Modulación por codificación de pulsos

Modulación y Procesamiento de Señales

Ernesto López
Pablo Zinemanas, Mauricio Ramos
{pzinemanas, mramos}@fing.edu.uy

Centro Universitario Regional Este
Sede Rocha
Tecnólogo en Telecomunicaciones

Curso 2016

Modulación por codificación de pulsos

- La modulación por codificación de pulsos (*PCM*, Pulse Code Modulation) es una técnica para la transmisión digital de mensajes analógicos.
- Consiste en digitalizar la señal analógica (muestrear, cuantizar y codificar) y transmitir en banda base la secuencia de bits obtenida.
- La motivación para hacer esto en lugar de transmitir directamente la señal analógica con técnicas de transmisión analógicas está vinculada a las ventajas de la transmisión digital:
  - Alta inmunidad al ruido, distorsión e interferencias
  - Posibilidad de emplear repetidores regenerativos para la comunicación analógica a larga distancia.
- Limitaciones de PCM:
  - Ruido de cuantización, que aparece en la conversión analógica-digital.
  - Incremento del ancho de banda de la señal PCM en comparación con el ancho de banda de la señal analógica original.

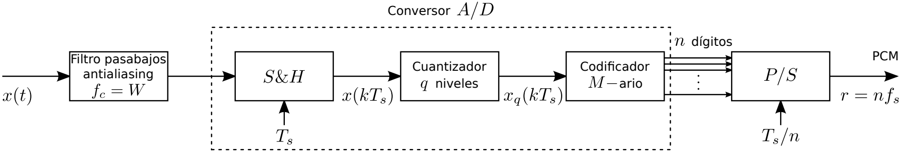
Sistema PCM

- En el transmisor, la señal analógica a transmitir se digitaliza con un conversor analógico a digital, obteniendo una secuencia de palabras M-arias.
  - Parámetros:
    - f_s: frecuencia de muestreo.
    - n: largo de palabra del código (cantidad de dígitos por muestra).
    - M: cantidad de símbolos del código (caso binario: $M = 2$)
- Los símbolos de cada palabra se envían en serie codificados como una señal *PAM* digital.
  - Al tratarse de una señal analógica codificada, la señal recibe el nombre de *PCM* en lugar de *PAM* digital.
- En el receptor, la señal PCM contaminada con ruido es reconstruida con un receptor regenerativo. Luego, se obtiene la señal analógica mediante un conversor digital a analógico.
  - El receptor regenerativo reconstruye la señal PCM con cierta probabilidad de error de símbolos P_e que depende de la $(S/N)_R$.
  - La señal analógica obtenida difiere de la original también debido al ruido de cuantización producido en la conversión A/D.

Generación de señal PCM y reconstrucción analógica

Generación de señal PCM

Diagrama de bloques del transmisor PCM



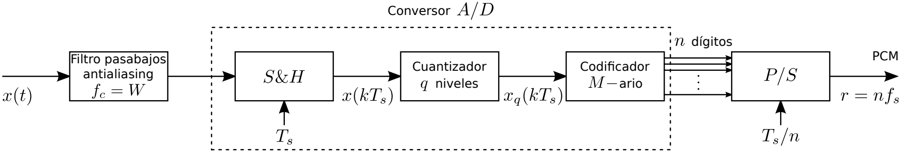
El mensaje que a transmitir es la señal analógica $x(t)$.

1. Filtro pasabajos antialiasing de frecuencia de corte W.
2. Conversor analógico a digital: muestrea la señal a $f_s \geq 2W$ y codifica cada muestra con una palabra M-aria de n dígitos.
   (a) Sistema de muestreo y retención de frecuencia de muestreo $f_s \geq 2W$.
   (b) Cuantizador de q niveles.
   (c) Codificador M-ario de n dígitos.

