Modulación y Procesamiento de Señales
Primer Parcial

CURE

16 de abril de 2010

Indicaciones:

- La prueba tiene una duración total de 3 horas y media.
- Cada hoja entregada debe indicar nombre, número de C.I., y número de hoja. La hoja 1 debe indicar además el total de hojas entregadas.
- Se deberá utilizar únicamente un lado de las hojas.
- Cada problema o pregunta se deberá comenzar en una hoja nueva.
- Se evaluará explícitamente la claridad, prolijidad y presentación de las soluciones, desarrollos y justificaciones.
- Pueden utilizarse resultados teóricos del curso sin hacer su deducción siempre que la letra no lo exija explícitamente. Se evaluará la correcta formulación y validez de hipótesis.

Problema 1 [15 pts.]

Para cada uno de los siguientes sistemas, determinar si el sistema es estable, lineal e invariante en el tiempo:

(a) $T(\{x_m\}_{m\in\mathbb{Z}})|_n = x^2[n]$.

(b) $T(\{x_m\}_{m\in\mathbb{Z}})|_n = \sum_{k=n-100}^{k=n+100} x[k]$

(c) $T(\{x_m\}_{m\in\mathbb{Z}})|_n = x[n] + n$

Justificar detalladamente.

Problema 2 [15 pts.]

(a) Explicar brevemente en qué consiste decimar (submuestrear) e interpolar (sobremuestrear) una señal discreta.

(b) Dar el diagrama de bloques de un decimador de orden M, indicando todos los parámetros de cada uno de los bloques. Hallar la expresión del espectro resultante.

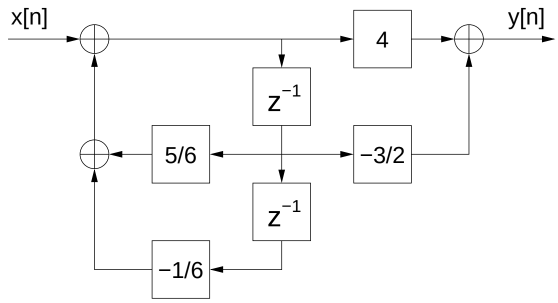
(c) Graficar el espectro en cada punto, para una entrada con $X(e^{j\theta}) = \Lambda(\theta/\frac{2\pi}{3})$ y M = 3.

(d) Dar el diagrama de bloques de un interpolador de orden L, indicando todos los parámetros de cada uno de los bloques. Hallar la expresión del espectro resultante.

(e) Graficar el espectro en cada punto, para una entrada con $X(e^{j\theta}) = \Lambda(\theta/\frac{2\pi}{3})$ y L = 3.

Problema 3 [20 pts.]

Se considera el filtro digital causal de la figura :



(a) Encontrar una expresión para la respuesta del filtro $H(z)$.

(b) Estudiar la estabilidad de este sistema.

(c) Calcular la respuesta frecuencial del filtro.

(d) Calcular la respuesta al impulso del filtro.

Al filtro ingresa un proceso estocástico $e[n]$ con autocorrelación $R_e[n] = \sigma_e^2 \delta[n]$ obteniendo una salida $v[n]$.

(e) Calcular la densidad espectral de potencia $G_e(e^{j\theta})$ del proceso $e[n]$. Calcular la potencia de $e[n]$.

(f) Dar una expresión de densidad espectral de potencia $G_v(e^{j\theta})$ del proceso $v[n]$.

Solución

Problema 1

(a) Estabiidad:
Si $x[n]$ es acotado, entonces $\exists B_x$ tal que $|x[n]| < B_x$ y por lo tanto $\exists B_y = B_x^2$ tal que $|y[n]| < B_y$ por lo que el sistema es estable en sentido BIBO.
Invarianza temporal:

$$R\{T\{x[n]\}\} = R\{x^2[n]\} = x^2[n-r]$$
$$T\{R\{x[n]\}\} = T\{x[n-r]\} = x^2[n-r]$$

por lo tanto

$$R\{T\{x[n]\}\} = T\{R\{x[n]\}\}$$

y el sistema es invariante temporal.
Linealidad:

$$\alpha T\{x[n]\} = \alpha x^2[n]$$
$$T\{\alpha x[n]\} = \alpha^2 x^2[n]$$

Si α es distinto de 0 o 1, se tienen que no son iguales y por lo tanto el sistema no es lineal.

