Modulación y Procesamiento de Señales
Primer parcial - Curso 2014

Tecnólogo en Telecomunicaciones - FING/CURE
Universidad de la República

24 de mayo de 2014

Indicaciones:

- La prueba tiene una duración total de 3 horas y media, y un total de 40 puntos.
- Cada hoja entregada debe indicar nombre, número de C.I., y número de hoja. La hoja 1 debe indicar además el total de hojas entregadas. Utilice únicamente un lado de las hojas.
- Cada problema o pregunta se deberá comenzar en una hoja nueva. Se evaluará explícitamente la claridad, prolijidad y presentación de las soluciones, desarrollos y justificaciones.
- Pueden utilizarse resultados teóricos del curso sin hacer su deducción siempre que la letra no lo exija explícitamente. Se evaluará la correcta formulación y validez de las hipótesis.

Pregunta [10 pts.]

(a) Definir estabilidad BIBO (entrada acotada - salida acotada) para un sistema en tiempo discreto con entrada $x[n]$ y salida $y[n]$.

(b) Enunciar la condición necesaria y suficiente de estabilidad BIBO para sistemas lineales invariantes en el tiempo.

(c) Estudiar estabilidad para los siguientes sistemas. En condiciones de estabilidad calcular una cota B_y para la salida dada una cota B_x para la entrada.

1. $T\{x[m]\}|_n = x[8n]$
2. $T\{x[m]\}|_n = \sqrt{\sum_{k=0}^{10} x^2[n-k]}$
3. $y[n] = ay[n-1] + x[n]$[1]

Problema 1 [15 pts.]

Se considera el sistema de la figura 1, donde $f_a = 16$ kHz y $f_b = f_c = 20$ kHz. El mismo puede utilizarse para multiplicar señales de tiempo continuo a través de un sistema de tiempo discreto.

(a) Indicar en detalle como se componen los sistemas conversores C/D y el sistema de reconstrucción ideal D/C.

(b) ¿Cuáles son los máximos anchos de banda admisibles en las señales $x_1(t)$ y $x_2(t)$ para no tener aliasing en el proceso de muestreo?
Bosquejar los espectros en los puntos A y B indicados en la figura cuando:

$$X_1(j\Omega) = \Lambda\left(\frac{j\Omega}{2\pi(2.5\text{ kHz})}\right)$$

$$x_2(t) = \cos\left(2\pi(7.5\text{ kHz})t\right)$$

[1] Puede ser útil la igualdad $\sum_{k=0}^{n-1} r^k = \frac{1-r^n}{1-r}$ si $r \neq 1$.

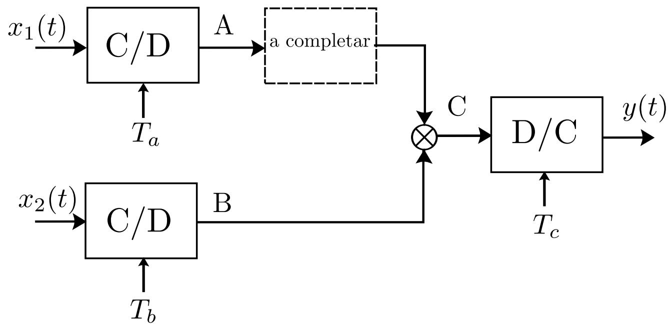

Figura 1: Sistema del problema 1.

(c) Diseñar un sistema que efectúe un cambio de frecuencia de muestreo para incluir en el rectángulo punteado del diagrama, de forma de igualar las frecuencias de muestreo antes de la multiplicación.

(d) Graficar las modificaciones que sufre el espectro en todos los puntos del sistema de cambio de frecuencia a agregar, para la señal $x_1(t)$ indicada en la parte (b).

(e) Encontrar y graficar el espectro en el punto C indicado en la figura, cuando $x_1(t)$ y $x_2(t)$ son las indicadas en la parte (b).

Problema 2 [15 pts.]

