Modulación y Procesamiento de Señales

Práctico 8
P.C.M.

Cada ejercicio comienza con un símbolo el cual indica su dificultad de acuerdo a la siguiente escala: ✦ básico, ★ medio, ✷ avanzado, y ✹ difícil. Además puede tener un número, como (3.14) que indica el número de ejercicio del libro *Discrete-time signal processing*, Oppenheim/Schafer, 2nd.edition. O también de la forma (H3.14) para el libro *Statistical Digital Signal Processing and Modeling*, Monson H. Hayes.

✦ Ejercicio 1 **(12.1-{1,2})**

Se tiene un mensaje $x(t)$ de ancho de banda $W = 15\ kHz$, que se desea cuantificar con por lo menos 200 niveles y transmitir mediante una señal PCM m-aria con $m = 2^k$.

Se dispone de un ancho de banda máximo $B_T = 50\ kHz$.

Hallar el máximo valor posible para n (número de dígitos), la mayor frecuencia de muestreo f_s para dicho n, y el correspondiente valor de m.

Repetir para $B_T = 80\ kHz$.

✦ Ejercicio 2 **(12.1-{5,6})**

Se desea transmitir una señal de voz con $W = 3\ kHz$ y $S_x = 0,25$ mediante un sistema PCM m-ario. Hallar m, n, f_s dado que $B_T = 16\ kHz$ y $SNR_D \geq 40\ dB$.

Repetir para $B_T = 20kHz$, $SNR_D \geq 36dB$.

★ Ejercicio 3 **(12.2-1)**

Se desea transmitir una señal con $S_x = 0.5$ y $W = 6\ kHz$ mediante un sistema PCM m-ario por un canal con $\eta = 1 \times 10^{-8} W/Hz$ y $B_T = 15\ kHz$. Hallar el menor valor posible de m y el mayor valor de n correspondiente para obtener una $SNR_D \geq 36\ dB$.

Dados estos valores, y suponiendo que la señal PCM ocupa todo el ancho de banda de transmisión, calcular el mínimo valor de la potencia recibida S_R para operar arriba del umbral.

★ Ejercicio 4 **(Segundo Parcial 2013)**

Se desea enviar señales analógicas (supuestas normalizadas) utilizando un sistema PCM con un codificador M-ario de 16 dígitos. La máxima frecuencia de muestreo que puede lograr el sistema disponible es de $f_s = 10$ kHz.

(a) Realice los diagramas de bloques de el trasmisor y el receptor PCM.

(b) ¿Cuál es el ancho de banda máximo W_{max} para las señales de entrada?

Suponga que tiene una señal analógica a trasmitir con ancho de banda coincidente con W_{max} y potencia de señal $S_x = 1$. El canal tiene ancho de banda $B_T = 20$ kHz, atenuación de $L = 1$ e introduce ruido de valor $\eta = 10^{-8}$ W/Hz en las hipótesis usuales. El filtro de recepción tiene ancho de banda $B_R = B_T$

(c) ¿Cuál es la máxima cantidad de dígitos, n_{max}, que se pueden utilizar?

(d) ¿Cuál es la mínima potencia de transmisión S_T que se debe utilizar?

Se requiere que la SNR_D sea de por lo menos 50 dB. Suponga que el ruido de cuantificación domina frente al ruido de decodificación.

(e) Si se utiliza el valor de n_{max} hallado, ¿se logra cumplir este requerimiento?

Solución

Ejercicio 1

En el primer caso, $B_{T,máx} = 50\ kHz$. A su vez, se debe cumplir que:

$$m^n \geq q \geq 200 \Rightarrow n \geq \log_m(q) \geq \log_m(200) = \frac{\log_2(200)}{k}$$

$$B_T \geq \frac{nf_s}{2} \geq nW$$

Entonces:

$$n \leq \frac{B_T}{W} \leq \frac{50}{15} \approx 3.33 \Rightarrow n_{máx} = 3$$

$$B_T \geq \frac{nf_s}{2} \Rightarrow f_s \leq \frac{2B_T}{3} \leq \frac{100\ kHz}{3} \Rightarrow f_{s,máx} \approx 33.3\ kHz$$

Para estos valores, el valor de m es de:

$$m = 2^k \Rightarrow \left(2^k\right)^n \geq 200 \Rightarrow 2^{nk} \geq 200 \Rightarrow 3k \geq \log_2(200) \Rightarrow k \geq 2.55$$

Por lo tanto, $k_{mín} = 3$, y entonces $m_{mín} = 2^3 = 8$.

Si $B_T = 80\ kHz$, entonces:

$$n \leq \frac{80}{15} \approx 5.33 \Rightarrow n_{máx} = 5$$

$$f_{s,máx} = \frac{2B_{T,máx}}{n_{máx}} = \frac{160\ kHz}{5} \Rightarrow f_{s,máx} = 32\ kHz$$

Hallo m:

$$5k \geq \log_2(200) \Rightarrow k \geq 1.53 \Rightarrow k_{mín} = 2 \Rightarrow m_{mín} = 2^2 = 4$$

Ejercicio 2

Se sabe que:

$$B_T \geq \frac{nf_s}{2} \geq nW \Rightarrow \frac{2B_T}{n} \geq f_s \geq 2W$$

$$m^n \geq q$$

$$SNR_D = S_x \underbrace{\frac{3q^2}{E_{máx}^2}}_{=1} . \frac{f_s}{2W} \geq 40\ dB = 10^4$$

Entonces:

$$n \leq \frac{B_T}{W} = \frac{16}{3} \approx 5.33 \Rightarrow n = n_{máx} = 5$$

Luego:

$$\frac{2B_T}{5} \geq f_s \geq 2W \Leftrightarrow 6.4\ kHz \geq f_s \geq 6\ kHz$$

Tomo f_s mínimo, con lo que $f_s = 6.4\ kHz$.

