Modulación y Procesamiento de Señales
Primer parcial - Curso 2015

Tecnólogo en Telecomunicaciones - FING/CURE
Universidad de la República

25 de mayo de 2015

Indicaciones:

- La prueba tiene una duración total de 3 horas y media, y un total de 40 puntos.
- Cada hoja entregada debe indicar nombre, número de C.I., y número de hoja. La hoja 1 debe indicar además el total de hojas entregadas. Utilice únicamente un lado de las hojas.
- Cada problema o pregunta se deberá comenzar en una hoja nueva. Se evaluará explícitamente la claridad, prolijidad y presentación de las soluciones, desarrollos y justificaciones.
- Pueden utilizarse resultados teóricos del curso sin hacer su deducción siempre que la letra no lo exija explícitamente. Se evaluará la correcta formulación y validez de las hipótesis.

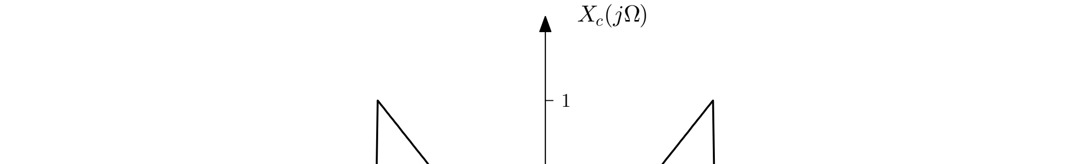
Pregunta [10 pts.]

(a) Enunciar la propiedad de linealidad, causalidad, estabilidad e invarianza temporal de los sistemas en tiempo discreto.

(b) Enunciar la condición necesaria y suficiente de estabilidad y causalidad de los sistemas lineales e invariantes en el tiempo.

Problema 1 [15 pts.]

Considere la señal en tiempo continuo $x_c(t)$ cuyo espectro $X_c(j\Omega)$ se muestra en la siguiente figura:



(a) Según el teorema de muestreo, ¿cuál es la mínima frecuencia con la que puede muestrearse la señal de forma de poder recuperarse a partir de las muestras?

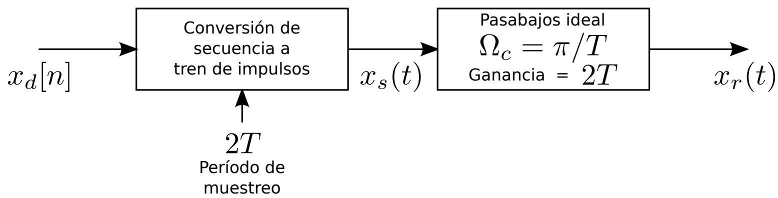
(b) Se decide muestrear la señal $x_c(t)$ a la frecuencia Ω_s (rad/s) hallada en la parte anterior. Bosqueje el espectro $X(e^{j\omega})$ de la señal en tiempo discreto resultante.

Suponga que la señal en tiempo discreto obtenida en la parte anterior se submuestrea un factor de $M = 2$. El submuestreo se realiza sin aplicar el filtrado pasabajos de frecuencia de corte π/M necesario para evitar solapamiento al decimar.

(c) ¿Cuál es la frecuencia de muestreo $\Omega_s^{'}$ de la señal $x_d[n]$ submuestreada? Indicar si se cumplen las condiciones del teorema de muestreo.

(d) Escribir la expresión del espectro de la señal submuestreada $X_d(e^{j\omega})$ en función del espectro $X(e^{j\omega})$ de la señal discreta original. Bosqueje el espectro $X_d(e^{j\omega})$ de la señal submuestreada. ¿Se produce solapamiento de las copias de los espectros?

La señal discreta submuestreada se convierte a tiempo continuo empleando el sistema reconstructor ideal mostrado en la siguiente figura:



(e) Esbozar el espectro de la señal reconstruida $x_r(t)$. ¿La señal reconstruida es igual a la señal original?

(f) ¿Es posible obtener la señal original a partir de $x_r(t)$? En caso de que la respuesta sea afirmativa, indicar la forma de hacerlo. De ser necesario el uso de filtros de selección de frecuencias, indique el tipo de filtro, la/las frecuencias de corte correspondientes y la ganancia.

Problema 2 [15 pts.]