Generación de señal PCM y reconstrucción analógica

Generación de señal PCM

Diagrama de bloques del transmisor PCM

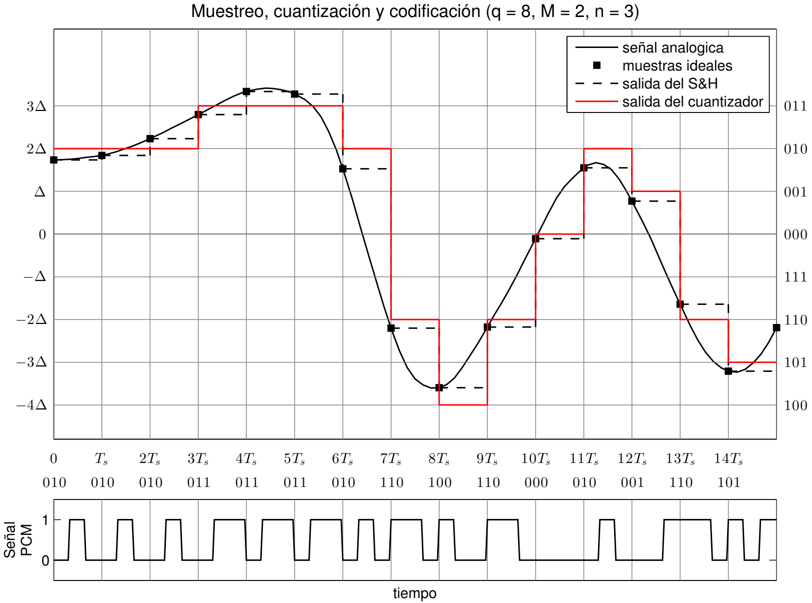


3. Sistema conversor de paralelo a serial. La salida es una secuencia de símbolos correspondientes a los dígitos de cada palabra M-aria que representa cada muestra.
   - Como la frecuencia de las muestras es f_s y cada muestra se codifica con una palabra de n símbolos, la cadencia de símbolos es

$$r = nf_s \qquad\qquad (\text{baudios} \;\equiv\; \text{símbolos/s}).$$

- $[n]$ = símbolos/muestra
- $[f_s]$ = muestras/s

Generación de señal PCM y reconstrucción analógica



Generación de señal PCM y reconstrucción analógica

Tasa de señalización y ancho de banda de transmisión

- Se requiere un código con una cantidad de palabras suficiente para codificar los q niveles de cuantización,

$$M^n \geq q, \qquad \Leftrightarrow \qquad n \geq \log_M q$$

- En el caso de codificación binaria, el número de niveles es una potencia de 2, $q = 2^n$.
- Si el ancho de banda de la señal analógica es W, la frecuencia de muestreo tiene que cumplir el teorema de muestreo, y por lo tanto,

$$f_s \geq 2W.$$

- Además, la tasa de señalización de la señal PCM es

$$r = nf_s$$

Generación de señal PCM y reconstrucción analógica

Tasa de señalización y ancho de banda de transmisión

- Según la tasa de señalización de Nyquist, para que no se produzca ISI, el ancho de banda de transmisión en banda base tiene que cumplir que $r \leq 2B_T$, y por lo tanto,

$$B_T \geq \frac{1}{2}r = \frac{1}{2}nf_s \geq nW$$

- El ancho de banda de transmisión de la señal PCM es al menos n veces el ancho de banda de la señal analógica original.

Generación de señal PCM y reconstrucción analógica

Ejemplo: codificación de la señal telefónica

- En el bucle de abonados, la señal se transmite en banda base sin codificar, es decir, se transmite la forma de onda analógica tal como es capturada por el micrófono del teléfono.
- En la central telefónica, la señal de voz es digitalizada y codificada PCM.
- Los parámetros de la digitalización y codificación son los siguientes:
  - La señal se filtra pasabajos para limitarla en banda a $W = 3.4$ kHz.
  - Se muestrea a frecuencia de muestreo $f_s = 8$ kHz.
  - Las muestras se cuantizan y se codifican con un código binario de $n = 8$ bits.
    - Esto implica que el número de niveles de cuantización es

$$q = 2^n = 2^8 = 256.$$

- Por lo tanto, la cadencia de bits de la señal PCM queda

$$r = nf_s = 8 \text{ bits/muestra} \times 8000 \text{ muestras/s} = 64 \text{ kbits/s}$$

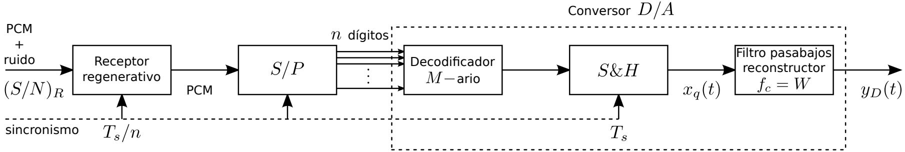
- El ancho de banda de transmisión es

$$B_T \geq \frac{1}{2}r = 32 \text{ kHz}.$$

Generación de señal PCM y reconstrucción analógica

Reconstrucción analógica a partir de la señal PCM

Diagrama de bloques del receptor PCM



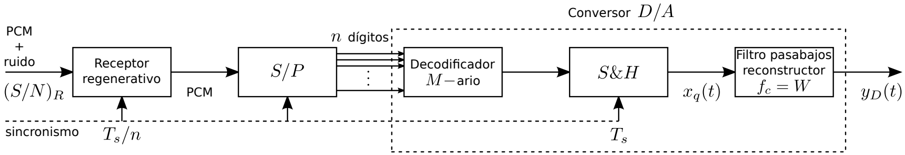
La señal recibida es una señal PCM distorsionada y contaminada con ruido, con cierta relación señal a ruido en la recepción de $(S/N)_R$.

1. El receptor regenerativo produce una onda PCM limpia y casi libre de errores si la $(S/N)_R$ es suficientemente grande.
2. El sistema de conversión de serie a paralelo tiene como salida los dígitos en paralelo de cada palabra M-aria.

Generación de señal PCM y reconstrucción analógica

Reconstrucción analógica a partir de la señal PCM

Diagrama de bloques del receptor PCM



3. El conversor D/A convierte la señal digital en una señal analógica.

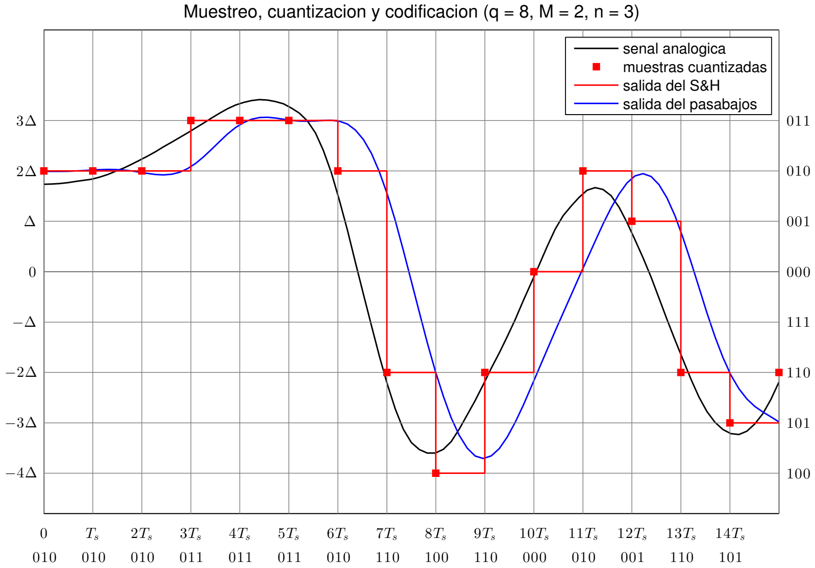
   (a) El decodificador transforma la palabra del código en el nivel de amplitud correspondiente.

   (b) El sistema de muestreo y retención crea una señal escalonada con los niveles de amplitud dados por el decodificador. Esta señal difiere de la señal del $S\&H$ del conversor A/D debido a la cuantización.

   (c) El filtro pasabajos reconstructor suaviza la señal escalonada para producir la salida en el destino $y_D(t)$.

Generación de señal PCM y reconstrucción analógica

Señales en las distintas etapas del receptor PCM



Análisis del ruido en el sistema PCM

- La señal analógica reconstruida en el receptor difiere de la señal analógica original debido a tres factores:
  1. El valor de las muestras a la entrada del conversor D/A está cuantizado y por lo tanto difiere de los valores de las muestras ideales con precisión infinita.
     - La consecuencia es la adición de ruido de cuantización.
  2. El proceso de conversión digital a analógico no es ideal. El sistema sistema ideal es el conversor de tiempo discreto a tiempo continuo (conversor D/C).
     - En el proceso ideal, las muestras son convertidas a un tren de impulsos (deltas de dirac) que luego es filtrado con un pasabajos ideal.
     - En el proceso de conversión D/A, las muestras son convertidas a un tren de pulsos (salida del $S\&H$) que luego es filtrado por un pasabajos no ideal.
  3. Error de decodificación: el receptor regenerativo comete errores de detección en los símbolos con cierta probabilidad de error P_e.
     - Esto se manifiesta en un error en la amplitud de la muestra con el símbolo erroneo.
- Se ignorará el efecto de la conversión D/A no ideal y se estudiará el efecto de los errores de cuantización y decodificación.

Análisis del ruido en el sistema PCM

- Ignorando el efecto de la conversión D/A no ideal, el ruido que contamina una señal PCM recibida tiene dos orígenes:
  - Ruido de cuantización:
    - Es el ruido que aparece en la conversión A/D al truncar el valor de las muestras al nivel de cuantización mas cercano.
    - Este ruido es intrínseco de la representación digital y está presente incluso cuando la señal se transmite por un canal ideal sin ruido y distorsión.
  - Ruido de decodificación:
    - El ruido aditivo en el canal puede producir errores en la detección de los símbolos en el destino.
    - Un error en un bit produce una alteración en la palabra del código recibida, representando un nivel de cuantización distinto que el de la palabra original.
    - En consecuencia, se produce un error en la amplitud de la señal analógica reconstruida.
- La señal detectada en el receptor es

$$\hat{x}[k] = x[k] + e_q[k] + e_d[k]$$

- $x[k]$ es la señal original con muestreo ideal
- $e_q[k]$ es el error de cuantización
- $e_d[k]$ es el error de decodificación

Análisis del ruido de cuantización

- El objetivo es determinar la relación señal a ruido de cuantización.
- Para esto, es necesario determinar la potencia del ruido de cuantización.

Ruido de cuantización

- El error de cuantización se define como

$$e_q[k] = x_q[k] - x[k]$$

  - $x[k]$ es la muestra k-ésima sin cuantizar
  - $x_q[k]$ es la muestra k-ésima cuantizada

- Se vio previamente que si Δ es el intervalo entre pasos de cuantización sucesivos, se cumple que

$$-\frac{\Delta}{2} < e_q[k] \leq \frac{\Delta}{2}$$

- Modelo del error de cuantización:
  - El error de cuantización $e_q[k]$ es un proceso aleatorio estacionario, con muestras no correlacionadas entre si y no correlacionadas con las muestras de la señal original, $x[k]$.
  - La distribución de probabilidad del error es uniforme en el intervalo $(-\Delta/2,\, \Delta/2]$.

Análisis del ruido de cuantización

Ruido de cuantización

- Bajo estas hipótesis, se vio que la varianza del ruido de cuantización es

$$\sigma_q^2 = \frac{\Delta^2}{12}$$

- Sean
  - q: cantidad de niveles de cuantización
  - X_m: escala completa del cuantizador

$$\Delta = \frac{2X_m}{q}$$

- La varianza del ruido de cuantización se puede expresar en función de los parámetros del conversor A/D como

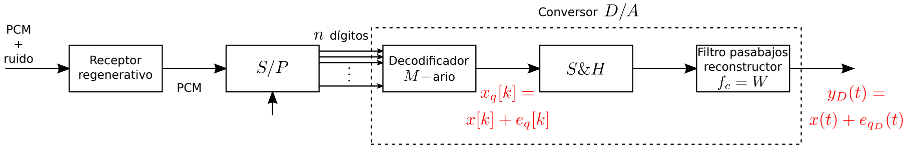
$$\sigma_q^2 = \frac{X_m^2}{3q^2}$$

- Pero interesa calcular la potencia del ruido de cuantización en tiempo continuo (luego del conversor D/A del receptor) para comparar con la potencia de la señal analógica S_D el destino.

Análisis del ruido de cuantización

Ruido de cuantización

Diagrama de bloques del receptor PCM



- Se llegó a que el ruido de cuantización $e_q[k]$ tiene potencia

$$\sigma_q^2 = \frac{X_m^2}{3q^2}$$

- La potencia del ruido analógico $e_{q_D}(t)$ en el destino es (ver Apéndice)

$$N_D = \sigma_q^2 \frac{2W}{f_s}$$

- Sustituyendo σ_q^2 en función de los parámetros del conversor, queda

$$N_D = \frac{X_m^2}{3q^2}\frac{2W}{f_s} \qquad (1)$$

Decrece al incrementar la cantidad de bits q para representar cada muestra y al incrementar la frecuencia de muestreo.

Análisis del ruido de cuantización

Relación señal a ruido de cuantización en el destino

- La potencia de la señal original es

$$S_x \triangleq E\{x^2(t)\} = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_T x^2(t)\,dt.$$

- Asumiendo que el transmisor tiene ganancia que compensa la pérdida del canal, la potencia en el destino es $S_D \approx S_x$.
- Por lo tanto, la relación señal a ruido en el destino es

$$\left(\frac{S}{N}\right)_D = \frac{S_D}{N_D} \quad \Rightarrow \quad \left(\frac{S}{N}\right)_D = 3q^2 \frac{S_x}{X_m^2} \frac{f_s}{2W} \tag{2}$$

