

# Modulación y Procesamiento de Señales

## Segundo Parcial

CURE

25 de mayo de 2010

### Indicaciones:

- La prueba tiene una duración total de 3 horas y media.
- Cada hoja entregada debe indicar nombre, número de C.I., y número de hoja. La hoja 1 debe indicar además el total de hojas entregadas.
- Se deberá utilizar únicamente un lado de las hojas.
- Cada problema o pregunta se deberá comenzar en una hoja nueva.
- Se evaluará explícitamente la claridad, prolijidad y presentación de las soluciones, desarrollos y justificaciones.
- Pueden utilizarse resultados teóricos del curso sin hacer su deducción siempre que la letra no lo exija explícitamente. Se evaluará la correcta formulación y validez de hipótesis.

### Problema 1 [10 pts.]

Considerar una señal aleatoria binaria con valores 0 y 1 equiprobables, independientes entre sí. Ésta se codifica en forma unipolar donde a los pulsos se les da la siguiente forma:

$$f(t) = \begin{cases} \cos\left(\frac{\pi t}{T_b}\right) & |t| < \frac{T_b}{2} \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

$T_b$  es el tiempo de un bit.

- (a) Bosquejar un ejemplo de la onda conformada.
- (b) Encontrar una expresión para la densidad espectral de potencia de la señal. Bosquejar.

### Problema 2 [15 pts.]

Se desea enviar una señal  $x(t)$  normalizada en  $(-1, 1)$ , con un ancho de banda  $W = 5 \text{ kHz}$  y potencia  $S_x = 0.6$ , utilizando un sistema PCM M-ario con una  $SNR_D$  de al menos  $50 \text{ dB}$ .

- (a) Dibujar el diagrama de bloques de un sistema PCM M-ario. Dar los criterios utilizados para determinar la frecuencia de muestreo  $f_s$  y el número de niveles  $q$  para lograr la  $SNR_D$  pedida.
- (b) Bosquejar la  $SNR_D$  en función de la  $SNR_R$ , paramétrico en  $q$ . Indicar el punto de trabajo óptimo. Justificar.

Si el canal tiene un ancho de banda  $B_T = 20 \text{ kHz}$ ,  $\eta = 10^{-7} \text{ watts/Hz}$  y produce una atenuación  $L = 10$  en potencia.

- (c) Calcular la potencia mínima de transmisión para lograr la  $SNR_D$  deseada trabajando en el punto indicado en (b). Dar los parámetros  $m$ ,  $n$ ,  $q$  del sistema.

### Problema 3 [15 pts.]

Se desea evaluar el desempeño de dos sistemas digitales pasabanda, uno utiliza una modulación ASK y el otro QPSK. La densidad espectral de potencia del ruido es  $G_{\eta}(f) = \frac{\eta}{2} = 1 \times 10^{-6} \frac{W}{Hz}$ . La potencia transmitida es tal que la potencia recibida en destino es  $S_x = 1W$  y la tasa de pulsos enviados es  $r = 30000 \text{ pulsos/segundo}$ . Considerando que la energía recibida por bit es:

$$E_b = S_x/r_b$$

donde  $r_b$  es la tasa de bits transmitidos por segundo.

- Dibujar la constelación para el sistema ASK. Hallar la tasa de bits  $r_b$  obtenida por el sistema.
- Calcular la probabilidad de error obtenida para el sistema ASK.
- Dibujar la constelación para el sistema QPSK. Hallar la tasa de bits  $r_b$  obtenida por el sistema.
- Calcular la probabilidad de error obtenida para el sistema QPSK.
- Indicar las diferencias observadas en el desempeño de ambos sistemas.

### Problema 4 [10 pts.]

Se desea transmitir una señal utilizando un sistema de modulación FM con las siguientes características:  $S_R = 0.1 \text{ watts}$ ,  $S_x = \frac{1}{4}$ ,  $W = 16kHz$ ,  $\eta = 3 \times 10^{-8} W/Hz$ . Asumir que el canal no introduce atenuación por lo que  $S_T = S_R$ .

Si se trabaja con  $f_{\Delta} = 100 \text{ kHz}$ :

- Calcular la  $SNR_D$  obtenida. Calcular el ancho de banda utilizado.

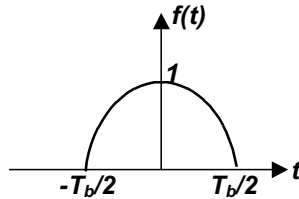
Si se trabaja con  $f_{\Delta} = 200 \text{ kHz}$ :

- Calcular la  $SNR_D$  que se obtendría. Calcular ancho de banda utilizado.
- Analizar y comparar el comportamiento de ambos sistemas. Explicar detalladamente.

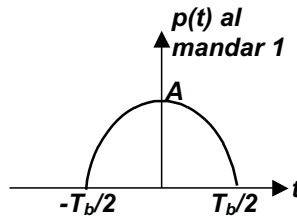
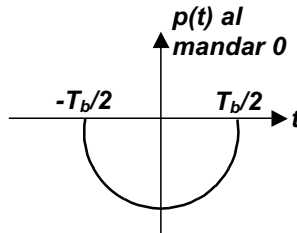
# Solución

## Problema 1

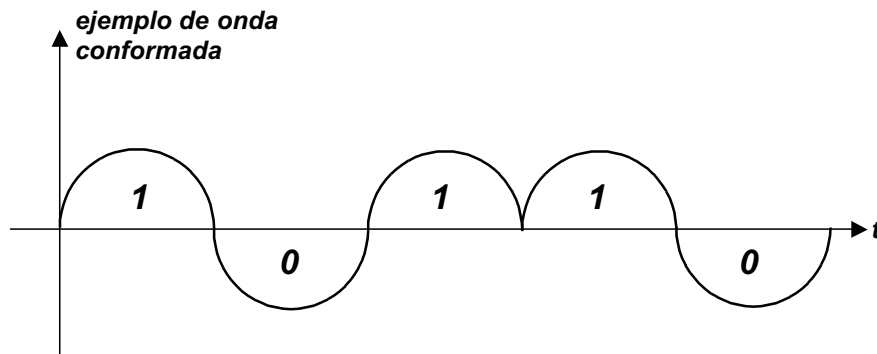
(a) Primero que nada, graficamos  $f(t)$ . Esto se muestra en la siguiente figura.



Luego, como se usa codificación polar, se tiene que el 0 se envía con amplitud  $-A$ , mientras el 1 se envía con amplitud  $A$ . La forma que tiene el pulso que representará el 0 y el 1 se muestran en las siguientes figuras.



Finalmente, un ejemplo de la onda conformada, es decir, la forma de la onda al mandar una cierta secuencia de 0's y 1's (en este caso se usó 10110), se muestra en la siguiente figura.



(b) Dado que  $x(t)$  es una señal PAM, sabemos que su densidad espectral de potencia es de la forma:

$$G_x(f) = \frac{\sigma_a^2 |P(f)|^2}{T_b} + \frac{m_a^2}{T_b^2} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \left| P\left(\frac{k}{T_b}\right) \right|^2 \delta\left(f - \frac{k}{T_b}\right)$$

Calculamos la media de la señal,  $m_a$ , y su varianza,  $\sigma_a^2$ :

$$m_a = \frac{1}{2}A + \frac{1}{2}(-A) = 0$$

$$\sigma_a^2 = R_{a_k}(0) - m_a^2 = R_{a_k}(0) = \frac{1}{2}A^2 + \frac{1}{2}(-A)^2 = A^2$$

$$\Rightarrow G_x(f) = \frac{A^2 |P(f)|^2}{T_b}$$

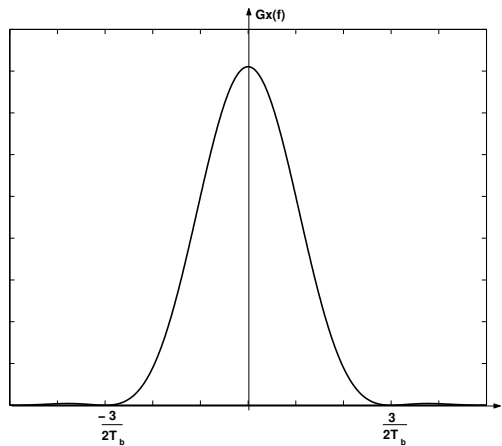
Como  $p(t) = \cos\left(\frac{\pi t}{T_b}\right) \cdot \Pi\left(\frac{t}{T_b}\right)$ , se cumple que:

$$\begin{aligned} P(f) &= \left[ \frac{\delta(f - 1/2T_b) + \delta(f + 1/2T_b)}{2} \right] * T_b \cdot \text{sinc}(fT_b) \\ &= \frac{T_b}{2} [\text{sinc}(T_b f - 1/2) + \text{sinc}(T_b f + 1/2)] \end{aligned}$$

Entonces, la densidad espectral de potencia de  $x(t)$  queda:

$$G_x(f) = \frac{A^2 T_b |\text{sinc}(T_b f - 1/2) + \text{sinc}(T_b f + 1/2)|^2}{4}$$

La siguiente figura muestra un bosquejo de la forma de  $G_x(f)$ .



## Problema 2

(a)

$$f_s \text{geq} 2 * W = 10 \text{ kHz}$$

$$SNR_D = 3q^2 Sx \text{ por lo tanto } q \geq \sqrt{\frac{100000}{3 * 0.33}} = 236$$

(b)

(c)

$$n = 2$$

$$m = 2^4$$

$$q = M^n = 2^8 = 256 > 236$$

$$SNR_R = \frac{S_R}{\eta B_T} g e q 6 (m^2 - 1)$$

$$S_R g e q 6 \eta B_T (m^2 - 1) = 3.06 \text{ watts}$$

### Problema 3

(b)

$$P_e = Q\left(\sqrt{\frac{E_b}{\eta}}\right) = Q\left(\sqrt{\frac{1/30000}{2 \times 10^{-6}}}\right) = Q(4.08)$$

(d)

$$P_e = Q\left(\sqrt{2\frac{E_b}{\eta}}\right) = Q\left(\sqrt{2\frac{1/(30000 * 2)}{2 \times 10^{-6}}}\right) = Q(4.08)$$

(e) Tienen la misma probabilidad de error, QPSK transmite el doble de información que ASK.

### Problema 4

(a)

$$D = 100/16 = 6.25$$

$$SNR_D = 3D^2 S_x \gamma = 3 \frac{f_{\Delta}^2}{W^2} S_x \frac{S_R}{\eta W} = 2 \frac{100000^2}{16000^2} \times 0.25 \frac{0.05}{5 \times 10^{-8} 16000} = 38dB$$

$$B_T = 2(D + 2)16kHz = 264kHz$$

Verificamos que estamos por encima del umbral:

$$SNR_R = \frac{S_R}{\eta B_T} = \frac{0.1}{10^{-8} 264kHz} = 12.6 > 10$$

(b)

$$D = 200/16 = 6.25$$

$$SNR_D = 3D^2 S_x \gamma = 3 \frac{f_{\Delta}^2}{W^2} S_x \frac{S_R}{\eta W} = 2 \frac{120000^2}{16000^2} \times 0.25 \frac{0.05}{10^{-8} 16000} = 44dB$$

$$B_T = 2(D + 1)16kHz = 432kHz$$

Verificamos que estamos por encima del umbral:

$$SNR_R = \frac{S_R}{\eta B_T} = \frac{0.1}{3 \times 10^{-8} 432kHz} = 7.7 < 10$$

Por lo que no se trabaja por encima del umbral