

# Modulación y Procesamiento de Señales

## Solución del segundo parcial - Curso 2012

Tecnólogo en Telecomunicaciones - FING/CURE  
Universidad de la República

6 de julio de 2012

### Pregunta [14 pts.]

- (a) Ver teórico.
- (b) (i) Falso. El proceso de digitalización de la señal introduce un ruido de cuantificación que no puede ser evitado e introduce degradación en la reconstrucción de la señal.
- (ii) Verdadero. Al aumentar la potencia de ruido en el canal, disminuye para relación señal a ruido en recepción  $(SNR)_R$  y por tanto aumenta la probabilidad de error en la detección de un símbolo. Al aumentar esta probabilidad de error, aumenta el ruido de decodificación en la reconstrucción de la señal analógica original.
- (iii) Verdadero. Ver gráfico de la  $(SNR)_D$  en función de la  $(SNR)_R$  para PCM.
- (iv) Falso. Ver gráfico de la  $(SNR)_D$  en función de la  $(SNR)_R$  para PCM. Al partir del umbral de la relación señal a ruido en recepción  $(SNR)_R$ , un aumento de la misma no repercute en un aumento de la relación señal a ruido en detección  $(SNR)_D$ .
- (v) Verdadero. Un sistema PCM binario de  $q = 256$  niveles usa una cantidad de bits  $n = 8$ . El ancho de banda mínimo requerido es  $B_T \approx r/2 = \frac{nf_s}{2}$  y la mínima frecuencia de muestreo es  $f_s^{min} = 2W = 16$  kHz. Por tanto,  $B_T$  debe ser cómo mínimo 64 kHz.

### Problema 1 [12 pts.]

- (a) La densidad espectral de potencia es una densidad espectral de potencia PAM con  $m_a = 0$  y  $\sigma_a^2 = 1$ . Como el pulso es rectangular, la densidad espectral de potencia  $G_x(f)$  es:

$$G_x(f) = T_b \text{sinc}^2(T_b f)$$

- (b) El primer pasaje por cero de  $G_x(f)$  ocurre en  $f^* = 1/T_b$ . Utilizando, por ejemplo, el criterio que el filtro receptor no elimine el lóbulo primario se tiene que el ancho de banda  $B_R$  debe ser  $B_R = 1/T_b = 100$  kHz.
- (c) Como el transmisor amplifica la señal para compensar la atenuación del canal, el receptor recibe amplitudes  $a_1 = 1$  y  $a_0 = -1$ . Para el caso en que se tienen amplitudes equiprobables, el umbral óptimo de decisión es  $\lambda = \frac{a_1 + a_0}{2}$ , con lo cual resulta que  $\lambda = 0$  (aunque este resultado es independiente de la atenuación del canal pues ambas amplitudes se verían disminuidas por  $1/\sqrt{L}$ ), que no afecta el valor de  $\lambda$  hallado para este caso.

- (d) Para el caso binario equiprobable, la probabilidad de error puede ser calculada como:

$$P_e = Q\left(\frac{a_1 - a_0}{2\sigma_R}\right) = Q\left(\frac{1}{\sigma_R}\right)$$

La potencia de ruido en recepción es  $N_R = \eta B_R = 0.1$  y  $\sigma_R = \sqrt{N_R} \approx 0.32$ . Yendo a la hoja de fórmulas y evaluando en la cola Gaussiana en  $k = 1/\sigma_R \approx 3.1$ , se obtiene que  $P_e \approx 10^{-3}$ .

## Problema 2 [20 pts.]

- (a) El ancho de banda requerido para PSK es  $B_T \approx r$ . Como se trata del caso binario,  $r = r_b$ , y el ancho de banda requerido sería  $B_T = 2$  MHz con lo que se puede ver que el ancho de banda de 700 kHz disponible no alcanza.
- (b) La probabilidad de error BPSK se puede hallar como  $P_e = Q(\sqrt{2E_B/\eta})$  donde la energía de bit  $E_b$  se calcula para el caso BPSK como  $E_b = A_c^2 T_b / 2$ . De aquí, y utilizando la cola Gaussiana de la hoja de fórmulas, se obtiene:

$$P_e = Q\left(\sqrt{\frac{2E_B}{\eta}}\right) = Q\left(\sqrt{\frac{A_c^2 T_b}{\eta}}\right) \approx Q(2.2) \quad \rightarrow \quad P_e \approx 10^{-2}$$

- (c) Para el caso  $M$ -ario,  $B_T \approx r = r_b / \log_2(M) \leq 700$  kHz, de donde se obtiene que  $M$  debe ser tal que  $M \geq 2^{(r_b/700\text{kHz})} \approx 7.2$ . Finalmente el mínimo valor es  $M = 8$ .
- (d) La eficiencia espectral es  $E_f = r_b / B_T = r_b / r = \log_2(M) = 3$  bps/Hz y el ancho de banda  $B_T = r = r_b / \log_2(M) \approx 667.7$  kHz.
- (e) Ver teórico.
- (f) La probabilidad de error para un sistema M-PSK con  $M \geq 4$  se puede estimar como:

$$P_e \approx 2Q\left(\sqrt{\frac{2E_s}{\eta}} \sin \frac{\pi}{M}\right) \quad \text{con} \quad E_s = E_b \log_2(M) \quad \rightarrow \quad P_e \approx 2Q(1.5) \approx 0.2$$

## Problema 3 [14 pts.]

- (a) La razón de desviación es  $D = f_\Delta / W$ , por tanto se obtiene  $D = 4$ .
- (b) Para el caso de razón de desviación  $D = 4$ , el ancho de banda FM debe estimarse por  $B_T \approx 2(D + 2)W$ , con lo cual se obtiene  $B_T \approx 216$  kHz.
- (c) La señal y el ruido en recepción son respectivamente  $S_R = S_T / L$  y  $N_R = \eta B_T$ . Entonces,

$$(SNR)_R = \frac{S_T}{L\eta B_R} \geq 10 \quad \rightarrow \quad S_T \geq 10L\eta B_R$$

de lo que se obtiene que la potencia mínima es  $S_T^{min} \approx 5.4$  W.

- (d) La potencia de transmisión utilizada es  $S_T \approx 10.8$  W. La relación señal a ruido en detección  $(SNR)_D$  para FM se puede expresar de la siguiente manera,

$$(SNR)_D = \frac{3S_T f_\Delta^2 S_x}{L\eta W^3}$$

con lo cual se obtiene  $(SNR)_D \approx 37.6$  dB.