHz.

(a) Realice los diagramas de bloques de el trasmisor y el receptor PCM.

(b) ¿Cuál es el ancho de banda máximo W_{max} para las señales de entrada?

Suponga que tiene una señal analógica a trasmitir con ancho de banda coincidente con W_{max} y potencia de señal $S_x = 1$. El canal tiene ancho de banda $B_T = 20$ kHz, atenuación de $L = 1$ e introduce ruido de valor $\eta = 10^{-8}$ W/Hz en las hipótesis usuales. El filtro de recepción tiene ancho de banda $B_R = B_T$

(c) ¿Cuál es la máxima cantidad de dígitos, n_{max}, que se pueden utilizar?

(d) ¿Cuál es la mínima potencia de transmisión S_T que se debe utilizar?

Se requiere que la SNR_D sea de por lo menos 50 dB. Suponga que el ruido de cuantificación domina frente al ruido de decodificación.

(e) Si se utiliza el valor de n_{max} hallado, ¿se logra cumplir este requerimiento?

Problema 3 [15 pts.]

Se tiene una señal analógica $x(t)$ conocida cuya transformada de Fourier es,

$$X(f) = \mathcal{F}\{x(t)\} = \begin{cases} \alpha|f| & si\ |f| \leq f_x \\ 0 & si\ |f| > f_x \end{cases}$$

con $f_x = 5$ kHz. La constante α es tal que la potencia de señal S_x es igual a 1. Se dispone de un trasmisor AM con $\mu = 1/2$ y de un trasmisor FM que utiliza una frecuencia de desviación de 20 kHz.

(a) Dé la expresión general de la señal modulada en AM y en FM.

(b) Halle el espectro de la señal modulada en AM y realice un esbozo.

(c) Halle el ancho de banda requerido para ambas modulaciones y compárelos.

Suponga que la SNR_R de ambos sistemas supera el umbral mínimo requerido.

(d) Calcule el cociente entre las SNR_D y comente el resultado.

Solución

Pregunta

(a) **FALSO**. $P_e = Q\left(\sqrt{\frac{E_b}{\eta}}\right)$. Donde por definición la energía de bit es: $E_b = \int_{-\infty}^{+\infty}(s_o^2(t) + s_1^2(t))dt$. Con lo cual se puede ver que si aumenta el tiempo de bit, aumenta la energía de bit y por tanto disminuye la probabilidad de error.

(b) **VERDADERO**.
La eficiencia espectral se define como $E_f = rb/Bt$. Supongamos que se conforma con pulsos rectangulares de ancho $1/r_b$.
Para ASK binario (OOK) tenemos $B_T = r_b$ con lo cual nos da $E_f = 1$ bps/Hz.
Para 4-QAM $B_T = r_b/2$ pues hay que esperar dos bits de la fuente (a rb) para armar "un bit" QAM, con lo cual 2 bps/Hz.

(c) **FALSO**.
En PSK la densidad espectral de la señal modulada no depende del valor de M:

$$G_{lp}(f) = \frac{sinc^2(f/r)}{r}$$

Por tanto la potencia trasmitida, que es la integral de la densidad espectral, tampoco depende de M.

Problema 1

(a)

$$G_{x_{PAM}}(f) = \sigma_x^2 r_b |P(f)|^2 + m_x^2 r_b^2 \sum_{-\infty}^{+\infty} |P(kr_b)|^2 \delta(f - kr_b)$$

Donde $m_x = A(2p-1)$, $\sigma_x^2 = A^2(1-(2p-1)^2)$ y $|P(f)|^2 = T_b sinc(fT_b)$.
Con lo cual se obtiene:

$$G_{x_{PAM}}(f) = A^2(1-(2p-1)^2)T_b sinc^2(fT_b) + A^2(2p-1)^2\delta(f)$$

(b) El valor de **p** solo afecta a los valores de m_x y σ_x. La delta no aporta información, entonces si no estuviera la delta se aprovecharía la potencia solo en enviar información. Esto ocurre cuando **p**$= 1/2$.

(c) Depende del criterio utilizado. Si se deja pasar medio lóbulo $B_T = r_b/2$, en cambio si se deja pasar todo el lóbulo $B_T = r_b$.

(d)

$$\lambda = \frac{a_0 + a_1}{2} + \frac{2\sigma_{r_{ruido}}^2}{a_1 - a_0} \ln\left(\frac{p_0}{p_1}\right)$$

Como $a_0 = -A$, $a_1 = A$, $\sigma_{r_{ruido}}^2 = \eta B_T$ y $p_1 = \mathbf{p}$ resulta: $\lambda = \frac{\eta B_T}{A}\ln\left(\frac{1-p}{p}\right)$.

(e) Los anchos de banda PAM y QAM quedan iguales en número (dependiendo del criterio que se haya utilizado), pero difieren en algo muy importante. Uno es un ancho de banda banda-base y el otro un ancho de banda pasabanda. No necesariamente el canal anterior sirve puesto que asegura $r_b/2$ (o r_b) banda-base.

(f) Ver teórico.

Problema 2

(a) Ver teórico.

(b) Por teorema de muestreo $W_{max} = 5$ kHz.

(c) Tenemos que $B_T \geq nf_s/2$ por lo tanto $2B_T/f_s \geq n$ y se tiene

$$n_{max} = 2B_T/f_s = 4.$$

(d) La S_T mínima es la necesaria para superar $SNR_R^{umbral} \approx 6(M^2 - 1)$. Por lo tanto como $SNR_R = S_T/(L\eta B_T)$ se tiene que $S_T^{min} = L\eta B_T 6(M^2 - 1)$.

(e) El ruido de cuantificación domina frente al ruido de decodificación entonces se tiene que $P_e << 1/(4q^2)$, las señales se encuentran normalizadas $E_{max} = 1$, por lo que:

$$SNR_D = \frac{3q^2 S_x f_s}{2W} = 3M^{2n_{max}} S_x \approx 1.29 \times 10^{10} = 91dB \geq 50\ dB$$

Por lo tanto se logra cumplir el requerimiento.

Problema 3

(a) Modulación AM: $x_c(t) = A_C(1 + \mu x(t))cos(w_c t + \theta)$
Modulación FM: $x_c(t) = A_C cos(w_c t + \theta(t))$, donde $\dot{\theta}(t) = 2\pi f_\Delta x(t)$

(b) $X_C^{AM}(f) = A_c/2[\delta(f + fc) + \delta(f - fc) + \mu(X(f + f_c) + X(f - f_c))]$

(c) La señal tiene ancho de banda $W = f_x = 5$ kHz.
Modulación AM: ancho de banda pasabanda $B_T^{AM} = 2W = 10$ kHz
Modulación FM: se tiene una razón de desviación $D = \frac{f_\Delta}{W} = 4$. Con lo cual obtenemos un ancho de banda pasabanda $B_T^{FM} = 2(D + 2)W = 60$ kHz.

(d) Se tiene $SNR_D^{FM} = \frac{3f_\Delta^2 S_x S_R}{\eta W^3}$ y $SNR_D^{AM} = \frac{\mu^2 S_x S_R}{\eta W(1+\mu^2 S_x)}$. De lo cual resulta:

$$\frac{SNR_D^{FM}}{SNR_D^{AM}} = \frac{3D^2(1 + \mu^2 S_x)}{\mu^2} = \frac{3 \times 4^2 \times (1 + 1/4)}{1/4} = 240 >> 1$$

A partir de este resultado se puede concluir que la transmisión FM presenta, en comparación con la AM, una mayor calidad en la trasmisión de la señal.