Considere el sistema con la siguiente función de transferencia,

$$H(z) = \frac{1}{1 - az^{-1} + a^2 z^{-2}},$$

donde a es un número real positivo.

(a) Escriba la ecuación de recurrencia que relaciona la salida $y[n]$ con la entrada $x[n]$ del sistema. ¿Se trata de un filtro FIR o IIR? Justificar la respuesta.

(b) Dibuje el diagrama de bloques del sistema.

(c) Calcule los polos y ceros de la función de transferencia[2][3]. Indicar la condición que debe cumplir el parámetro a para que el filtro sea causal y estable. En las condiciones de causalidad y estabilidad, dibuje el diagrama de polos y ceros para algún valor de a e indique la ROC de $H(z)$.

(d) Asumiendo que el parámetro a cumple la condición de estabilidad, esbozar la magnitud de la respuesta en frecuencia del sistema de forma aproximada (no es necesario calcularla). Indicar el valor de frecuencia en donde la ganancia del sistema es máxima ¿Qué tipo de filtro es en cuanto a la selectividad de frecuencias?

(e) Calcular la respuesta al impulso $h[n]$ del sistema.

[2] *Sugerencia*: expresar los polos en magnitud y fase y usarlos en el resto del problema en esa notación.
[3] Puede ser útil la siguiente igualdad: $\arctan \pm\sqrt{3} = \pm \arctan \sqrt{3} = \pm\pi/3$

Solución

Pregunta

(a) Un sistema es estable en el sentido entrada acotada, salida acotada (*BIBO*, Bounded Input, Bounded Output) si y solo si cada entrada acotada produce una salida acotada.

- La entrada $x[n]$ es acotada si existe un número positivo fijo B_x tal que
$$|x[n]| \leq B_x < \infty, \qquad \forall n.$$
- La propiedad de estabilidad requiere que para toda entrada acotada, debe existir un número positivo fijo B_y tal que
$$|y[n]| \leq B_y < \infty, \qquad \forall n.$$

(b) *Condición necesaria y suficiente de estabilidad*: un sistema lineal invariante en el tiempo es estable si y solo si la respuesta al impulso es absolutamente sumable.
Formalmente: sea $x[n]$ la entrada a un *SLIT* con respuesta al impulso $h[n]$ y $y[n]$ la salida correspondiente. Si $|x[n]| \leq B_x < \infty$ para todo n, se cumple que,

$$|y[n]| \leq B_y \quad \forall n \quad \Longleftrightarrow \quad S = \sum_{k=-\infty}^{\infty} |h[k]| \leq \infty$$

(c) Estudio de la estabilidad:

1. Como $y[n] = x[8n]$, se cumple que $B_y \leq B_x$ para todo n. Por lo tanto, el sistema es estable.
2. Por hipótesis, se cumple que $x^2[n] \leq B_x^2$ para todo n. Por lo tanto,
$$|y[n]| \leq \sqrt{\sum_{k=0}^{10} B_x^2} = \sqrt{11 B_x^2} = \sqrt{11} B_x,$$
concluyendo que $B_y \leq \sqrt{10} B_x$ para todo n. El sistema es estable.
3. Asumiendo que el sistema está en reposo inicialmente, y resolviendo la recursión,
$$\begin{aligned}
y[0] &= ay[-1] + x[0] = x[0] \\
y[1] &= ay[0] + x[1] = ax[0] + x[1] \\
y[2] &= ay[1] + x[2] = a(ax[0] + x[1]) + x[2] = a^2 x[0] + ax[1] + x[2] \\
&\vdots \\
y[n] &= \sum_{k=0}^{n} a^k x[n-k].
\end{aligned}$$
Al mismo resultado se llega aplicando la convolución entre la entrada y la respuesta al impulso del sistema, que es $h[n] = a^n u[n]$. Aplicando la desigualdad triangular, se tiene que
$$|y[n]| \leq \sum_{k=0}^{n} |a|^k |x[n-k]| \leq B_x \sum_{k=0}^{n} |a|^k.$$
La sucesión en la última sumatoria es una serie geométrica, y entonces
$$|y[n]| \leq B_x \frac{1 - |a|^{n+1}}{1 - |a|}, \quad \text{si } a \neq 1$$