- En el caso usual en que el factor de escala es $X_m = 1$ $(|x(t)| \leq 1)$ y que la frecuencia de muestreo se elige como $f_s = 2W$, la relación señal a ruido de cuantización queda

$$\left(\frac{S}{N}\right)_D = 3q^2 S_x.$$

Análisis del ruido de cuantización

Relación señal a ruido de cuantización en el destino

- Si se emplea un código binario de n bits para codificar las muestras, la cantidad de niveles de cuantización es $q = 2^n$.
- La relación señal a ruido expresada en decibeles queda

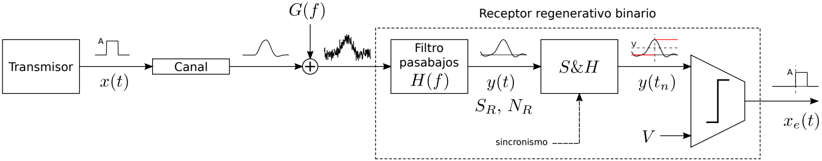
$$\begin{aligned}\left(\frac{S}{N}\right)_D &= 10\log_{10}(3 \times 2^{2n} S_x)\\ &= 10\log_{10}(3) + 20n\log_{10}(2) + 10\log_{10}(S_x)\\ &\leq 4.8 + 6n \text{ dB.}\end{aligned}$$

  donde se tuvo en cuenta que si $|x(t)| \leq 1$, $S_x \leq 1$.
- Este resultado indica que la relación señal a ruido de cuantización se incrementa 6 dB por cada bit que se agrega al código binario.
- En un sistema de telefonía básica, donde se emplea PCM con $n =$8 bits para codificar las muestras, se tiene que

$$\left(\frac{S}{N}\right)_D \leq 52.8 \text{ dB.}$$

Análisis del ruido de decodificación

Ruido de decodificación



- El ruido de decodificación es producido por los errores en la detección de los bits cometidos por el receptor regenerativo.
  - El receptor regenerativo comete errores en la detección de los bits (confunde un 0 por un 1 o viceversa) con probabilidad P_e.
  - La probabilidad de error P_e depende de la relación señal a ruido en predetección.
  - En el caso de ruido gaussiano, se vio que

$$P_e = \begin{cases} Q\left(\sqrt{\frac{1}{2}(S/N)_R}\right) & \text{Unipolar NRZ} \\ Q\left(\sqrt{(S/N)_R}\right) & \text{Polar NRZ} \end{cases}$$

Análisis del ruido de decodificación

- Se quiere determinar la influencia del error de decodificación en la relación señal a ruido en el destino.
- Para esto, hay que calcular la potencia del ruido de decodificación.
- Se asumirán las siguientes hipótesis:
  - La señal PCM usa codificación binaria con palabras de n bits.
  - La probabilidad de error es pequeña, por ejemplo, $P_e \approx 10^{-5}$.

Potencia del ruido de decodificación

- Probabilidad de detectar una palabra con error:
  - Teniendo en cuenta que la probabilidad de error de bit P_e es pequeña, se puede asumir que una palabra con error solo tendrá a lo sumo un bit erróneo.
    - La probabilidad de que una palabra se detecte con mas de un bit erróneo es despreciable.
  - La probabilidad de que una palabra se detecte con el bit m-ésimo erróneo y el resto de los bits sin error es

$$P(\text{palabra con error en bit } m - \text{ésimo}) = P_e(1 - P_e)^{n-1}$$

    - Es la probabilidad de tener un error en el bit m-esimo y no tener error (probabilidad $1 - P_e$) en cada uno del resto de los bits.

Análisis del ruido de decodificación

Potencia del ruido de decodificación

- Probabilidad de detectar una palabra con error:
  - Si P_e es pequeño, $1 - P_e \approx 1$ y por lo tanto,

$$P(\text{palabra con error en bit } m - \text{ésimo}) \approx P_e. \tag{3}$$

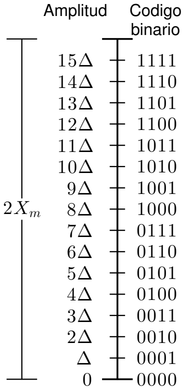
- Error en la amplitud causado por el error de un bit en la palabra

- Se considera una palabra binaria natural de n bits de la forma

$$b_{n-1}, b_{n-2}, \ldots, b_1, b_0$$

- Si la palabra tiene un error en el bit m-ésimo, con $0 \leq m \leq n-1$, la diferencia con la palabra sin error son 2^m niveles de cuantización.
- El error cometido en la amplitud de la señal es

$$e_m = 2^m \Delta = 2^m \frac{2X_m}{q}. \tag{4}$$



Análisis del ruido de decodificación

Potencia del ruido de decodificación

- La potencia del error de decodificación σ_d^2 es

$$\sigma_d^2 \triangleq E\{e_d^2[k]\} = \sum_{m=0}^{n-1} P(\text{palabra con error en bit } m - \text{ésimo})e_m^2 \qquad (5)$$

$$\begin{aligned}
\sigma_d^2 &\overset{(a)}{=} P_e \sum_{m=0}^{n-1}\left(2^m\frac{2X_m}{q}\right)^2 \\
&= \frac{4X_m^2P_e}{q^2}\sum_{m=0}^{n-1}4^m \\
&\overset{(b)}{=} \frac{4X_m^2P_e}{q^2}\frac{4^n-1}{3} \\
&= \frac{4X_m^2P_e}{3}\frac{q^2-1}{q^2} \\
&\overset{(c)}{\approx} \frac{4X_m^2P_e}{3}
\end{aligned}$$

(a) Se sustituyen los resultados de las ecuaciones 3 y 4 en 5.

(b) Suma de serie geométrica

$$\sum_{m=0}^{n-1} r^k = \frac{r^n-1}{r-1}, \qquad r \neq 1$$

(c) La cantidad de niveles de cuantización q es grande, por lo que $q \gg 1$

- Se llegó a que

$$\sigma_d^2 \approx \frac{4X_m^2P_e}{3} \qquad (6)$$

Análisis del ruido de decodificación

Potencia del ruido de decodificación

- Realizando el razonamiento análogo al realizado para el ruido de cuantización (ver Apéndice), se llega a que la potencia del ruido de decodificación analógico en detección es

$$N_D = \sigma_d^2 \frac{2W}{f_s}.$$

- Sustituyendo el resultado de la ecuación 6 resulta en

$$N_D = \frac{4X_m^2 P_e}{3} \frac{2W}{f_s}. \tag{7}$$

Relación señal a ruido del sistema PCM

- El error de cuantización y el error de decodificación provienen de fuentes independientes, y por lo tanto, se pueden considerar no correlacionados.
- Esto implica que la potencia del ruido en detección es la suma de la potencia del ruido de cuantización y del ruido de decodificación, y usando las ecuaciones 1 y 7 queda

$$\begin{aligned} N_D &= \left(\sigma_q^2 + \sigma_d^2\right)\frac{2W}{f_s} \\ &= \left(\frac{X_m^2}{3q^2} + \frac{4X_m^2 P_e}{3}\right)\frac{2W}{f_s} \\ &= \frac{X_m^2}{3}\left(\frac{1}{q^2} + 4P_e\right)\frac{2W}{f_s}. \end{aligned}$$

- Notar que si

$$\begin{aligned} P_e \ll 1/4q^2 &\quad : \quad \text{predominio del ruido de cuantización} \\ P_e \gg 1/4q^2 &\quad : \quad \text{predominio del ruido de decodificación} \end{aligned}$$

Relación señal a ruido del sistema PCM

- Si el transmisor tiene ganancia que compensa la pérdida en el canal, $S_D \approx S_x$, y la relación señal a ruido en el destino es

$$\left(\frac{S}{N}\right)_D = \frac{S_x}{X_m^2}\left(\frac{3q^2}{1+4q^2P_e}\right)\frac{f_s}{2W}. \tag{8}$$

- En el caso usual en que $X_m = 1$ y la señal analógica se muestrea a la tasa de Nyquist, es decir $f_s = 2W$, la relación señal a ruido se reduce a

$$\left(\frac{S}{N}\right)_D = \frac{3q^2}{1+4q^2P_e}S_x \tag{9}$$

Relación señal a ruido del sistema PCM

Umbral de error

- Para analizar la influencia de las dos fuentes de error se consideran los dos casos extremos siguientes

$$\left(\frac{S}{N}\right)_D = \begin{cases} 3q^2 S_x & P_e \ll 1/4q^2 \quad \text{(predominio cuantización)} \\ \dfrac{3}{4P_e} S_x & P_e \gg 1/4q^2 \quad \text{(predominio decodificación)} \end{cases}$$

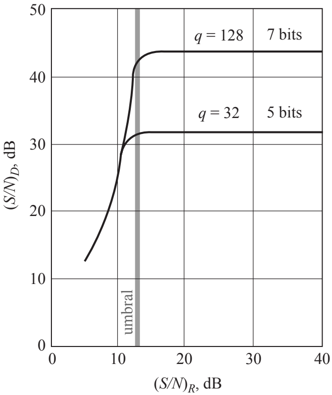
  - En la región de dominio del error de decodificación, la relación señal a ruido en el destino $(S/N)_D$ depende de la probabilidad de error P_e, que a su vez depende de la relación señal a ruido recibida $(S/N)_R$.
    - Si la $(S/N)_R$ decrece, crece la probabilidad de error de bits P_e del receptor y decrece $(S/N)_D$.
  - En la región de dominio del error de cuantización, la relación señal a ruido en el destino $(S/N)_D$ depende de la cantidad de niveles de cuantización q y no depende de la relación señal a ruido en la predetección $(S/N)_R$.