Se considera el sistema con la siguiente ecuación en recurrencia

$$y[n] = x[n] + \alpha x[n-1] + \beta y[n-1],$$

donde los coeficientes α y β son reales y el sistema es causal.

(a) Calcular la función de transferencia $H(z)$ del sistema indicando la región de convergencia en función de α y β.

(b) Discutir la estabilidad del sistema en función de α y β.

(c) Calcular el módulo al cuadrado de la respuesta en frecuencia del sistema, es decir, $|H(e^{j\omega})|^2$.

Se quiere que el sistema tenga ganancia cuadrática 0 en la frecuencia 0 y 4/7 en la frecuencia $\pi/3$.

(d) Encontrar los valores de α y β asegurando que el sistema sea estable. Dibujar el diagrama de polos y ceros indicando la región de convergencia.

De aquí en mas, se trabajará con los valores de α y β calculados en la parte anterior.

(e) Calcular la salida del sistema si la entrada es $x[n] = -(2)^n u[-n-1]$. *Sugerencia:* hacer el calculo en el dominio z y antitransformar.

El sistema se pone en paralelo con otro sistema causal de función de transferencia

$$H_1(z) = \frac{2}{1-2z^{-1}}.$$

(f) Calcular la función de transferencia $H_p(z)$ y la ecuación en recurrencia del sistema equivalente.

Solución

Pregunta

(a) Propiedades de los sistemas discretos:

- *Linealidad*: Un sistema $T\{\cdot\}$ se dice lineal si cumple el principio de superposición. El principio de superposición indica que:

  Si la entrada $x_1[n]$ produce la salida $y_1[n]$

  $$y_1[n] = T\{x_1[n]\}$$

  y la entrada $x_2[n]$ produce la salida $y_2[n]$

  $$y_2[n] = T\{x_2[n]\}$$

  entonces, la entrada $ax_1[n] + bx_2[n]$ produce la salida $ay_1[n] + by_2[n]$, es decir,

  $$T\{ax_1[n] + bx_2[n]\} = aT\{x_1[n]\} + bT\{x_2[n]\} = ay_1[n] + by_2[n]$$

- *Causalidad*: Un sistema es causal si para todo n_0, la salida en el instante $n = n_0$ depende de valores de la entrada en $n \leq n_0$.

  Desde el punto de vista de la transformación de señales, la propiedad de causalidad se puede enunciar de la siguiente forma: en un sistema es causal, se cumple que si dos entradas son tal que $x_1[n] = x_2[n]$ para $n \leq n_0$, entonces las salidas correspondientes cumplen que $y_1[n] = y_2[n]$ para $n \leq n_0$.

- *Estabilidad*: un sistema es estable en el sentido *BIBO* (entrada acotada, salida acotada) si y solo si cada entrada acotada produce una salida acotada. La entrada $x[n]$ es acotada si existe un número positivo fijo B_x tal que

  $$|x[n]| \leq B_x < \infty, \qquad \forall n.$$

  La propiedad de estabilidad requiere que para toda entrada acotada, debe existir un número positivo fijo B_y tal que

  $$|y[n]| \leq B_y < \infty, \qquad \forall n.$$

- *Invarianza temporal*: Un sistema es invariante en el tiempo si un desplazamiento temporal en la entrada produce una salida con el mismo desplazamiento temporal. Específicamente, si un sistema transforma la entrada $x[n]$ en la salida $y[n]$ se dice que es invariante en el tiempo si transforma la entrada $x[n - n_0]$ en la salida $y[n - n_0]$.

(b) Condición necesaria y suficiente de estabilidad y causalidad de los sistemas lineales e invariantes en el tiempo.

- *Condición necesaria y suficiente de estabilidad*: un sistema lineal invariante en el tiempo es estable si y solo si la respuesta al impulso es absolutamente sumable.