Además:

$$0.25 \times 3 \times q^2 \times \frac{6.4}{6} \geq 10^4 \Rightarrow q \geq \sqrt{\frac{10^4 \times 6}{3 \times 0.25 \times 6.4}} \approx 111.8 \Rightarrow q \geq 111.8$$

$$\Rightarrow m^5 \geq 111.8 \Rightarrow m \geq 111.8^{1/5} \approx 2.57$$

Tomo $m = m_{mín}$, con lo que $m = 3$.

Si ahora $B_T = 20\ kHz$ y se quiere que $SNR_D \geq 36\ dB = 10^{3.6}$, entonces:

$$n \leq \frac{20}{3} \approx 6.67 \Rightarrow n = n_{máx} = 6$$

Tomo $f_s = \frac{2B_T}{n}$ (f_s máximo y por lo tanto m mínimo), con lo que $f_s = 6.7\ kHz$. De esta forma:

$$q \geq \sqrt{\frac{10^{3.6} \times 6}{3 \times 0.25 \times 6.7}} \approx 69.1 \Rightarrow m^6 \geq 69.1 \Rightarrow m \geq 69.1^{1/6} \approx 2.03$$

Entonces, tomo $m = m_{mín} = 3$.

Ejercicio 3

Primero que nada, se sabe que:

$$n \leq \frac{B_T}{W} = \frac{15}{6} = 2.5 \Rightarrow n = n_{máx} = 2$$

Por otro lado, suponiendo que trabajo sobre el umbral (de forma de no tener en cuenta el ruido de decodificación), se tiene que la relación señal a ruido en detección está dada por:

$$SNR_D = 3 \underbrace{\frac{q^2}{E_{máx}^2}}_{=1} S_x \frac{f_s}{2W} \geq 36\ dB = 10^{3.6}$$

Y por tanto:

$$q^2 = (m^n)^2 = m^4 \geq \frac{10^{3.6}}{3S_x} \times \frac{2W}{f_s} = \frac{10^{3.6}}{3 \times 0.5} \times \frac{2 \times 6}{f_s}$$

Por otro lado, se debe cumplir que:

$$B_T \geq \frac{nf_s}{2} \geq nW \Rightarrow \frac{2B_T}{n} \geq f_s \geq 2W \Rightarrow \frac{n}{2B_T} \leq \frac{1}{f_s} \leq \frac{1}{2W}$$

$$\Rightarrow m^4 \geq \frac{10^{3.6}}{1.5} \times 12\ kHz \times \frac{n}{2B_T} = \frac{10^{3.6} \times 12\ kHz}{1.5} \times \frac{2}{2 \times 15\ kHz} \approx 2123.2 \Rightarrow m \geq 6.8$$

Por lo tanto, $m_{mín} = 7$.

Cabe destacar que podría haberse planteado una cota inferior para m con:

$$n = \log_q m \leq \frac{B_T}{W}$$

$$\Rightarrow \sqrt{2123.2} \approx 46.1 \leq q \leq m^{\frac{15}{6}}$$

$$\Rightarrow m \geq 46.1^{\frac{6}{15}} \approx 4.63$$

$$\Rightarrow m \geq 5$$

Pero la elección de este mínimo no lleva a un valor de n válido, por lo que sería necesario incrementarlo hasta que n tome un valor "correcto" (y esto nos lleva a la misma solución que antes: $m = 7$, $n = 2$).

Para trabajar sobre el umbral (asumiendo codificación polar), se debe cumplir que:

$$SNR_R = \frac{S_R}{N_R} \geq 6\left(m^2 - 1\right) = SNR_{Rth}$$

$$\Rightarrow S_{R,mín} = 6N_R\left(m^2 - 1\right) = 6\eta B_T\left(m^2 - 1\right) \approx 43.2\ mW$$

Ejercicio 4

(a) Ver teórico.

(b) Por teorema de muestreo $W_{max} = 5\ kHz$.

(c) Tenemos que $B_T \geq n f_s/2$ por lo tanto $2B_T/f_s \geq n$ y se tiene

$$n_{max} = 2B_T/f_s = 4.$$

(d) La S_T mínima es la necesaria para superar $SNR_R^{umbral} \approx 6(M^2 - 1)$. Por lo tanto como $SNR_R = S_T/(L\eta B_T)$ se tiene que $S_T^{min} = L\eta B_T 6(M^2 - 1)$.

(e) El ruido de cuantificación domina frente al ruido de decodificación entonces se tiene que $P_e << 1/(4q^2)$, las señales se encuentran normalizadas $E_{max} = 1$, por lo que:

$$SNR_D = \frac{3q^2 S_x f_s}{2W} = 3M^{2n_{max}} S_x \approx 1.29 \times 10^{10} = 101dB \geq 50dB$$

Por lo tanto se logra cumplir el requerimiento.