Relación señal a ruido del sistema PCM

- Ejemplo:
  - En el caso de señalización polar con ruido gaussiano,

$$P_e = Q\left(\sqrt{(S/N)_R}\right)$$

  - En la figura se considera ese caso con $S_x = 0.5$.
  - Se observa que para $(S/N)_R$ menor a cierto umbral, la $(S/N)_D$ se deteriora rapidamente.



- El umbral de error se define come el punto en donde el error de decodificación reduce la $(S/N)_D$ en 1 dB.
- Operando por debajo del umbral, los errores de decodificación alteran la amplitud de la señal en gran magnitud, y si ocurren muy frecuentemente, deterioran tanto la forma de onda que el mensaje se hace irreconocible.

Relación señal a ruido del sistema PCM

- Los sistemas de comunicación PCM se diseñan para operar en la región sobre el umbral, donde domina el error de cuantización y se cumple que $P_e \ll 1/4q^2$.
- En general, puede decirse que los errores de decodificación tienen un efecto despreciable si $P_e \leq 10^{-5}$.
- En el caso de codificación M-aria polar NRZ, la probabilidad de error es

$$P_e = 2\left(1 - \frac{1}{M}\right) Q\left[\sqrt{\frac{3}{M^2 - 1}\left(\frac{S}{N}\right)_R}\right]$$

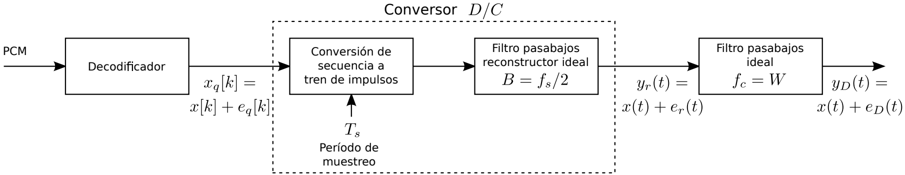
- Se puede demostrar que para que $P_e \leq 10^{-5}$, la $(S/N)_R$ tiene que cumplir que

$$\left(\frac{S}{N}\right)_R \approx 6\left(M^2 - 1\right)$$

- Si la $(S/N)_R$ es inferior, el sistema opera por debajo del umbral de error y la forma de onda se destruye debido a los frecuentes errores de decodificación.

Apéndice: potencia del ruido de cuantización en el destino

- Como moldeo matemático para el análisis de la potencia del ruido de cuantización en el destino, se asume el siguiente diagrama de bloques:



  - En el modelo, se asume que el proceso de conversión D/A es ideal y por lo tanto, se reconstruye la señal en tiempo continuo con el conversor D/C.
  - El segundo pasabajos es para eliminar el ruido $e_r(t)$ fuera del ancho de banda del mensaje (W).
    - Esto es solo un modelo para realizar el análisis. En la práctica alcanza con incluir un solo pasabajos de frecuencia de corte $f_c = W$, teniendo en cuenta que se debe cumplir que $f_s/2 \geq W$.
  - El objetivo es calcular la potencia N_D de $e_D(t)$ conociendo la potencia σ_q^2 de $e_q[k]$.

Apéndice: potencia del ruido de cuantización en el destino

Densidad espectral de potencia de $e_r(t)$

- La señal en tiempo discreto reconstruida se puede expresar como

$$y_r(t) = x(t) + e_r(t) \qquad \text{con} \qquad e_r(t) = \sum_k e_q[k] \operatorname{sinc}\left(\frac{t - kT_s}{T_s}\right),$$

  donde $e_r(t)$ corresponde a la reconstrucción del ruido.