  Formalmente: sea $x[n]$ la entrada a un *SLIT* con respuesta al impulso $h[n]$ y $y[n]$ la salida correspondiente. Si $|x[n]| \leq B_x < \infty$ para todo n, se cumple que,

  $$|y[n]| \leq B_y \quad \forall n \quad \Longleftrightarrow \quad S = \sum_{k=-\infty}^{\infty} |h[k]| \leq \infty$$

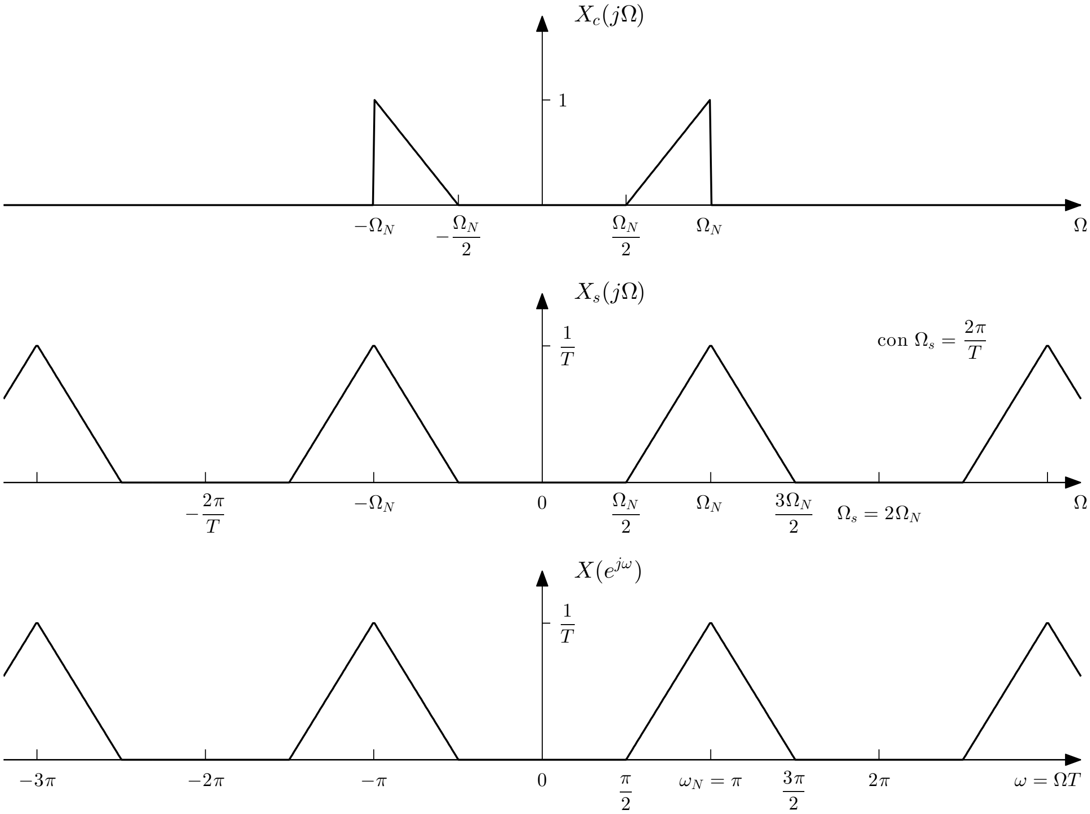
- *Condición necesaria y suficiente de causalidad*: un sistema lineal invariante en el tiempo es causal si y solo si la respuesta al impulso cumple que

  $$h[n] = 0, \qquad n < 0.$$

Problema 1

(a) La mínima frecuencia de muestreo es $\Omega_s = 2\Omega_N$

(b) Para obtener el espectro de la señal discreta, primero se suman copias del espectro continuo desplazadas múltiplos enteros de Ω_s (con $\Omega_s = 2\Omega_N$ en este caso) escaladas un factor de $1/T$. Luego se multiplica el eje de frecuencia en rad/s por T, donde T es el periodo de muestreo. El proceso se ilustra en la siguiente figura,