(b) Estabilidad:
Si existe una cota B_x para $|x[n]|$ entonces

$$|y[n]| = \left|\sum_{k=n-100}^{k=n+100} x[k]\right| \leq \sum_{k=n-100}^{k=n+100} |x[k]| \leq 201 \times B_x = B_y.$$

Por lo que la salida será acotada y el sistema es estable.
Linealidad:
Invarianza temporal:
El sistema se puede escribir como $y[n] = x[n] * (u[n+100] - u[n-101])$. Por lo que es un sistema lineal, estable e invariante en el tiempo.

(c) Estabilidad:
No es estable ya que $x[n] + n \to \infty$ cuando $n \to \infty$.
Invarianza temporal:

$$R\{T\{x[n]\}\} = R\{x[n] + n\} = x[n-r] + n - r$$
$$T\{R\{x[n]\}\} = T\{x[n-r]\} = x[n-r] + n$$

por lo tanto el sistema no es invariante temporal.
Linealidad:

$$\alpha T\{x[n]\} = \alpha(x[n] + n)$$
$$T\{\alpha x[n]\} = \alpha x[n] + n$$

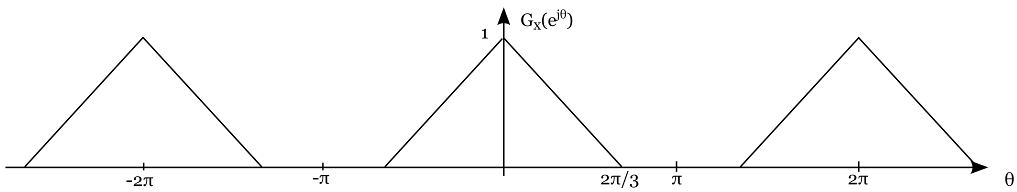
Si α es distinto de 0 o 1, se tienen que no son iguales y por lo tanto el sistema no es lineal.

Problema 2

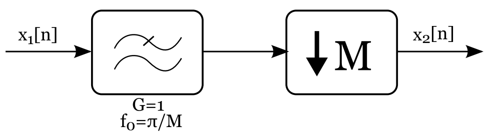
(a) Decimar (por un factor entero): Consiste en quedarse una de cada M muestras de la señal previamente limitada en banda a π/M, lo que resulta en una menor frecuencia de muestreo. Sobremuestrear: Se interpolan valores intermedios de la secuencia muestreada de manera de aumentar la frecuencia de muestreo.

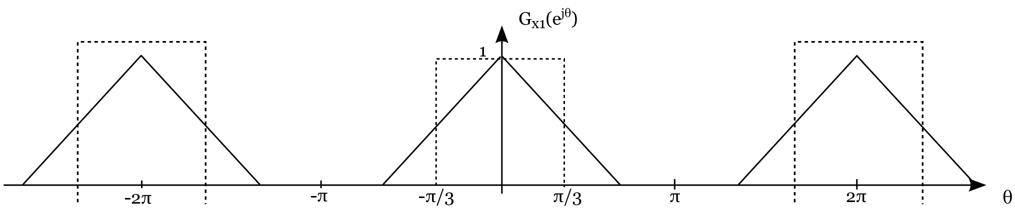
(b) El decimador consiste en un filtro pasabajos de ganancia unitaria y frecuencia de corte π/M, seguido de un compresor de factor M.
$X_M(e^{j\theta}) = X(e^{j\frac{\theta}{M}})$ para $-\pi < \theta < \pi$, y periodizado cada 2π.

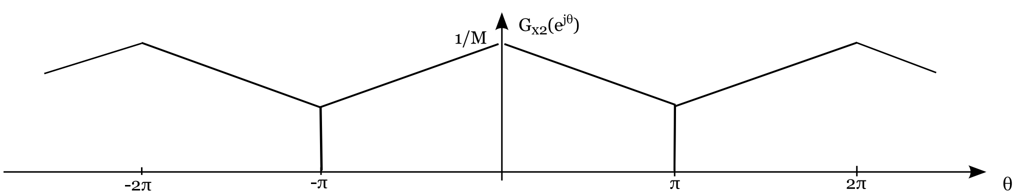
(c) La densidad espectral de potencia de x es:



Y las gráficas de las densidades espectrales de x_1 y x_2 indicados en el diagrama de bloques son:

