Modulación y Procesamiento de Señales
Primer Parcial 2016

Tecnólogo en Telecomunicaciones - FING/CURE
Universidad de la República

23 de mayo de 2016

Indicaciones:

- La prueba tiene una duración total de 3 horas.
- Cada hoja entregada debe indicar nombre, número de C.I., y número. La hoja 1 debe indicar además el total de hojas entregadas.
- Se deberá utilizar únicamente un lado de las hojas.
- Cada problema o pregunta se deberá comenzar en una hoja nueva.
- Se evaluará explícitamente la claridad, prolijidad y presentación de las soluciones, desarrollos y justificaciones.
- Pueden utilizarse resultados teóricos del curso sin hacer su deducción siempre que la letra no lo exija explícitamente. Se evaluará la correcta formulación y validez de hipótesis.

Pregunta [10 pts.]

(a) Definir linealidad, invariancia en el tiempo y estabilidad BIBO para sistemas discretos.

(b) Enunciar la condición necesaria y suficiente de estabilidad BIBO para sistemas lineales invariantes en el tiempo .

(c) Estudiar estabilidad de los siguientes sistemas:

(i) $y[n] = x[n] + 2x[n-1] + x[n-2]$

(ii) $y[n] = x[2n]$

(iii) $h[n] = \sin(\pi n/3)u[n]$

Problema 1 [15 pts.]

Una señal $x_c(t)$ con el espectro de la Figura 1 se muestrea a una frecuencia f_s para obtener $x[n] = x(nT_s)$. Se desea enviar la señal $x[n]$ a través de un enlace digital que permite una transferencia máxima de muestras por segundo de $f_{max} = \frac{4}{3} f_1$.

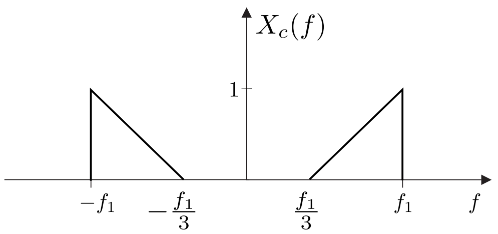


Figura 1: Espectro de la señal $x_c(t)$.

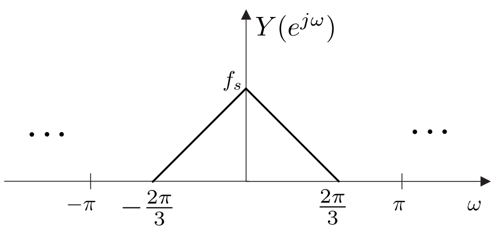


Figura 2: Espectro de la señal $y[n]$.

(a) Determinar el rango de frecuencias de muestreo útiles para transmitir la señal sin pérdidas. ¿ Es posible transmitir las muestras $x[n]$ utilizando el enlace digital disponible?

Se transmite hacia el enlace utilizando el sistema de la Figura y muestreando $x_c(t)$ con la mínima frecuencia f_s de las halladas en la parte anterior.

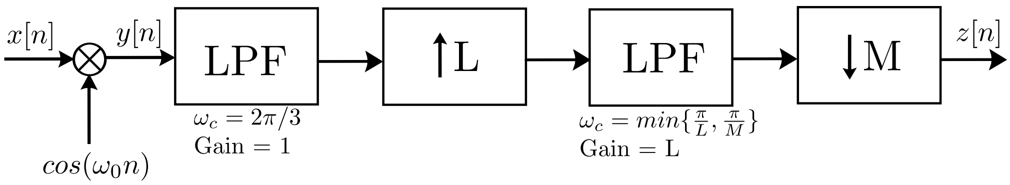


Figura 3: Sistema utilizado para transmitir hacia el enlace digital.

(b) Bosquejar $|X(e^{j\omega})|$, módulo del espectro de la señal $x[n]$, en función de $|X_c(f)|$.

(c) Encontrar el valor de ω_0 para que el espectro de $y[n] = x[n]cos(\omega_0 n)$ sea como el de la Figura 2.

(d) Calcular L y M de manera de poder transmitir $z[n]$ por el enlace digital.

(e) Bosquejar el espectro en cada etapa del sistema de la Figura .

(f) ¿Es posible recuperar la señal $y[n]$ a partir de $z[n]$? En caso afirmativo indique como lo haría.

Problema 2 [15 pts.]

Considere un sistema causal dado por la siguiente transferencia:

$$H(z) = \frac{\beta z}{(z - 1/2)(z + \alpha)}$$

Se pide:

(a) Encontrar la ecuación en recurrencias que relaciona la salida $y[n]$ con la entrada $x[n]$.