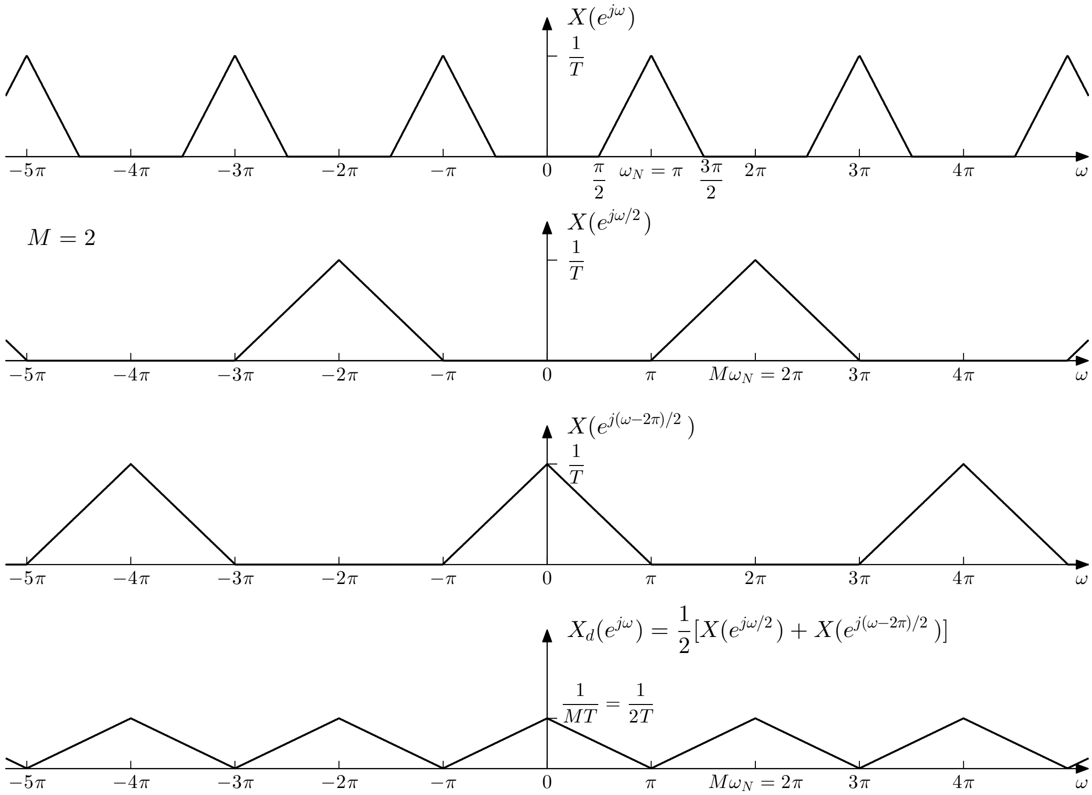


(c) La nueva frecuencia de muestreo es $\Omega_s^{'} = \Omega_s/2$. Ahora se cumple que $\Omega_s^{'} = \Omega_N$, y por lo tanto, no se cumplen las condiciones del teorema de muestreo, es decir, no se cumple que $\Omega_s^{'} > 2\Omega_s$.

(d) El espectro de la señal submuestreada es

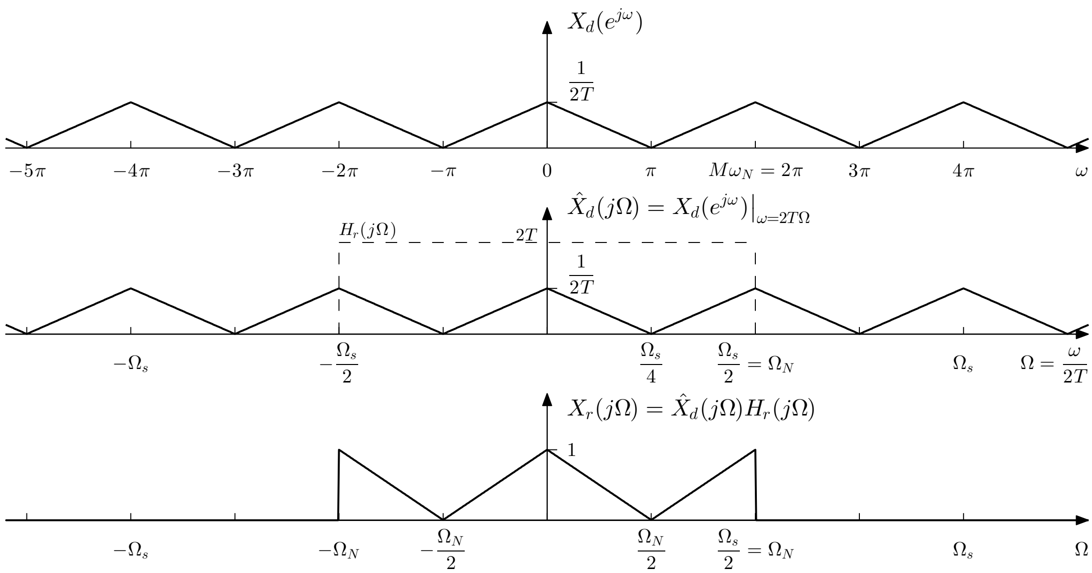
$$X_d(e^{j\omega}) = \frac{1}{M}X(e^{j\omega/2}) + \frac{1}{M}X(e^{j(\omega-2\pi)/2}).$$

El primer término es el espectro de la señal original con el eje de frecuencia estirado un factor de 2 y el segundo término es lo mismo pero luego desplazado 2π en frecuencia. El proceso se muestra en la siguiente figura:



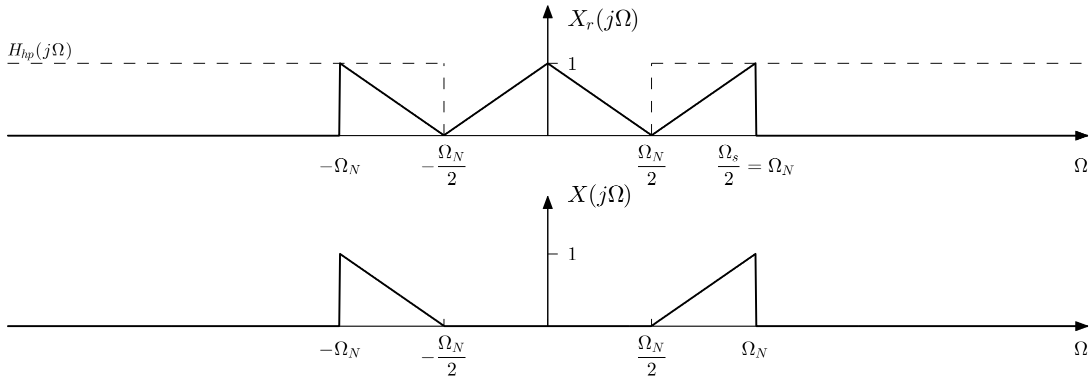
En este caso particular, como el espectro de la señal original es nulo en $-\pi/2 < \omega < \pi/2$, las copias de los espectro no se solapan.

(e) El proceso de reconstrucción se muestra en la siguiente figura:



El espectro de la señal obtenida no es igual al espectro de la señal original.

(f) Es posible recuperar la señal original filtrando la señal reconstruida con un pasaaltos ideal de tiempo continuo de frecuencia de corte $\Omega_N/2$ rad/s y ganancia 1. El proceso se muestra en la siguiente figura:



Problema 2

(a) Para calcular la función de transferencia, se toma la transformada Z en ambos lados de la igualdad de la ecuación en recurrencia,

$$Y(z) = X(z) + \alpha z^{-1} X(z) + \beta z^{-1} Y(z)$$

y se despeja $Y(z)/X(z)$, obteniendo,

$$H(z) = \frac{1 + \alpha z^{-1}}{1 - \beta z^{-1}}.$$

El sistema tiene un polo en $z = \beta$, y como se trata de un sistema causal, la respuesta al impulso es una secuencia hacia adelante, y por lo tanto la región de convergencia es

$$\text{ROC: } |z| > |\beta|.$$

(b) Para que el sistema sea estable, la ROC debe incluir la circunferencia unidad. Esto implica que todos los polos del sistema deben estar contenidos dentro del círculo unidad. Por lo tanto, la condición de estabilidad es

$$|\beta| < 1.$$

α no influye en la estabilidad, y por lo tanto, puede ser cualquier real.