- $e_r(t)$ tiene la forma de una señal PAM,

$$e_r(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} e_q[k] p(t - kT_s) \qquad \text{con} \qquad p(t) = \operatorname{sinc}\left(\frac{t}{T_s}\right)$$

- Por lo tanto, la densidad espectral de potencia es

$$G_{e_r}(f) = |P(f)|^2 \frac{1}{T_s} \sum_{k=-\infty}^{\infty} R_{e_q}[k] e^{-j2\pi f k T_s} \tag{10}$$

Apéndice: potencia del ruido de cuantización en el destino

Densidad espectral de potencia de $e_r(t)$

- Como el ruido de cuantización es blanco, de media nula y varianza σ_q^2, la autocorrelación es

$$R_{e_q}[k] = \mathrm{E}\{e_q[n]e_q[n-k]\} = \sigma_q^2\delta[k]$$

- y la ecuación 10 se reduce a

$$G_{e_r}(f) = \frac{1}{T_s}|P(f)|^2\sigma_q^2 = f_s|P(f)|^2\sigma_q^2 \tag{11}$$

Seno cardinal

$$p(t) = \mathrm{sinc}\left(\frac{t}{T_s}\right)$$

Espectro

$$P(f) = \frac{1}{f_s}\Pi\left(\frac{f}{f_s}\right)$$

- Sustituyendo $P(f)$ en la ecuación 11 se llega a que

$$G_{e_r}(f) = \frac{\sigma_q^2}{f_s}\Pi\left(\frac{f}{f_s}\right)$$

Apéndice: potencia del ruido de cuantización en el destino

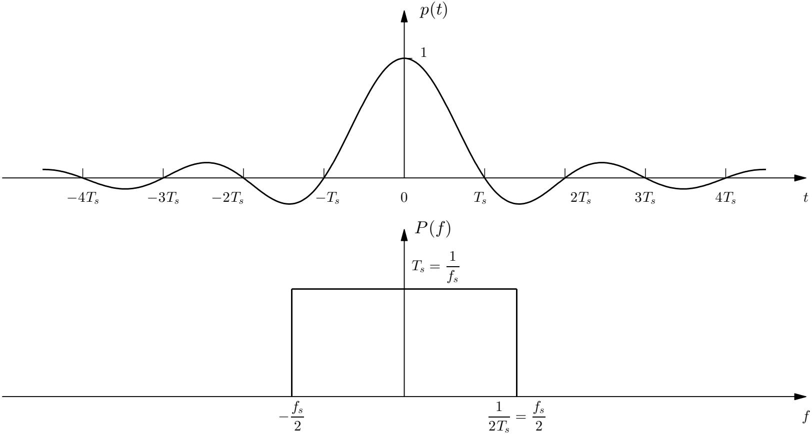
Densidad espectral de potencia de $e_r(t)$

Seno cardinal

$$p(t) = \text{sinc}\left(\frac{t}{T_s}\right)$$

Espectro

$$P(f) = \frac{1}{f_s}\Pi\left(\frac{f}{f_s}\right)$$



Apéndice: potencia del ruido de cuantización en el destino

Cálculo de la potencia

- Finalmente, el ruido reconstruido se filtra con un pasabajos de frecuencia de corte $f_c = W \leq f_s/2$ y ganancia unitaria, resultando en

$$G_{e_D}(f) = \frac{\sigma_q^2}{f_s}\Pi\left(\frac{f}{2W}\right)$$

- La potencia del ruido en el destino es

$$N_D = E\{e_D^2(t)\} = \int_{-\infty}^{\infty} G_{e_D}(f)df$$

Observación: teniendo en cuenta que la autocorrelación y la densidad espectral de potencia forman un par de transformadas de Fourier,

$$R_x(\tau) \triangleq E\{x(t)x(t-\tau)\} = \int_{-\infty}^{\infty} G_x(f)e^{j2\pi f\tau}df \quad \Rightarrow \quad R_x(0) = \int_{-\infty}^{\infty} G_x(f)df$$

Apéndice: potencia del ruido de cuantización en el destino

Cálculo de la potencia

- Finalmente, la potencia del ruido en el destino es

$$
\begin{aligned}
N_D &= \frac{\sigma_q^2}{f_s} \int_{-\infty}^{\infty} \Pi\left(\frac{f}{2W}\right) df \\
&= \frac{\sigma_q^2}{f_s} \int_{-W}^{W} 1 \, df \\
&= \frac{\sigma_q^2}{f_s} f \bigg|_{-W}^{W},
\end{aligned}
$$

- que resulta en

$$
N_D = \sigma_q^2 \frac{2W}{f_s} \tag{12}
$$

Referencias I

Carlson, A. B. and Crilly, P. (2009).
Communication Systems, chapter 12.
McGraw-Hill Science/Engineering/Math, 5th edition.