(b) Realizar diagrama de ceros y polos junto con la ROC de la transferencia. Estudiar estabilidad en función de los parámetros α y β. Justifique.

(c) Encontrar α y β para que la respuesta en frecuencia $H(e^{j\omega})$ valga $8/5$ en $\omega = 0$ y $8/3$ en $\omega = \pi$. ¿El sistema resulta estable? Justifique.

De ahora en adelante se utilizarán los valores de α y β calculados anteriormente.

(d) Calcular la respuesta al impulso $h[n]$ del sistema.

(e) Dibujar el diagrama de bloques del sistema en forma canónica (mínima cantidad de retardos).

Solución

Pregunta

(a)

(b)

(c)

(i) Se implementa con filtro FIR, entonces es estable.

(ii) Para toda entrada acotada la salida es acotada, entonces estable.

(iii) Nos dan $h[n]$ que caracteriza sistema SLIT. Como $\sum_{n=-\infty}^{+\infty} |h[n]|$ diverge, entonces el sistema no es estable.

Problema 1

(a) El rango de frecuencias según el teorema de muestreo es de $fs \geq 2f_1$.
Como la frecuencia máxima del enlace digital es de $f_{max} = \frac{4}{3}f_1 < 2f_1$, no es posible la transmisión de x[n] sin pérdidas por dicho enlace.

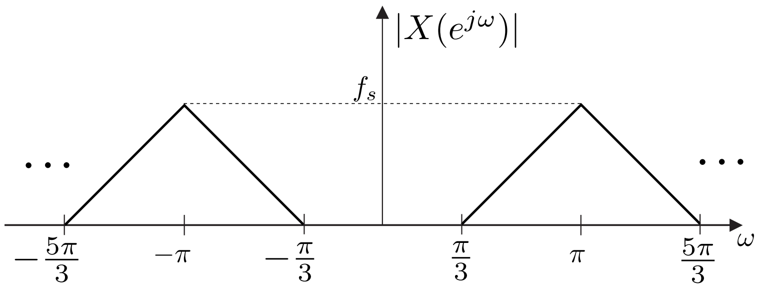


Figura 4: Módulo del espectro de $x[n]$.

(b)

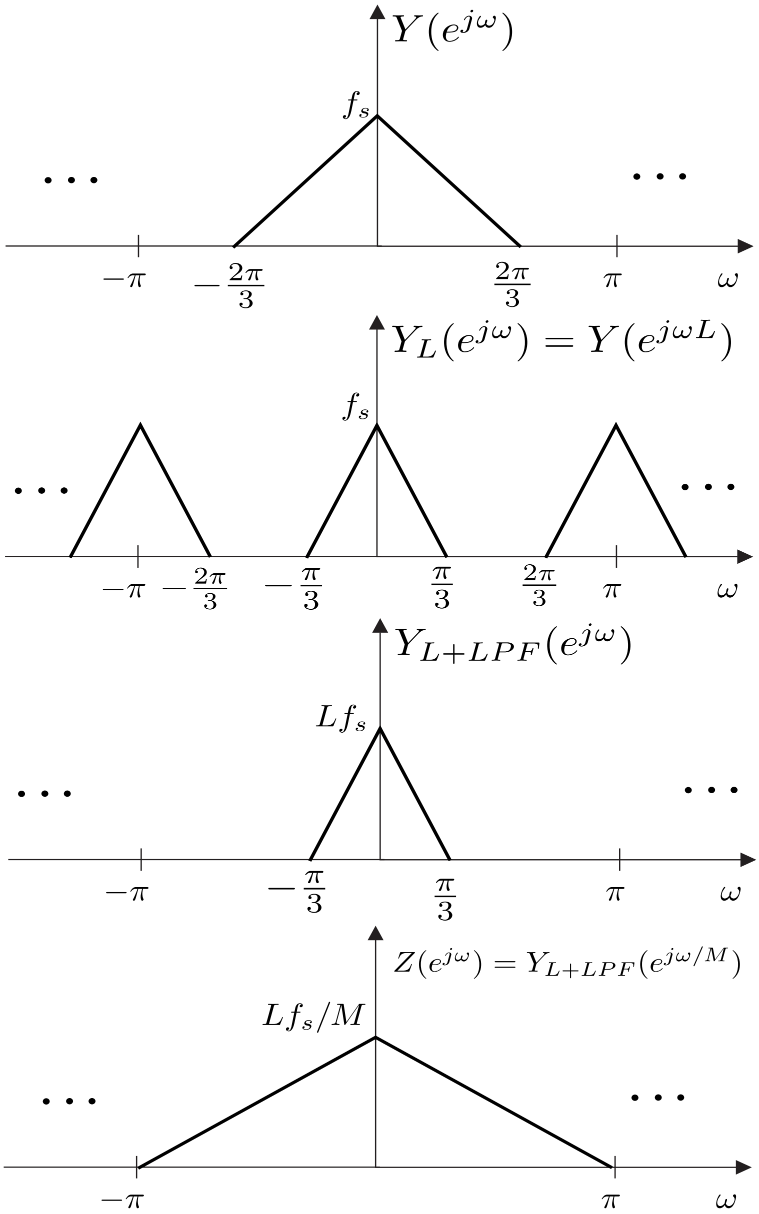
(c) $y[n] = x[n]cos(\omega_0 n) = x[n]\left\{\frac{e^{j\omega_0 n} + e^{-j\omega_0 n}}{2}\right\}$
Dado que $DTFT\{x[n]e^{jn\omega_0}\} = X\left(e^{j(\omega-\omega_0)}\right)$, se tiene que