concluyendo que

$$B_y \leq B_x \frac{1-|a|^{n+1}}{1-|a|}, \quad \text{si } a \neq 1$$

Si $|a| > 1$, se cumple que $B_y \to \infty$ con $n \to \infty$, y por lo tanto el sistema es inestable. Si $|a| < 1$, se cumple que

$$B_y \leq B_x \frac{1-|a|^{n+1}}{1-|a|} \leq B_x \frac{1}{1-|a|} \quad \forall n$$

y el sistema es estable.

Problema 1

(a) El diagrama del conversor C/D, se muestra en la figura 2. Donde $s(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT_a)$

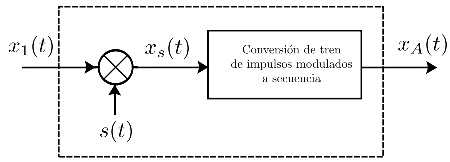

Figura 2: Conversor C/D.

En la figura 3 se tiene el conversor D/C. El filtro de reconstrucción es $H_r(j\Omega) = T_c.\Pi\left(\frac{j\Omega}{2\pi/T_c}\right)$

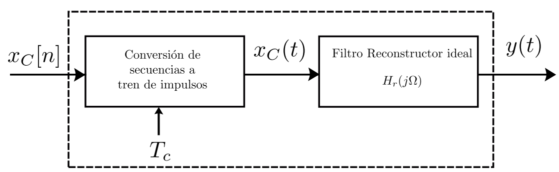

Figura 3: Sistema de reconstrucción ideal D/C.

(b) Por teorema de muestreo podemos asegurar que no hay solapamiento si las señales a muestrear tiene un ancho de banda menor o igual a la mitad de la frecuencia de muestreo. En este caso implica que

$$W_1 \leq 8 \text{ kHz}, \quad W_2 \leq 10 \text{ kHz}.$$

En la figura 4 se tiene el espectro de $x_2(t)$ antes y después del conversor C/D. Mientras que el espectro de $x_1(t)$ se encuentra en la figura 6.

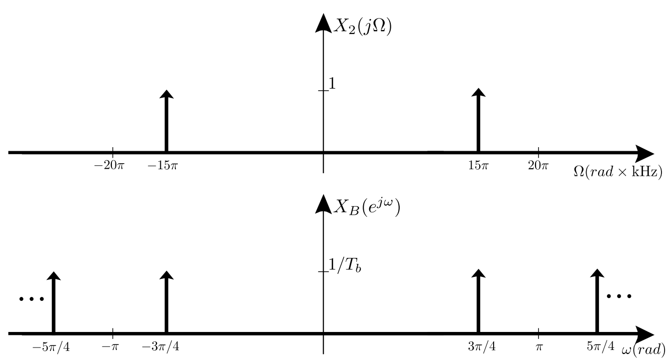

Figura 4: Espectro de $x_2(t)$ antes y después del conversor C/D.

(c) En el sistema de la figura 5, el bloque $\uparrow L$ es un interpolador, mientras que el bloque $\downarrow M$ es un diezmador.

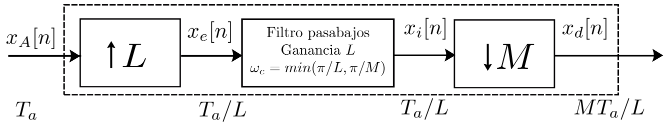

Figura 5: Sistema que efectúa cambio de la frecuencia de muestreo.

(d) El espectro de $x_1(t)$ así como las modificaciones que sufre el mismo en todos los puntos del sistema de cambio de frecuencia, se encuentran en la figura 6.