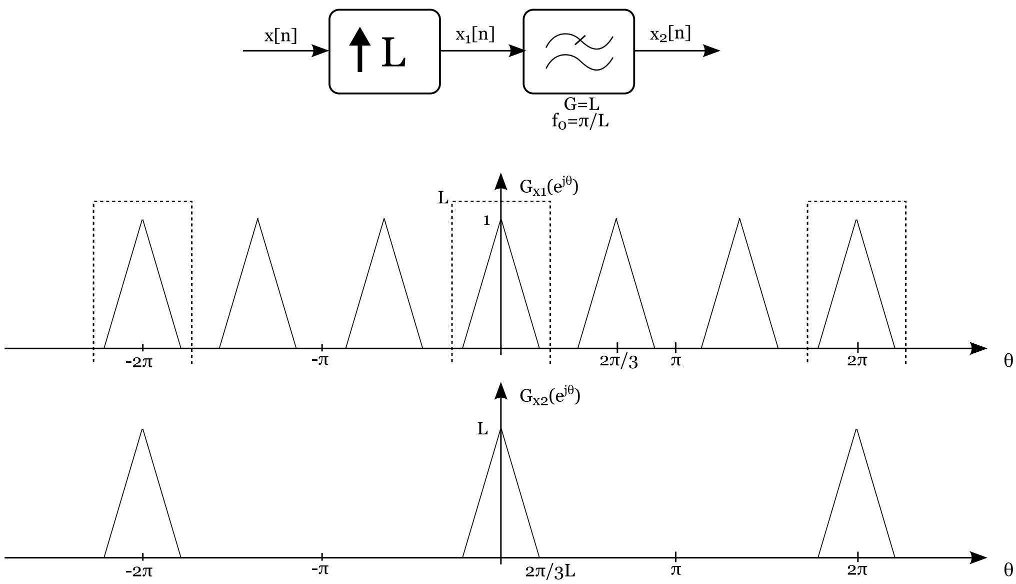






(d) El interpolador consiste en un expansor de factor L seguido de un filtro pasabajos de ganancia L y frecuencia de corte π/L.
$X_L(e^{j\theta}) = X(e^{j\theta L})$ para $-\pi/L < \theta < \pi/L$ y 0 hasta frecuencia $\pm\pi$, todo periodizado cada 2π.

(e) Las gráficas de las densidades espectrales de x_1 y x_2 indicados en el diagrama de bloques son:



Problema 3

(a)

$$H(e^{j\theta}) = \frac{4 - \frac{3}{2}z^{-1}}{1 - \frac{5}{6}z^{-1} + \frac{1}{6}z^{-2}}$$

(b) Los polos del sistema son 1/2 y 1/3 por lo que a región de convergencia para el filtro causal es $|z| > \frac{1}{2}$. Por lo tanto la región de convergencia contiene a la circunferencia unidad y entonces es el sistema es estable.

(c) Evaluando $H(z)$ en $z = e^{j\theta}$, se obtiene:

$$H(e^{j\theta}) = \frac{4 - \frac{3}{2}e^{-j\theta}}{1 - \frac{5}{6}e^{-j\theta} + \frac{1}{6}e^{-j2\theta}}$$

(d) La respuesta frecuencial se puede descomponer en 2 fracciones simples de la siguiente manera:

$$H(e^{j\theta}) = \frac{1}{1 - \frac{1}{3}e^{-j\theta}} + \frac{3}{1 - \frac{1}{2}e^{-j\theta}}$$

La respuesta al impulso se deduce directamente:

$$h[n] = u[n]\left(\frac{1}{3}\right)^n + 3u[n]\left(\frac{1}{2}\right)^n$$

(e) La densidad espectral de potencia es $G_e(e^{j\theta}) = \sigma_e^2$. La potencia del proceso es $E\{e^2[n]\} = R_e[0] = \sigma_e^2$

(f) La densidad espectral de potencia es $G_v(e^{j\theta}) = G_v(e^{j\theta})|H(e^{j\theta})|^2$. Por lo tanto $G_v(e^{j\theta}) = \sigma_e^2 \left|\frac{4-\frac{3}{2}e^{-j\theta}}{1-\frac{5}{6}e^{-j\theta}+\frac{1}{6}e^{-j2\theta}}\right|^2$