# Modulación y Procesamiento de Señales
# Primer parcial - Curso 2012

Tecnólogo en Telecomunicaciones - FING/CURE
Universidad de la República

8 de mayo de 2012

**Indicaciones:**

- La prueba tiene una duración total de 3 horas y media, y un total de 40 puntos.
- Cada hoja entregada debe indicar nombre, número de C.I., y número de hoja. La hoja 1 debe indicar además el total de hojas entregadas. Utilice únicamente un lado de las hojas.
- Cada problema o pregunta se deberá comenzar en una hoja nueva. Se evaluará explícitamente la claridad, prolijidad y presentación de las soluciones, desarrollos y justificaciones.
- Pueden utilizarse resultados teóricos del curso sin hacer su deducción siempre que la letra no lo exija explícitamente. Se evaluará la correcta formulación y validez de las hipótesis.

## Pregunta [8 pts.]

Para cada uno de los siguientes sistemas, determine si el sistema es: (i) estable, (ii) causal, (iii) lineal, (iv) invariante en el tiempo. y (v) con o sin memoria. La función $u[n]$ es el escalón discreto.

(a) $T\{x[m]\}|_n = \sum_{k=n-5}^{n} x[k-2]$

(b) $T\{x[m]\}|_n = \sum_{k=n_0}^{n} x[k] \quad :: \quad n_0 \in \mathcal{Z}$

(c) $T\{x[m]\}|_n = \alpha.x[n]\cos(n\pi/2) + \beta \quad :: \quad \alpha, \beta \in \mathcal{R}$

(d) $T\{x[m]\}|_n = \sum_{k=-\infty}^{n} u[k].|x[k]|.u[10-k]$

## Problema 1 [16 pts.]

(a) Enuncie el teorema del muestreo.

(b) Se tiene una señal contínua $x_c(t)$ cuyo espectro se muestra en figura 1.

(i) Determine la frecuencia mínima de muestreo $f_s$ a la que se debe muestrear esta señal para que sus muestras la determinen unívocamente y, por tanto, pueda ser recuperada a partir de ellas.

(ii) Realice un diagrama de bloques que describa el modelo matemático del proceso de muestreo.

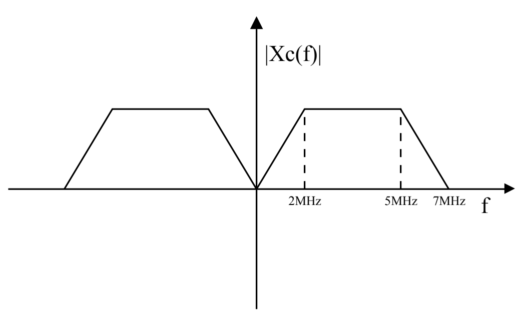


Figura 1:

(c) Se decide muestrear la señal $x_c(t)$ a la frecuencia $f_s$ hallada en la parte anterior.

(i) Exprese $|X(\mathrm{e}^{j\theta})|$, el espectro de la señal muestreada $x[n]$, en función de $|X_c(f)|$.

(ii) Bosqueje el espectro de la señal para cada punto del diagrama de bloques realizado en la parte (b. ii).

(d) Se descubre que en realidad sólo las frecuencias menores a 5 MHz de la señal original son de interes para el procesamiento posterior. Como forma de disminuir la cantidad de muestras se decide procesar digitalmente la señal $x[n]$ para obtener una nueva señal $x'[n]$ que sólo contenga la información necesaria y cuya tasa de muestreo sea la menor posible.

(i) ¿Cuál será esa nueva frecuencia de muestreo $f_s^{'}$?

(ii) Proponga un método para hacer lo antedicho evitando problemas de solapamiento.

(iii) Realice un diagrama de bloques para el método propuesto y dibuje el espectro de la señal en cada punto.

(e) Dibuje el espectro de la señal $x_c'(t)$ que se obtendría una a partir de la señal $x'[n]$ mediante un proceso D/A a la frecuencia $f_s^{'}$ calculada en la parte (d. i).

## Problema 2 [16 pts.]

Se desea implementar un filtro $h[n]$ SLIT y causal, dado por la ecuación en diferencias,

$$y[n] = k.x[n] + (1-k).y[n-1]$$

donde $x[n]$ es la entrada al filtro e $y[n]$ la salida.

(a) Hallar la transformada Z de la respuesta al impulso $h[n]$, $H(z)$, indicando la región de convergencia del filtro.

(b) Dar un diagrama de bloques que implemente este filtro y que utilice la cantidad mínima de retardos posible.