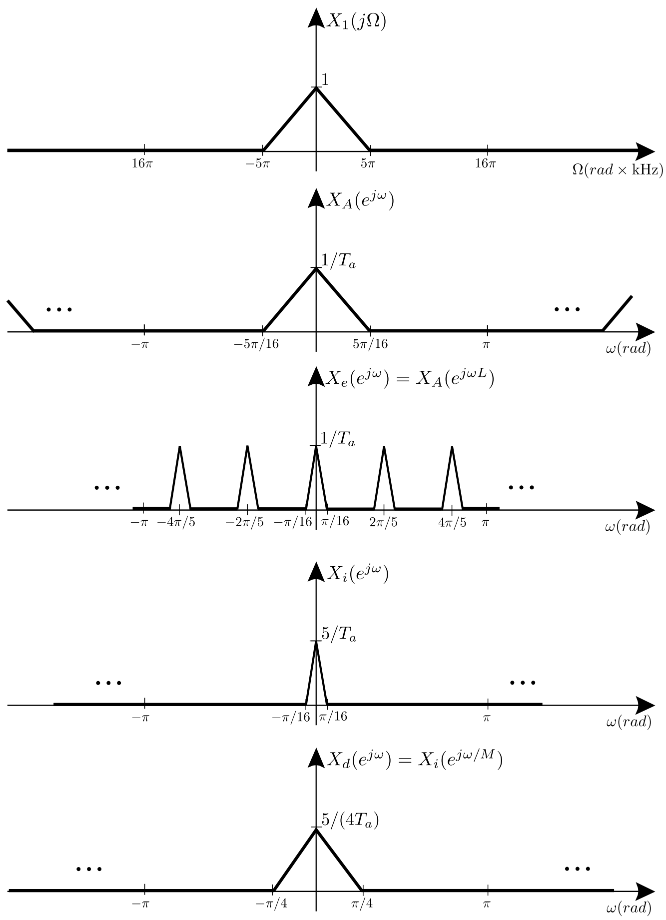

Figura 6: Espectro de $x_1(t)$ y sus modificaciones al atravesar el sistema conversor de frecuencia.

(e) La gráfica del espectro en el punto C, resulta de la convolución de los espectros $X_B(e^{j\omega})$ y $X_d(e^{j\omega})$, la misma se encuentra en la figura 7.

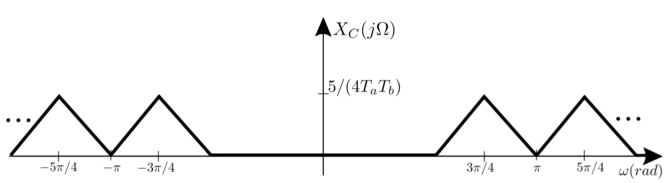

Figura 7: Espectro en el punto C.

Problema 2

(a) La ecuación en recurrencia del sistema es

$$y[n] = x[n] + ay[n-1] - a^2 y[n-2].$$

Es un filtro de respuesta al impulso infinita porque la salida depende de muestras pasadas de la salida (hay recursión).

(b) El diagrama de bloques del filtro se muestra en la figura 8.

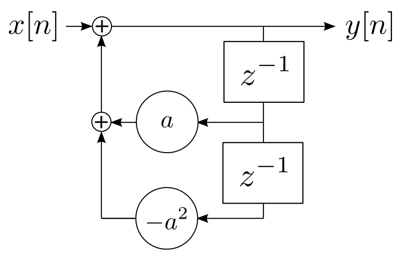

Figura 8: Diagrama de bloques del sistema del problema 2.