(c) La respuesta en frecuencia del sistema es la función de transferencia evaluada en $z = e^{j\omega}$,

$$\begin{aligned} H(e^{j\omega}) &= \frac{1 + \alpha e^{-j\omega}}{1 - \beta e^{-j\omega}} \\ &= \frac{1 + \alpha \cos\omega - j\alpha \sin\omega}{1 - \beta\cos\omega + j\beta\sin\omega}. \end{aligned}$$

Tomando el módulo al cuadrado, se tiene que

$$|H(e^{j\omega})|^2 = \frac{(1 + \alpha\cos\omega)^2 + \alpha^2 \sin^2\omega}{(1 - \beta\cos\omega)^2 + \beta^2\sin^2\omega},$$

y operando se llega a que

$$|H(e^{j\omega})|^2 = \frac{1 + 2\alpha\cos\omega + \alpha^2}{1 - 2\beta\cos\omega + \beta^2}. \tag{1}$$

(d) Evaluando $|H(e^{j\omega})|^2$ en $\omega = 0$ e imponiendo la condición que valga 0, se tiene que

$$|H(e^{j0})|^2 = \frac{1 + 2\alpha + \alpha^2}{1 - 2\beta + \beta^2} = 0.$$

Por lo tanto, se tiene que cumplir que

$$1 + 2\alpha + \alpha^2 = (1+\alpha)^2 = 0 \qquad \Leftrightarrow \qquad \alpha = -1$$

Evaluando $|H(e^{j\omega})|^2$ en $\omega = \pi/3$ e imponiendo la condición que valga $4/7$ y usando el valor de α calculado antes, se tiene que

$$|H(e^{j\pi/3})|^2 = \frac{1}{1-\beta+\beta^2} = \frac{4}{7}.$$

Operando, se tiene el siguiente polinomio en β

$$\beta^2 - \beta - \frac{3}{4} = 0, \quad \Leftrightarrow \quad \beta = \frac{3}{2}, -\frac{1}{2}.$$

Para que el sistema sea estable se elije la solución que cumple que $|\beta| < 1$, es decir, $\beta = -1/2$. Con los valores obtenidos, la función de transferencia es

$$H(z) = \frac{1 - z^{-1}}{1 + \frac{1}{2}z^{-1}},$$

que tiene un polo en $z = -1/2$ y un cero en $z = 1$. La ROC es $|z| > 1/2$.

(e) La transformada Z de la entrada es

$$X(z) = \frac{1}{1-2z^{-1}}, \quad |z| < 2.$$

La transformada Z de la salida es

$$\begin{aligned} Y(z) &= H(z)X(z) \\ &= \frac{1-z^{-1}}{1+\frac{1}{2}z^{-1}} \times \frac{1}{1-2z^{-1}}, \qquad \frac{1}{2} < |z| < 2 \end{aligned}$$

Para calcular $y[n]$ hay que antitransformar $Y(z)$. Descomponiendo en fracciones simples se tiene que

$$Y(z) = \frac{\frac{3}{5}}{1+\frac{1}{2}z^{-1}} + \frac{\frac{2}{5}}{1-2z^{-1}}, \qquad \frac{1}{2} < |z| < 2.$$

Como

$$\begin{aligned} \frac{3}{5}\left(-\frac{1}{2}\right)^n u[n] &\xleftrightarrow{\mathcal{Z}} \frac{\frac{3}{5}}{1+\frac{1}{2}z^{-1}}, \quad |z| > \frac{1}{2} \\ -\frac{2}{5}2^n u[-n-1] &\xleftrightarrow{\mathcal{Z}} \frac{\frac{2}{5}}{1-2z^{-1}}, \quad |z| < 2, \end{aligned}$$

se llega a que

$$y[n] = \frac{3}{5}\left(-\frac{1}{2}\right)^n u[n] - \frac{2}{5}2^n u[-n-1]$$

(f) Por ser el paralelo de sistemas, la función de transferencia equivalente es la suma de las funciones de transferencia,

$$\begin{aligned} H_p(z) &= H(z) + H_1(z) \\ &= \frac{1-z^{-1}}{1+\frac{1}{2}z^{-1}} + \frac{2}{1-2z^{-1}}. \end{aligned}$$

Sacando denominador común y operando, se obtiene que,

$$H_p(z) = \frac{3 - 2z^{-1} + 2z^{-2}}{1 - \frac{3}{2}z^{-1} - z^{-2}}.$$

Como $H(z) = Y(z)/X(z)$, se tiene que

$$Y(z)\left(1 - \frac{3}{2}z^{-1} - z^{-2}\right) = X(z)\left(3 - 2z^{-1} + 2z^{-2}\right)$$

y antitransformando se llega a que

$$y[n] - \frac{3}{2}y[n-1] - y[n-2] = 3x[n] - 2x[n-1] + 2x[n-2].$$