(c) ¿Cuáles son los posibles valores de $k$ para que el filtro digital $h[n]$ sea estable?

(d) Sobre la hipótesis de que $k$ es tal que el sistema es estable, hallar la respuesta en frecuencia del filtro $H(e^{j\theta})$.

(e) Hallar $k$ para que la ganancia del filtro en frecuencia $\theta = \pi/2$ sea $1/2$ asegurando que el sistema resultante sea estable. *Sugerencia: Note que la condición dada es equivalente a hallar $k$ tal que $|H(e^{j\theta})|^2$ en $\theta = \pi/2$ sea igual a 1/4.*

# Solución

## Pregunta

| | estable | causal | lineal | invariante en el tiempo | con memoria |
|---|---|---|---|---|---|
| (a) | si | si | si | si | si |
| (b) | no | no | si | si | si |
| (c) | si | si | no | no | no |
| (d) | si | si | no | no | no |

## Problema 1

**(a)** Sea una señal $x(t)$ de banda limitada $f_N$; o lo que es lo mismo $X(f) = 0 \ \forall \ |f| \geq f_N$. Entonces $x(t)$ está completamente determinada por sus muestras $x[n]$, tomadas cada $T_s = \frac{1}{f_s}$ si:

$$f_s \geq 2.f_N$$

**(b)**

(i) Basándonos en la parte (a):

$$f_s^{min} = 14MHz$$

(ii) Ver figura 2

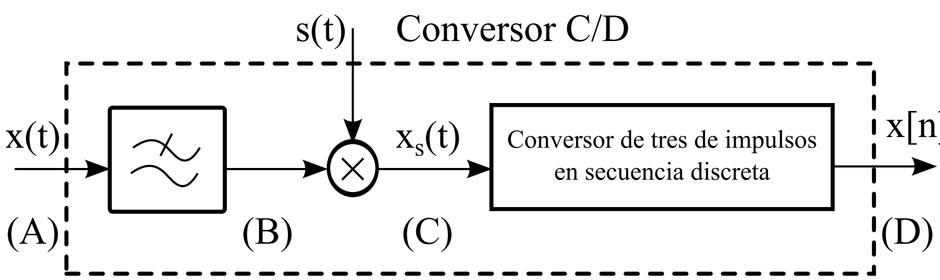


Figura 2: Modelo matemático del proceso de muestreo. Los puntos A, B, C y D serán utilizados como indicadores en la parte subsiguiente.

**(c)**

(i)

$$X(e^{j\theta}) = \frac{1}{T_s} \sum_k x\left(\frac{f_s}{2\pi}(\theta - 2\pi.k)\right)$$

(ii) Los puntos son los definidos en la figura 2.
Los espectros en los puntos A y B son como el de la figura 1. Los espectros para los puntos C y D se muestran en la figura 3.

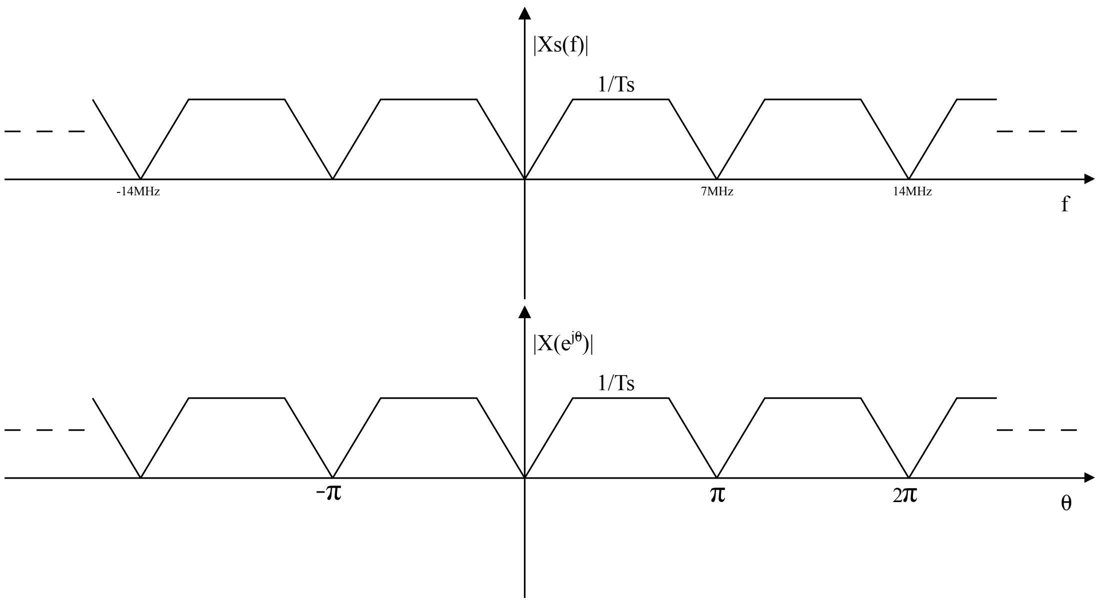


Figura 3: El espectro en el punto C definido en la figura 2 (arriba). El espectro en el punto D definido en la figura 2 (abajo).

**(d)**

(i) La nueva frecuencia de muestreo será la que cumpla con el teorema del muestreo para señales acotadas en banda con $f_N = 5MHz$. O sea $f'_s = 10MHz = \frac{5}{7}f_s$.

(ii) La forma de realizar un cambio en la frecuencia de muestreo de forma digital, por un número racional, es primero realizando una interpolación y luego un decimado. Ambas con $L$ y $M$ respectivamente enteros. Basándonos en la parte anterior, el interpolador tendrá $L = 5$, mientras que el decimador tendrá $M = 7$.

(iii) Ver figura 4

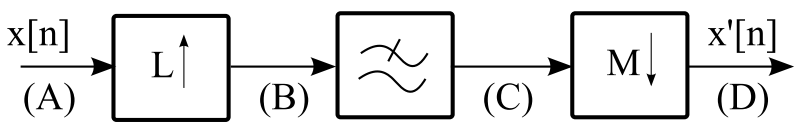


Figura 4: Diagrama de bloques para un proceso digital de cambio de frecuencia de muestreo. $L = 5$, $M = 7$, $\theta_c = \frac{\pi}{7}$, $G = L$.

El espectro en el punto A es conocido. Los espectros para los puntos B, C y D se muestran en la figura 5.

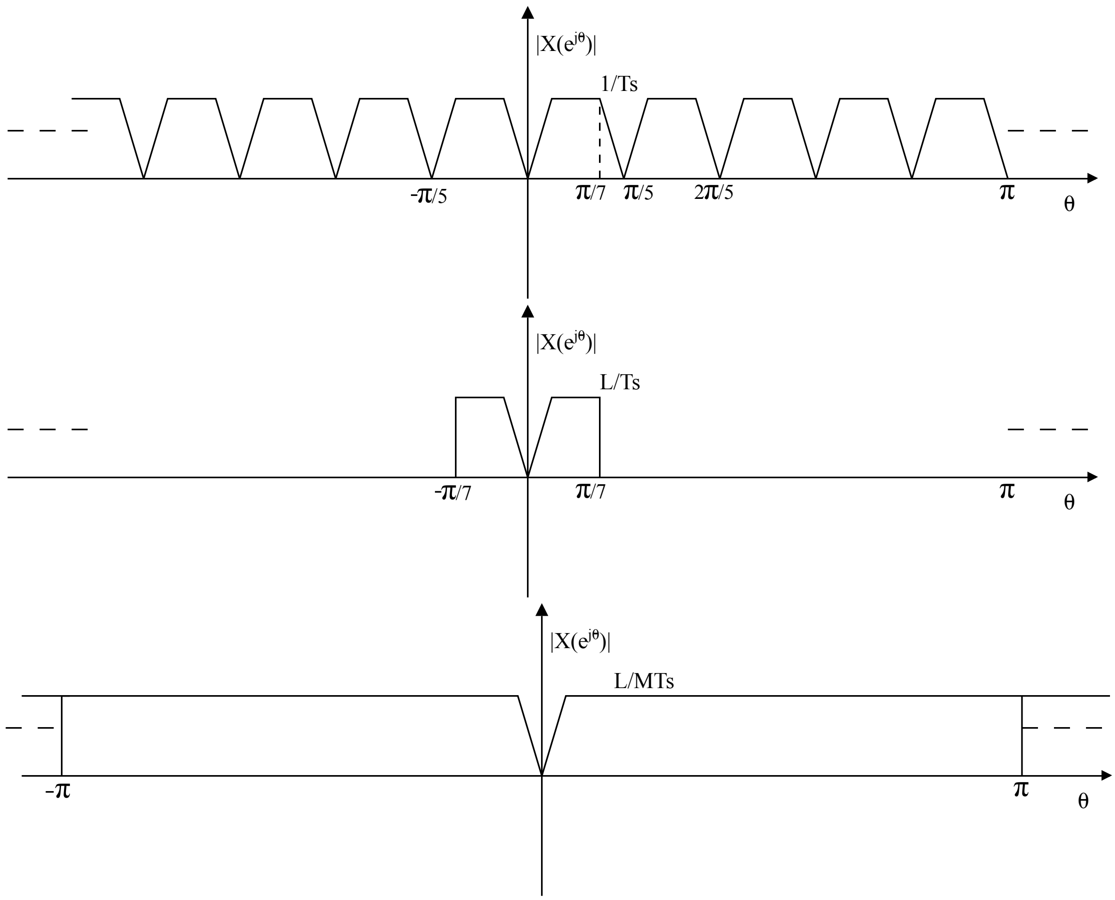


Figura 5: El espectro en el punto B definido en la figura 4 (arriba). El espectro en el punto C definido en la figura 4 (medio).El espectro en el punto D definido en la figura 4 (abajo).