$$Y(e^{j\omega}) = \frac{X\left(e^{j(\omega-\omega_0)}\right) + X\left(e^{j(\omega-\omega_0)}\right)}{2}$$

Viendo las gráficas de $X(e^{j\omega})$ e $Y(e^{j\omega})$ se puede deducir que $\omega_0 = \pi$.

(d) $z[n]$ tiene que tener una frecuencia de muestreo asociada $f_{max} = \frac{Lf_s}{M}$. Dado que $f_s = 2f_1$ se tienen $L = 2$ y $M = 3$.

(e)



(f) Sí es posible, se tendría que efectuar un cambio de frecuencia con un interpolador con $L = 3$, en serie con un pasabajos de $\omega_c = \frac{\pi}{3}$, Gain $= 3$ y por último un decimador con $M = 2$.

Problema 2

(a)

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{\beta z^{-1}}{(1 - \frac{1}{2}z^{-1})(1 + \alpha z^{-1})}$$

$$Y(z)\left(1 - \frac{1}{2}z^{-1}\right)\left(1 + \alpha z^{-1}\right) = \beta z^{-1} X(z)$$

$$Y(z)\left(1 - \frac{1}{2}z^{-1}\right)\left(1 + \alpha z^{-1}\right) = \beta z^{-1} X(z)$$

$$Y(z)\left(1-\frac{1}{2}z^{-1}+\alpha z^{-1}-\frac{\alpha}{2}z^{-2}\right)=\beta z^{-1}X(z)$$

Antitransformando se obtiene:

$$y[n]+\left(\alpha-\frac{1}{2}\right)y[n-1]-\frac{\alpha}{2}y[n-2]=\beta x[n-1]$$

(b)

$$H(z)=\frac{\beta z^{-1}}{(1-\frac{1}{2}z^{-1})(1+\alpha z^{-1})}$$

Entonces $H(z)$ tiene un cero en $z=0$ y polos en $z=1/2$ y $z=-\alpha$. Como el sistema es causal la ROC está dada por $|z|>\text{máx}(\alpha,\frac{1}{2})$. El sistema es estable si $|\alpha|<1$

(c)

$$H(e^{j0})=H(1)=\frac{\beta}{(1-1/2)(1+\alpha)}=\frac{8}{5}$$

$$\beta=\frac{4}{5}(1+\alpha) \tag{1}$$

$$H(e^{j\pi})=H(-1)=\frac{-\beta}{(-1-1/2)(-1+\alpha)}=\frac{8}{3}$$

$$\frac{\beta}{(3/2)(-1+\alpha)}=\frac{8}{3}$$

$$\beta=4(-1+\alpha) \tag{2}$$

Entonces, igualando (1) y (2) se obtiene:

$$\frac{4}{5}(1+\alpha)=4(-1+\alpha)$$

$$\alpha=3/2$$

$$\beta=2$$

Como $|\alpha|=3/2>1$ el sistema no resulta estable.

(d) Descomponemos en fracciones simples:

$$H(z)=\frac{A}{z-1/2}+\frac{B}{z+3/2}$$

Donde $A=1$ y $B=-1$. Antitransformando se obtiene:

$$h[n]=\left(\frac{1}{2}\right)^n u[n]-\left(-\frac{3}{2}\right)^n u[n]$$

(e) La ecuación en recurrencia resulta en:

$$y[n]=-y[n-1]+\frac{3}{4}y[n-2]+2x[n-1]$$

Entonces el diagrama de bloque es: