Modulación y Procesamiento de Señales

Práctico 7
PAM, codificación de línea

Cada ejercicio comienza con un símbolo el cual indica su dificultad de acuerdo a la siguiente escala: ✦ básico, ★ medio, ✷ avanzado, y ✹ difícil. Además puede tener un número, como (3.14) que indica el número de ejercicio del libro *Discrete-time signal processing*, Oppenheim/Schafer, 2nd.edition. O también de la forma (H3.14) para el libro *Statistical Digital Signal Processing and Modeling*, Monson H. Hayes.

★ Ejercicio 1

Considerar una señal aleatoria binaria con valores 0 y 1 equiprobables, independientes entre sí. Ésta se codifica en forma polar donde a los pulsos se les da la siguiente forma:

$$f(t) = \begin{cases} \cos(\frac{\pi t}{T_b}) & |t| < \frac{T_b}{2} \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

T_b es el tiempo de un bit.

(a) Bosquejar un ejemplo de la onda conformada.

(b) Encontrar una expresión para la densidad espectral de potencia de la señal. Bosquejar.

✷ Ejercicio 2

Se quiere trasmitir una secuencia $x[k]$ binaria, donde los 1 tienen probabilidad $\frac{1}{3}$ y se les asigna el valor A y los 0 tienen probabilidad $\frac{2}{3}$ y se les asigna el valor $-A$, y son independientes entre sí. La secuencia se quiere trasmitir a una cadencia de $r = \frac{1}{T}$ $bits/s$. Para adecuar la señal al canal se quiere utilizar un código de línea apropiado.

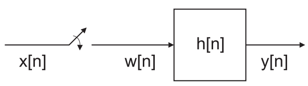


Figura 1: Código de línea

(a) Hallar y graficar la autocorrelación de la secuencia de entrada y su densidad de potencia.

Para que el proceso $y(t)$ sea estacionario se considera que el pulso de conformación se encuentra retardado un tiempo t_d respecto al origen de la secuencia, con t_d uniformemente distribuido en el intervalo $[0, T]$.

(b) Hallar la densidad espectral de potencia de $y(t)$.

(c) En particular hallar y graficar para el caso en que:

1. El conformador saca pulsos rectangulares de ancho T
2. Idem pero en este caso los pulsos $p(t)$ tienen la forma de la Figura 2.

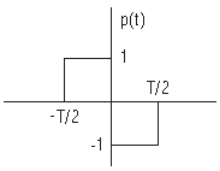


Figura 2: Forma de los pulsos.

(d) Comparar ambos espectros, ventajas y desventajas.

(e) Indicar qué pasa con el espectro de la señal de salida cuando se cambia la forma de pulso del conformador. Dar criterios para la elección de dicho pulso.

✦ Ejercicio 3

El sistema de la figura trasmite pulsos binarios equiprobables sin retorno a cero. Los valores lógicos '1' y '0' corresponden a pulsos rectangulares de altura $\pm A$ de duración T. El filtro de recepción $H_R(f)$ es un pasabajos ideal, de ancho de banda B_R.

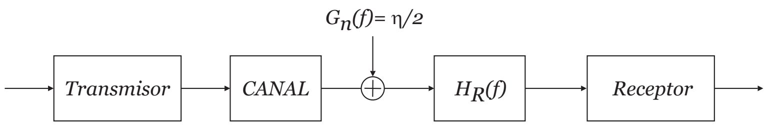


Figura 3: Sistema trasmisor de pulsos binarios.

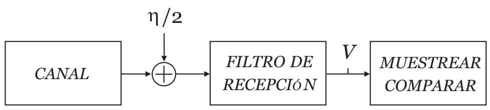
(a) Dar el nivel de decisión óptimo en el receptor.

(b) Encontrar la potencia de la señal en recepción asumiendo que la amplificación en el transmisor compensa la atenuación del canal y hallar la probabilidad de error en recepción.

(c) Diseñar B_R.

✷ Ejercicio 4

Se trasmite una señal binaria que toma valores 0 y A correspondientes a 0 y 1 lógicos en forma equiprobable e independiente de los valores anteriores por un canal con ruido blanco gaussiano aditivo de densidad espectral $\eta/2$. El receptor se esquematiza en la siguiente figura.



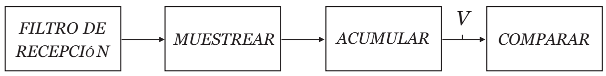
El filtro de recepción es un pasabajos ideal de ancho de banda B. Se supone que **no modifica los pulsos**, su finalidad es limitar el ruido.

(a) Si llamamos v a la señal a la entrada del comparador, hallar y graficar las probabilidades $p_v(v|0)$, probabilidad de la señal v cuando se trasmitió un 0 lógico. Ídem con $p_v(v|1)$ para el 1 lógico.

(b) Especificar los momentos estadísticos de interés.

(c) Dar el umbral de decisión y hallar la probabilidad de error. Calcular la potencia media de la señal trasmitida.

Se supone que cada dígito se trasmite m **veces consecutivas**. El receptor las suma antes del comparador según el esquema de la siguiente figura.



(d) Hallar las densidades de probabilidad $p_v(v|0)$, $p_v(v|1)$, especificando los momentos estadísticos. Graficar las densidades de probabilidad y comparar con el caso anterior.

(e) Elegir el umbral de decisión, calcular la probabilidad de error y la potencia media trasmitida.

(f) Explicar cómo, manteniendo una misma probabilidad de error en el segundo esquema, la amplitud A puede ser menor que en el primer esquema. ¿Esto implica alguna mejora? ¿Tiene contrapartida?

⋆ Ejercicio 5 **(Segundo Parcial 2014)**

(a) Describa las transformaciones que sufre una señal PAM digital al viajar desde la fuente hasta llegar al receptor.

(b) Dibuje el diagrama de bloques del receptor regenerativo usado en la transmisión digital en banda base y describa su funcionamiento explicando qué hace cada bloque.

(c) Considere que la señal PAM es binaria unipolar NRZ con pulsos de amplitud $A = 1$ y con igual probabilidad de bits. Además, el transmisor compensa la atenuación del canal y el ruido en predetección tiene desviación estándar $\sigma = 0.12$. Si el comparador del receptor regenerativo usa el umbral $V = A/4$, calcule la probabilidad P_{e_0} de confundir un cero con un uno, la probabilidad P_{e_1} de confundir un uno con un cero y la probabilidad total de error de detección de bits. Compare el resultado con el caso en que el receptor usa el umbral óptimo.

✸ Ejercicio 6 **(Segundo Parcial 2014)**

Se considera un sistema de transmisión bandabase polar binario **RZ** (con retorno a cero) que utiliza pulsos rectangulares. La fuente emite los símbolos lógicos "0" y "1" de forma equiprobable. El tiempo de bit del código es T_b, el retorno a cero se produce en la mitad de tiempo de bit y la amplitud de los pulsos es $\pm A/2$. El filtro de recepción $H_R(f)$ es un pasabajos ideal de ancho de banda B_R y el canal cumple con las hipótesis habituales.

(a) Calcule y esboce la densidad espectral de potencia de la señal PAM. Además, calcule la potencia de la señal PAM en función de A.

(b) Indique el valor de la frecuencia de corte B_R del filtro de recepción $H_R(f)$ justificando su elección.

Se considera que el canal introduce ruido blanco gaussiano de potencia η W/Hz y el transmisor tiene un amplificador que compensa la atenuación del canal.

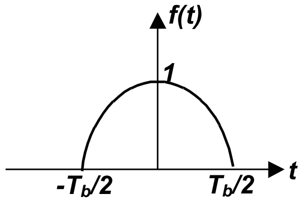
(c) Esboce la densidad espectral de potencia del ruido antes y después del filtro pasabajos del receptor.

(d) Calcule la probabilidad de error de bit de este sistema en función de la SNR_R y discuta el resultado comparando con el caso en que se usa codificación del línea polar NRZ.

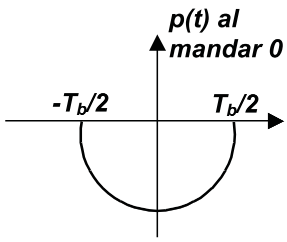
Solución

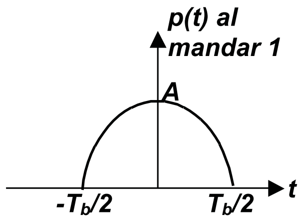
Ejercicio 1

(a) Primero que nada, graficamos $f(t)$. Esto se muestra en la siguiente figura.

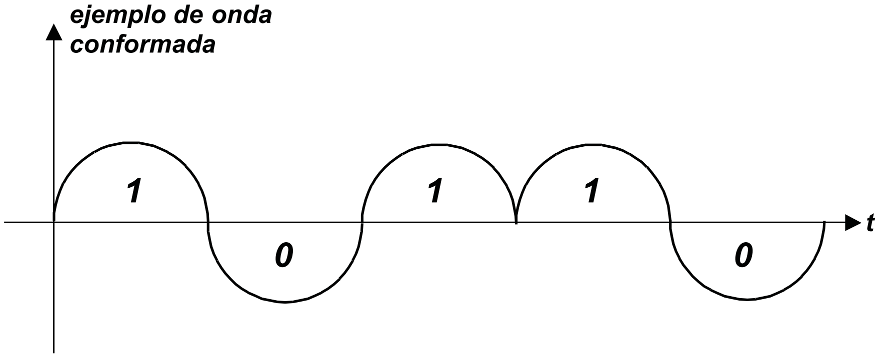


Luego, como se usa codificación polar, se tiene que el 0 se envía con amplitud $-A$, mientras el 1 se envía con amplitud A. La forma que tiene el pulso que representará el 0 y el 1 se muestran en las siguientes figuras.





Finalmente, un ejemplo de la onda conformada, es decir, la forma de la onda al mandar una cierta secuencia de 0's y 1's (en este caso se usó 10110), se muestra en la siguiente figura.



(b) Dado que $x(t)$ es una señal PAM, sabemos que su densidad espectral de potencia es de la forma:

$$G_x(f) = \frac{\sigma_a^2|P(f)|^2}{T_b} + \frac{m_a^2}{T_b^2}\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\left|P\left(\frac{k}{T_b}\right)\right|^2 \delta\left(f-\frac{k}{T_b}\right)$$

Calculamos la media de la señal, m_a, y su varianza, σ_a^2:

$$m_a = \frac{1}{2}A + \frac{1}{2}(-A) = 0$$

$$\sigma_a^2 = R_{a_k}(0) - m_a^2 = R_{a_k}(0) = \frac{1}{2}A^2 + \frac{1}{2}(-A)^2 = A^2$$

$$\Rightarrow G_x(f) = \frac{A^2|P(f)|^2}{T_b}$$

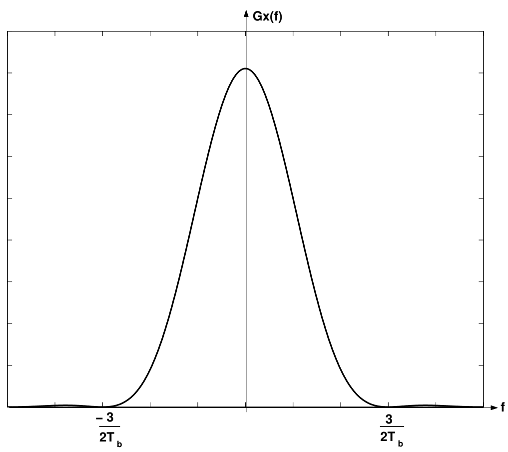
Como $p(t) = \cos\left(\frac{\pi t}{T_b}\right).\Pi\left(\frac{t}{T_b}\right)$, se cumple que:

$$\begin{aligned} P(f) &= \left[\frac{\delta(f-1/2T_b)+\delta(f+1/2T_b)}{2}\right] * T_b.sinc(fT_b) \\ &= \frac{T_b}{2}\left[sinc(T_bf-1/2)+sinc(T_bf+1/2)\right] \end{aligned}$$

Entonces, la densidad espectral de potencia de $x(t)$ queda:

$$G_x(f) = \frac{A^2T_b\left|sinc(T_bf-1/2)+sinc(T_bf+1/2)\right|^2}{4}$$

La siguiente figura muestra un bosquejo de la forma de $G_x(f)$.



Ejercicio 2

(a) Planteamos el cálculo de la autocorrelación:

- $n \neq m$

$$R_x[n,m] = \mathbb{E}\{x[n]x[m]\} = \mathbb{E}\{x[n]\}\mathbb{E}\{x[m]\} = m_x^2 = \left(\frac{A}{3}+\frac{-2A}{3}\right)^2 = \frac{A^2}{9}$$

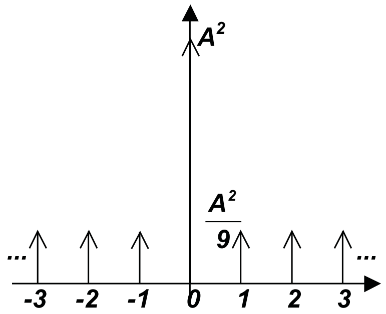
- $n = m$

$$R_x[n,n] = \mathbb{E}\left\{x[n]^2\right\} = \frac{A^2}{3} + \frac{2(-A)^2}{3} = A^2$$

Entonces:

$$R_x[n] = A^2\delta[n] + \sum_{k\neq 0}\frac{A^2}{9}\delta[n-k]$$

La forma de la autocorrelación se muestra en la siguiente figura.



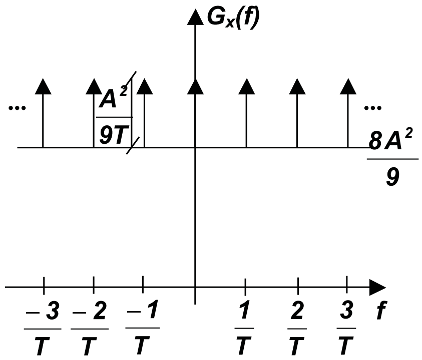
Para hallar la densidad espectral de potencia de $x(t)$, escribimos la autocorrelación en la forma:

$$R_x[n] = \frac{8A^2}{9}\delta[n] + \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \frac{A^2}{9}\delta[n-k]$$

Aplicando la transformada de Fourier a esta igualdad, se obtiene la densidad espectral de potencia $G_x(f)$:

$$G_x(f) = \frac{8A^2}{9} + \frac{A^2}{9T}\sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta(f - k/T)$$

Su forma se muestra en la siguiente figura.



(b)

$$y(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[k]p(t - kT - t_d)$$

Como $y(t)$ es una señal PAM, se sabe que su densidad espectral de potencia es de la forma:

$$G_y(f) = \frac{\sigma_x^2|P(f)|^2}{T} + \frac{m_x^2}{T^2}\sum_{k=-\infty}^{+\infty} \left|P\left(\frac{k}{T}\right)\right|^2 \delta\left(f - \frac{k}{T}\right)$$

Calculamos la media y la varianza de x:

$$m_x = \frac{A}{3} + \frac{-2A}{3} = -\frac{A}{3}$$

$$\sigma_x^2 = R_x[0] - m_x = \frac{8A^2}{9}$$

Entonces:

$$G_y(f) = \frac{8A^2|P(f)|^2}{9T} + \frac{A^2}{9T^2}\sum_{k=-\infty}^{+\infty} \left|P\left(\frac{k}{T}\right)\right|^2 \delta\left(f - \frac{k}{T}\right)$$

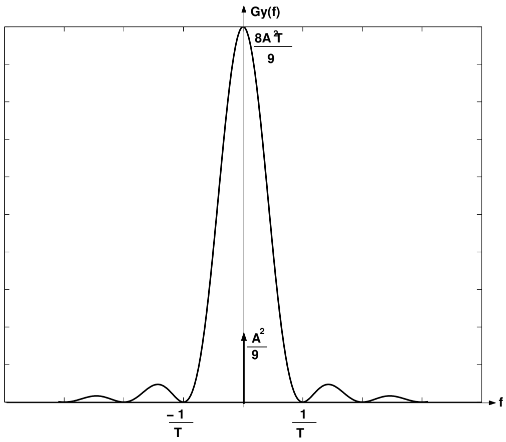
(c)

1. En este caso, $p(t) = \Pi(t/T) \Rightarrow P(f) = Tsinc(fT)$.

   Como $P(k/T) = 0 \ \forall k \neq 0$ y $P(0) = T$, se tiene que:

$$G_y(f) = \frac{8A^2}{9}T^2 sinc^2(fT) + \frac{A^2}{9}\delta(0)$$

   La gráfica de $G_y(f)$ se muestra en la siguiente figura.



2. En este caso, $p(t) = \Pi\left(\frac{t+T/4}{T/2}\right) - \Pi\left(\frac{t-T/4}{T/2}\right)$.

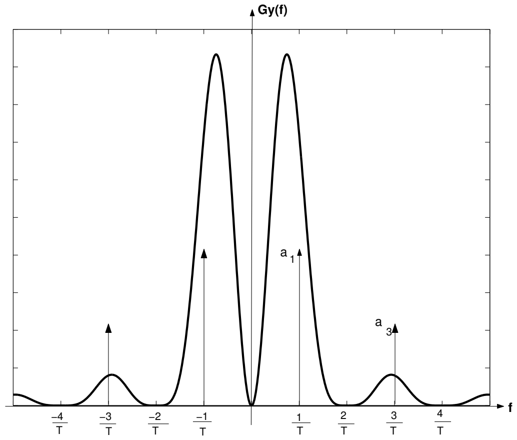
   Luego:

$$\begin{aligned}
P(f) &= \frac{T}{2}sinc\left(\frac{fT}{2}\right)e^{j2\pi f\frac{T}{4}} - \frac{T}{2}sinc\left(\frac{fT}{2}\right)e^{-j2\pi f\frac{T}{4}} \\
&= \frac{T}{2}sinc\left(\frac{fT}{2}\right)\left(e^{j2\pi f\frac{T}{4}} - e^{-j2\pi f\frac{T}{4}}\right) \\
&= \frac{T}{2}sinc\left(\frac{fT}{2}\right)2j\sin\left(2\pi\frac{T}{4}f\right) \\
&= jTsinc\left(\frac{fT}{2}\right)\sin\left(2\pi\frac{T}{4}f\right)
\end{aligned}$$

   Luego, se tiene que $|P(f)|^2 = T^2 sinc^2(fT/2)\sin^2(2\pi\frac{T}{4}f)$, y entonces:

$$\begin{aligned}
G_y(f) &= \frac{8A^2}{9}Tsinc^2\left(\frac{fT}{2}\right)\sin^2\left(2\pi\frac{T}{4}f\right) + \frac{A^2}{9}\sum_{k=-\infty}^{+\infty} sinc^2\left(\frac{k}{2}\right)\sin^2\left(\frac{kT}{2}\right)\delta\left(f - \frac{k}{T}\right) \\
&= \frac{8A^2}{9}Tsinc^2\left(\frac{fT}{2}\right)\sin^2\left(2\pi\frac{T}{4}f\right) + \frac{A^2}{9}\sum_{k=-\infty}^{+\infty} sinc^2\left(\frac{2k+1}{2}\right)\delta\left(f - \frac{2k+1}{T}\right)
\end{aligned}$$

   La gráfica de $G_y(f)$ se muestra en la siguiente figura.



donde $a_k = \frac{A^2}{9} sinc^2(k/2)$, k impar.

(d) La ventaja del primer espectro es que tiene menor ancho de banda. Sin embargo, tiene componente de continua y no envía información de reloj en la propia señal.

Por otra parte, el segundo espectro, si bien tiene un mayor ancho de banda, tiene como ventajas que no tiene componente de continua, y que envía información de reloj en la propia señal.

(e) Dado que al cambiar la forma del pulso conformador $p(t)$ también cambia $P(f)$, como el espectro de la señal conformada (señal PAM) depende de $P(f)$, entonces éste también será alterado.

Para elegir el pulso deben tenerse en cuenta las propiedades deseables de una decodificación, que son:

- que sea adecuada a las propiedades del canal;
- que utilice el menor ancho de banda posible;
- que posea autosincronización (o sea, que se envíe información de reloj en la propia señal);
- que produzca una probabilidad de error lo más pequeña posible en detección.

Ejercicio 3

(a) Dado que los símbolos son equiprobables por simetría el nivel de decisión óptimo está dado por el punto medio entre las gaussianas:

$$V_{ópt} = \frac{\hat{a}_1 + \hat{a}_0}{2} = \frac{A + (-A)}{2} = 0$$

(b) La probabilidad de error para este tipo de señalización y ruido aditivo blanco gaussiano vale $P_e = Q(\sqrt{(S/N)_R})$.

La potencia de la señal en recepción $S_R \approx S_x$, dado que se asume que la amplificación en el transmisor compensa la atenuación del canal.

$$S_x = \int_{-\infty}^{+\infty} G_x(f) df = R_x(0)$$

A su vez $x(t)$ es una señal PAM aleatoria con densidad espectral de potencia

$$G_x(f) = \frac{A^2}{r} sinc^2(\frac{f}{r}) = A^2 T sinc^2(fT)$$

Aplicando la transformada inversa de Fourier se obtiene su autocorrelación

$$R_x[\tau] = A^2 \Lambda\left(\frac{t}{T}\right)$$

Que evaluada en cero permite obtener la potencia $S_R \approx S_x = A^2$
Para la potencia de ruido en recepción tenemos,

$$N_R = \int_{-\infty}^{+\infty} \|H_R(f)\|^2 \, G_\eta(f) df = \int_{-B_R}^{+B_R} \frac{\eta}{2} df = \left(\frac{\eta}{2}\right) 2B_R = \eta B_R = \sigma_\eta^2$$

Por lo tanto la probabilidad de error en recepción es de

$$P_e = Q\left(\sqrt{\frac{A^2}{\eta B_R}}\right)$$

(c) Diseño B_R de forma de dejar pasar la mitad del primer cruce por cero de la transformada de Fourier del pulso conformador; de esta forma me aseguro de que los pulsos no sean muy distorsionados al atravesar el canal:

$$p(t) = \Pi\left(\frac{t}{T}\right) \Rightarrow P(f) = T sinc(fT) \Rightarrow B_R = \frac{1}{2T}$$

Ejercicio 4

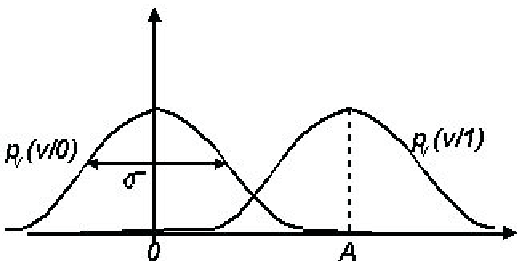
(a) Sé que a la entrada del comparador, la señal v es de la forma $v[k] = x[k] + n[k]$, donde x es la señal que se envió, y n representa el ruido.

Por lo tanto, si se transmitió un 0, se tiene que $v[k] = n[k]$ y si se transmitió un 1, $v[k] = A + n[k]$.

Se ve que si no hubiera ruido, la densidad de probabilidad de v serían dos deltas, una en 0 y otra en A, pero como hay presencia de ruido blanco gaussiano, lo que se tiene en realidad es de la forma:

$$\begin{aligned} p_V(v|0) &= p_N(v) \\ p_V(v|1) &= p_N(v - A) \end{aligned}$$

La forma de estas densidades de probabilidad se muestra en la figura siguiente.



(b) Los momentos estadísticos de interés son la media de las gaussianas, y su varianza.

La primera está dada por el valor en el cual se centran las curvas: las medias son 0 y A.

La segunda está relacionada con el "ancho" de las mismas: ambas tienen varianza σ^2.

(c) Sea u el umbral óptimo de decisión. Entonces:

$$P_e = \underbrace{P_0}_{=\frac{1}{2}}.P_{e0} + \underbrace{P_1}_{=\frac{1}{2}}.P_{e1} \Rightarrow P_{e,min} / \left.\frac{\partial P_e}{\partial v}\right|_{min} = 0$$

$$\left.\begin{array}{lll} P_{e0} & = & \int_u^{+\infty} p_V(v|0)dv \\ P_{e1} & = & \int_{-\infty}^{u} p_V(v|1)dv \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{\partial P_e}{\partial v} = \frac{1}{2}\left(\underbrace{\frac{\partial P_{e0}}{\partial v}}_{p_V(u|0)} + \underbrace{\frac{\partial P_{e1}}{\partial v}}_{-p_V(u|1)}\right)$$

$$\Rightarrow \frac{\partial P_e}{\partial v} = 0 \Leftrightarrow p_V(u|0) = p_V(u|1) \Leftrightarrow u = \frac{A}{2}$$

Luego la probabilidad de error queda:

$$P_e = Q\left(\frac{A}{2\sigma}\right)$$

Por otro lado, $S_R = A^2.P_A + 0^2.P_0 = \frac{A^2}{2}$, y $N_R = \sigma^2$, con lo que $\frac{A}{2\sigma} = \sqrt{SNR_R/2}$, y entonces:

$$P_e = Q\left(\sqrt{\frac{SNR_R}{2}}\right)$$

(d) Al repetirse cada dígito m veces consecutivas, a la entrada del comparador se tiene la señal $v'[k]$ igual a:

$$v'[k] = x[k] + n[k] + x[k-1] + n[k-1] + \ldots + x[k-m+1] + n[k-m+1] = mx[k] + n'[k]$$

Luego, si transmití un 0, tendré que $v'[k] = n'[k]$, mientras que si transmití un 1, $v'[k] = mA + n'[k]$.

Siendo $n'[k]$ es la suma de ruido blanco de media nula y varianza σ^2.

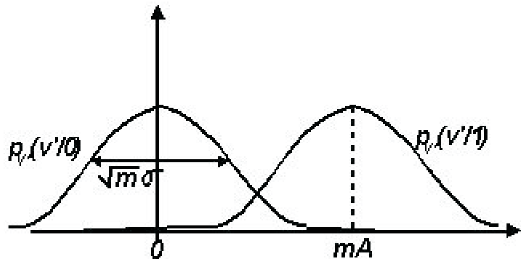
Observar que no podemos suponer que el ruido $n[k], n[k-1], ..., n[k-m+1]$ sean independientes entre si. Para poder asegurar lo anterior, debemos verificar que la autocorrelación del rudio muestreado a frecuencia f_s es una delta (es decir que es un proceso blanco), lo cual en principio no resulta evidente ya que el ruido muestreado no es blanco, dado que fue previamente recortado por el filtro pasabajos.

Por lo anterior, $G_n(f) = \frac{\eta}{2}\Pi\left(\frac{f}{2B}\right)$, y por lo tanto su autocorrelación es $R_n(\tau) = \eta.B.sinc(2B\tau)$. Dada la forma de $sinc(2B\tau)$, función que se anula en los múltiplos de $1/2B$, se tiene entonces que la máxima frecuencia de muestreo que puede usarse es justamente de $2B$, pudiéndose emplear alternativamente frecuencias de valor $2B/n$, con n entero. De esta forma, la autocorrelación del proceso ruido muestreado es una delta y podemos garantizar la independencia de los distintos instantes de ruido.

Por lo tanto, podemos suponern que los $n[i]$ son independientes con lo cual la varianza de $n'[k]$ es igual a $m.\sigma^2$, y su media es la suma de las medias de cada $n[i]$, que vale 0. En consecuencia, se tiene que:

$$\begin{array}{lll} p_{V'}(v'|0) & \sim & N(0, \sqrt{m}\sigma) \\ p_{V'}(v'|1) & \sim & N(mA, \sqrt{m}\sigma) \end{array}$$

La forma de estas densidades de probabilidad se muestra en la siguiente figura.



(e) Nuevamente, dado que la forma de las dos curvas de densidad de probabilidad es idéntica, se cumple que el umbral óptimo es equidistante de las dos medias, y por lo tanto vale:

$$u = \frac{mA + 0}{2} = \frac{mA}{2}$$

Entonces, se cumple que:

$$P_e = Q\left(\frac{mA}{2\sqrt{m}\sigma}\right) = Q\left(\frac{\sqrt{m}A}{2\sigma}\right) < Q\left(\frac{A}{2\sigma}\right)$$

La potencia transmitida en este caso es la misma que en el caso anterior, ya que existe la misma probabilidad de enviar 0 y 1, y por lo tanto:

$$S_T = \frac{1}{2}.A^2 + \frac{1}{2}.0^2 = \frac{A^2}{2}$$

(cabe notar que a lo largo de todo este ejercicio se supuso un canal sin atenuación por lo que $S_T = S_R$).

(f) Para mantener la P_e del primer esquema, se debe cumplir que:

$$\frac{\sqrt{m}A'}{2\sigma} = \frac{A}{2\sigma} \Rightarrow A' = \frac{A}{\sqrt{m}}$$

La **mejora** consiste en que la potencia transmitida, S'_T, igual a $\frac{A'^2}{2} = \frac{A^2}{2m}$, es menor que la anterior.

Sin embargo, esta opción tiene como **contrapartida** que demora m veces más tiempo en transmitir la misma información (es decir, el flujo de información disminuye).

Si quisiera mantener el flujo de información, entonces tendría que aumentar la cadencia. La nueva cadencia será $r' = mr = m/T$, y por lo tanto el ancho de banda mínimo también deberá ser mayor: $B'_{mín} = r' = mr = B_{mín}$.

Ejercicio 5

(a) Ver teórico.

(b) Ver teórico.

(c) La probabilidad de confundir un "0" con un "1" es

$$P_{e_0} = Q\left(\frac{V}{\sigma}\right) = Q\left(\frac{A}{4\sigma}\right) = Q\left(\frac{1}{4 \times 0.12}\right) \approx Q(2.1) \approx 2 \times 10^{-2}$$

La probabilidad de confundir un "1" con un "0" es

$$P_{e_1} = Q\left(\frac{A - V}{\sigma}\right) = Q\left(\frac{3A}{4\sigma}\right) = Q\left(\frac{3}{4 \times 0.12}\right) \approx Q(6.3) \approx 2 \times 10^{-10}$$

La probabilidad total de error es

$$P_e = \frac{1}{2}\left(P_{e_0} + P_{e_1}\right) \approx 1 \times 10^{-2}$$

El umbral óptimo del receptor es $V = A/2$, y en ese caso, la probabilidad de error es

$$P_e = Q\left(\frac{A}{2\sigma}\right) = Q\left(\frac{1}{2\times 0.12}\right) \approx Q(4.2) \approx 2\times 10^{-5}$$

Ejercicio 6

(a) La densidad espectral de potencia de una señal PAM de la forma

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k p(t-kD)$$

es

$$G_x(f) = \sigma_a^2 r_b |P(f)|^2 + (\mu_a r_b)^2 \sum_{k=-\infty}^{\infty} |P(kr_b)|^2 \delta\left(f - kr_b\right) \tag{1}$$

Como el código de línea es con retorno a cero, el pulso conformador es

$$p(t) = \Pi\left(\frac{t}{T_b/2}\right)$$

øque tiene transformada de Fourier

$$P(f) = \frac{1}{2r_b}\text{sinc}\frac{f}{2r_b}.$$

Como $a_k = \pm A/2$ de forma equiprobable, se tiene que

$$\mu_a = 0, \qquad \sigma_a^2 = \frac{A^2}{4}$$

Sustituyendo en la ecuación 1 se obtiene que la PSD queda

$$G_x(f) = \frac{A^2}{16r_b}\text{sinc}^2\frac{f}{2r_b}.$$

donde $r_b = 1/T_b$.

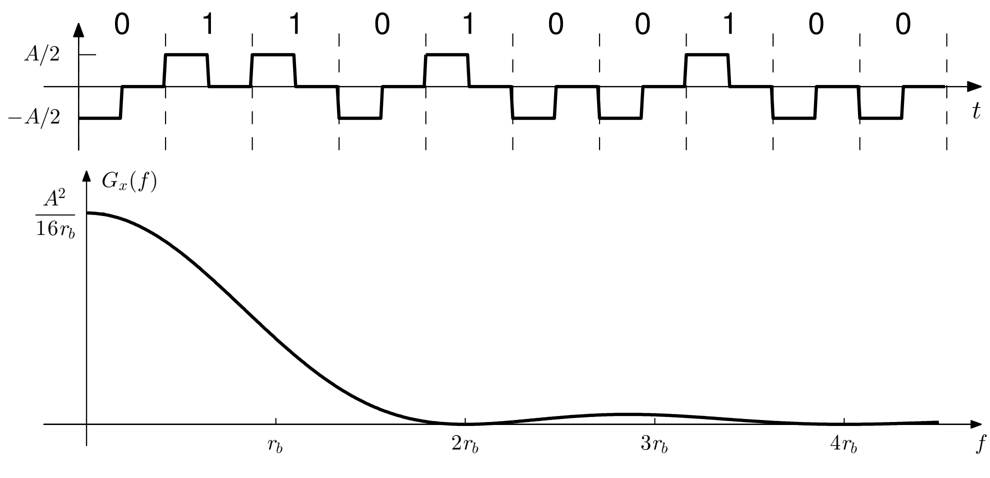


Figura 4: Densidad espectral de potencia de PAM polar RZ.

Si se usa el criterio para definir el ancho de banda como el primer cruce por cero, la señal tiene ancho de banda $2r_b$.

La potencia de la señal se puede calcular a partir del área total de la densidad espectral de potencia, que a su vez es igual a la autocorrelación en cero.

$$R_x[\tau] = \frac{A^2}{8}\Lambda\left(\frac{t}{(2r_b)^{-1}}\right)$$

Por lo tanto

$$S_x = R_x[0] = \frac{A^2}{8}$$

(b) El filtro $H_R(f)$ del receptor tiene que eliminar el ruido sin introducir ISI. Por lo tanto, la frecuencia de corte debe ser

$$B_R = 2r_b = \frac{2}{T_b} \text{ Hz.}$$

para dejar pasar a la señal PAM.

(c) El resultado se muestra en la figura 5.

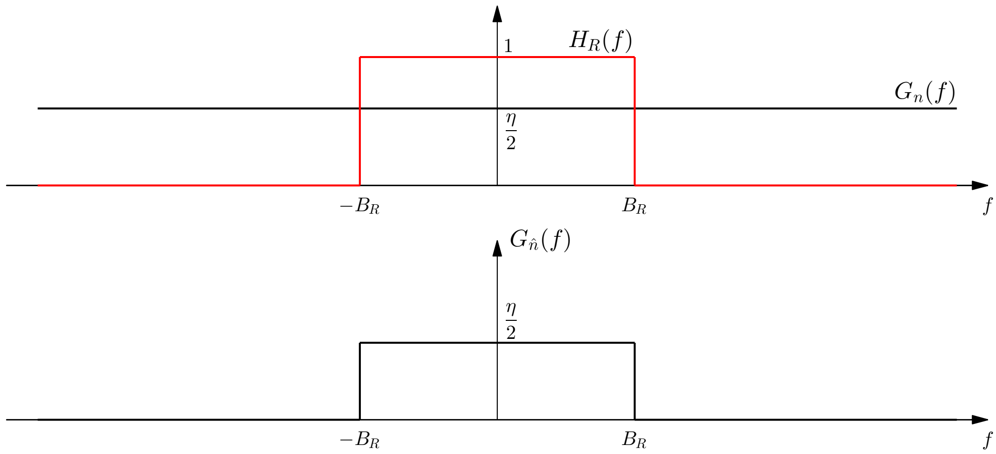


Figura 5: Ruido introducido por el canal antes y después del filtro pasabajos del receptor.

(d) La probabilidad de error de bit del receptor regenerativo es

$$P_e = Q\left(\frac{A}{2\sigma}\right)$$

Como el transmisor compensa la atenuación del canal, se cumple que $S_R = S_x$, y por la parte (a) se tiene que

$$S_R = \frac{A^2}{8}$$

Además, teniendo en cuenta que $N_R = \sigma^2$, se tiene que

$$\frac{S_R}{N_R} = \frac{A^2}{8\sigma^2} \qquad \Longleftrightarrow \qquad \frac{2S_R}{N_R} = \frac{A^2}{4\sigma^2} \qquad \Longleftrightarrow \qquad \frac{A}{2\sigma} = \sqrt{2SNR_R}.$$

Finalmente, la probabilidad de error para este sistema queda

$$P_e = Q\left(\sqrt{2SNR_R}\right).$$

Si se usa codificación polar NRZ, la probabilidad de error del receptor es

$$P_e = Q\left(\sqrt{SNR_R}\right)$$

y como la función $Q(x)$ es monótonamente decreciente con x, dada una misma SNR_R y por lo tanto una misma potencia de transmisión, la probabilidad de error al emplear el código RZ es menor que con el código NRZ.