**(e)** Ver figura 6.

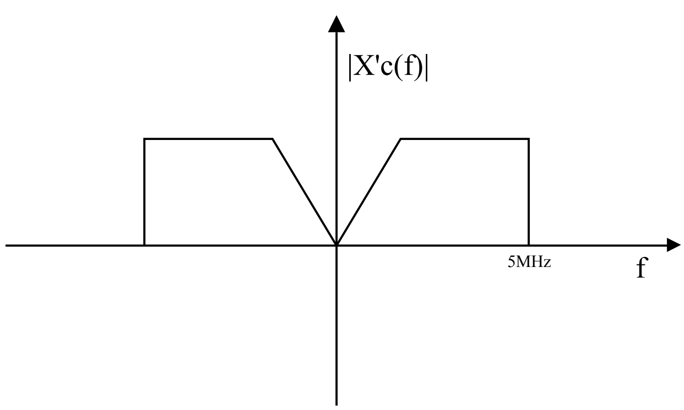


Figura 6: Espectro de la señal $x'_c(t)$.

## Problema 2

**(a)** $Y(z) = kX(z) + (1-k)z^{-1}Y(z)$

$$H(z)\frac{k}{1-(1-k)z^{-1}}$$

Como se pide causalidad, la convergencia se da para: $|z| > (1-k)$.

**(b)** Ver figura 7.

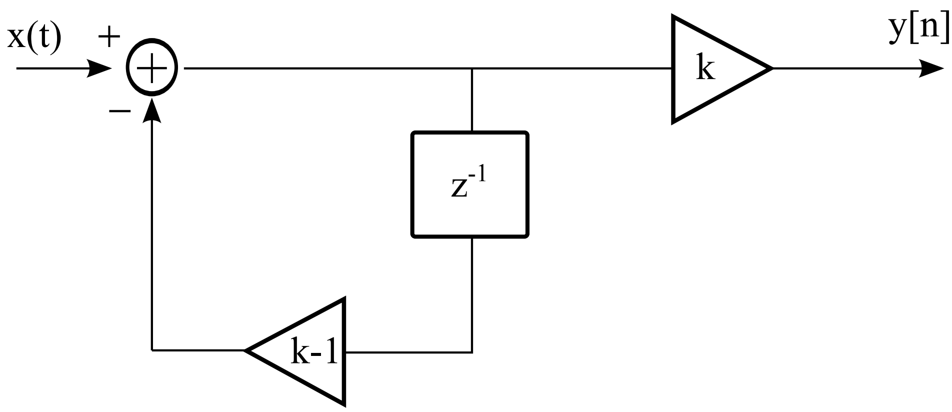


Figura 7: Diagrama de bloques implementando el filtro del problema 2.

**(c)** Para que el filtro sea estable, la ROC de $H(z)$ debe contenter al circulo unidad. Entonces si asumimos a $k$ real:

$$-1 < k-1 < 1$$
$$0 < k < 2$$

**(d)**

$$H(e^{j\theta}) = \frac{k}{1-(1-k)e^{j\theta}}$$

**(e)**

$$\left|H(e^{j\theta})\right|^2 = \frac{k^2}{1-2(1-k)cos(\theta)+(1-k)^2cos(\theta)+(1-k)^2sen(\theta)}$$
$$\left|H(e^{j\theta})\right|^2 = \frac{k^2}{1-2(1-k)cos(\theta)+(1-k)^2}$$

$$\left.\left|H(e^{j\theta})\right|^2\right|_{\theta=\frac{\pi}{2}} = \frac{k^2}{1+(1-k)^2} = \frac{1}{4}$$
$$3k^2+2k-2=0$$

Finalmente:

$$k = \frac{-1\pm\sqrt{7}}{3}$$

Y como queremos que el sistema sea estable:

$$k = \frac{-1+\sqrt{7}}{3}$$