(c) Para calcular los polos y los ceros del sistema, se multiplica el numerador y el denominador de la función de transferencia por z^2 para que quede un cociente de polinomios con potencias positivas,

$$\begin{aligned} H(z) &= \frac{1}{1 - az^{-1} + a^2 z^{-2}} \\ &= \frac{z^2}{z^2 - az + a^2} \end{aligned}$$

Los ceros del sistema consisten los valores de z en donde se anula en numerador de la función de transferencia. En este caso, el filtro tiene un cero doble en $z = 0$. Los polos son los valores en donde se anula el denominador, y en este caso son los valores de z que cumplen,

$$z^2 - az + a^2 = 0.$$

Las raíces de este polinomio de segundo grado parámetrico en a son,

$$p_{1,2} = \frac{a \pm ja\sqrt{3}}{2},$$

cuyo módulo y fase son respectivamente,

$$\begin{aligned} |p_{1,2}| &= \frac{1}{2}\sqrt{a^2 + 3a^2} = a \\ \angle p_{1,2} &= \pm \arctan \sqrt{3} = \pm \frac{\pi}{3}. \end{aligned}$$

Para que el sistema sea causal y estable, todos los polos deben estar dentro de círculo unidad, es decir, $|p_{1,2}| < 1$. Como el módulo de los polos es a, la condición es $a < 1$. De esta forma, la ROC contiene el círculo unidad y por lo tanto el sistema es estable. Además, la ROC se extiende desde una circunferencia hasta el infinito, condición para que la respuesta al impulso sea una secuencia hacia adelante y por lo tanto, el sistema sea causal ($h[n] = 0$ si $n < 0$). Como consecuencia, la ROC de $H(z)$ es $|z| > a$.

(d) La respuesta en frecuencia es la transformada Z evaluada en la circunferencia unidad. Como el lugar mas cercano de los polos a la circunferencia unidad es en el ángulo $\pi/3$, ese ángulo corresponde a la frecuencia en donde el sistema tiene mayor ganancia. La magnitud de la respuesta en frecuencia crece desde $\omega = 0$ a $\omega = \pi/3$ y decrece de $\omega = \pi/3$ a $\omega = \pi$. Por lo tanto, el sistema es un filtro pasabanda con frecuencia de resonancia $\omega_c = \pi/3$.

(e) La función de transferencia puede descomponerse en fracciones simples como

$$H(z) = \frac{A}{1 - ae^{j\frac{\pi}{3}}z^{-1}} + \frac{B}{1 - ae^{-j\frac{\pi}{3}}z^{-1}}.$$

Sacando denominador común y resolviendo el sistema resultante para calcular A y B o empleando el método de la tapadita, se llega a que

$$\begin{aligned} A &= \frac{1}{1 - e^{-j\frac{2\pi}{3}}} = \frac{e^{j\frac{\pi}{3}}}{e^{j\frac{\pi}{3}} - e^{-j\frac{\pi}{3}}} = \frac{e^{j\frac{\pi}{3}}}{2j\sin\frac{\pi}{3}} \\ B &= \frac{-e^{-j\frac{\pi}{3}}}{2j\sin\frac{\pi}{3}}. \end{aligned}$$

Antitransformando, la respuesta al impulso queda

$$\begin{aligned} h[n] &= Aa^n e^{j\frac{\pi}{3}n}u[n] + Ba^n e^{-j\frac{\pi}{3}n}u[n] \\ &= \frac{e^{j\frac{\pi}{3}}}{2j\sin\frac{\pi}{3}}a^n e^{j\frac{\pi}{3}n}u[n] - \frac{e^{-j\frac{\pi}{3}}}{2j\sin\frac{\pi}{3}}a^n e^{-j\frac{\pi}{3}n}u[n] \\ &= \frac{a^n}{2j\sin\frac{\pi}{3}}\left(e^{j\frac{\pi}{3}}e^{j\frac{\pi}{3}n} - e^{-j\frac{\pi}{3}}e^{-j\frac{\pi}{3}n}\right)u[n] \\ &= \frac{a^n}{2j\sin\frac{\pi}{3}}2j\sin\left[\frac{\pi}{3}(n+1)\right]u[n] \end{aligned}$$

resultando en

$$h[n] = \frac{a^n \sin\frac{\pi}{3}(n+1)}{\sin\frac{\pi}{3}}u[n].$$