Transmisión digital en banda base

Modulación y Procesamiento de Señales

Ernesto López
Pablo Zinemanas, Mauricio Ramos
{pzinemanas, mramos}@fing.edu.uy

Centro Universitario Regional Este
Sede Rocha
Tecnólogo en Telecomunicaciones

Curso 2016

Transmisión de señales analógicas en banda base

[Carlson and Crilly, 2009, cap 9]

- Previo al estudio de la transmisión de señales digitales, se comenzará analizando brevemente la transmisión de señales analógicas en banda base sobre un canal ruidoso.

- El objetivo de un sistema de comunicaciones analógico es la transmisión de un mensaje analógico a un destino distante.
  - El mensaje analógico se manifiesta como una señal de tiempo continuo $x(t)$.
  - Concretamente, el objetivo es obtener una copia lo mas fiel posible de la señal $x(t)$ en el destino distante.

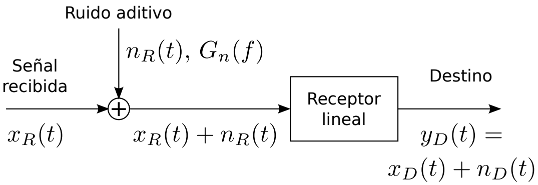
- Comunicación en banda base: no se altera la frecuencia de la señal a transmitir mediante modulación.
  - El espectro del mensaje está centrado en la frecuencia 0 Hz (continua).

- El desempeño de un sistema de comunicación analógico se mide a través de la relación señal a ruido en el destino.

Ruido aditivo y relaciones señal a ruido

Ruido aditivo

- En un sistema de comunicación, el ruido suele añadirse en diferentes puntos entre la fuente y el destino.
- En el análisis de sistemas, el ruido se modela como agrupado en una sola fuente a la entrada del receptor.
  - La entrada del receptor es el punto mas vulnerable del sistema, en donde el nivel de señal útil es mas débil debida a la atenuación.



- Como el receptor es lineal, la salida es la suma del componente de la señal con el componente del ruido,

$$y_D(t) = x_D(t) + n_D(t).$$

Ruido aditivo y relaciones señal a ruido

Ruido aditivo

- La potencia total P_D de la señal en el destino es

$$
\begin{aligned}
P_D \triangleq E\{y_D^2(t)\} &= E\{x_D^2(t) + 2x_D(t)n_D(t) + n_D^2(t)\} \\
&= E\{x_D^2(t)\} + 2E\{x_D(t)n_D(t)\} + E\{n_D^2(t)\}
\end{aligned}
$$

- Hipótesis sobre el ruido:
  - El ruido es un proceso estacionario en sentido amplio de media nula.
  - El ruido y la señal son independientes y por lo tanto no están correlacionados.
- Bajo estas hipótesis se cumple que

$$E\{x_D(t)n_D(t)\} = E\{x_D(t)\}E\{n_D(t)\} = 0$$

- La potencia total recibida es la suma de la potencia de la señal y la potencia del ruido

$$P_D \triangleq E\{y_D^2(t)\} = E\{x_D^2(t)\} + E\{n_D^2(t)\}.$$

Ruido aditivo y relaciones señal a ruido

Ruido aditivo

Potencia de la señal	Potencia del ruido	Potencia total
$S_D \triangleq E\{x_D^2(t)\}$	$N_D \triangleq E\{n_D^2(t)\}$	$P_D = S_D + N_D$

- La relación señal a ruido se define como el cociente entre la potencia de la señal útil y la potencia del ruido

$$\left(\frac{S}{N}\right)_D \triangleq \frac{S_D}{N_D}$$

- Observación: La potencia total de la señal en el destino es la suma de la potencia de la señal útil y la potencia del ruido debido a que se consideraron procesos independientes.

Ruido aditivo y relaciones señal a ruido

Ruido aditivo

- La propiedad de superposición de la potencia es importante en la práctica porque permite medir la relación señal señal a ruido:
  - La potencia total P_D se mide durante una transmisión normal
  - La potencia del ruido N_D se puede medir desconectando la señal útil, es decir, enviando una señal nula.
- A partir de los valores P_D y N_D medidos, se calcula

$$\frac{P_D}{N_D} = \frac{S_D + N_D}{N_D} = \frac{S_D}{N_D} + \frac{N_D}{N_D} = \left(\frac{S}{N}\right)_D + 1$$

- Por lo tanto, la magnitud de interés se obtiene como

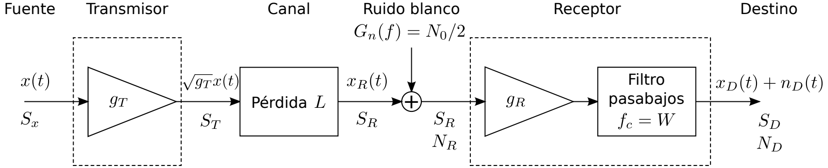
$$\left(\frac{S}{N}\right)_D = \frac{P_D}{N_D} - 1, \qquad \text{con } P_D \text{ y } N_D \text{ conocidos.}$$

- Para realizar las mediciones, se asume que los procesos son ergódicos y por lo tanto,

$$\begin{aligned} P_D &= E\{y_D^2(t)\} \\ &= \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} y_D^2(t)\,dt. \end{aligned}$$

Transmisión de señales analógicas en banda base

Sistema de transmisión de señales analógicas en banda base



La fuente de información genera una señal analógica $x(t)$ (mensaje) que se pretende reproducir lo mas fielmente posible en el destino.

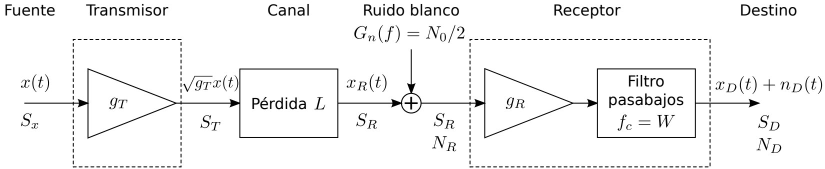
Transmisión de señales analógicas en banda base

Sistema de transmisión de señales analógicas en banda base
Hipótesis

- Mensaje:
  - La potencia del mensaje es S_x.
  - El mensaje se modela como un proceso ergódico de ancho de banda W Hz.
- Canal:
  - No genera distorsión. Esto significa que se modela como un SLIT con respuesta plana en el ancho de banda del mensaje.
  - Produce atenuación de un factor L en la potencia de la señal enviada.
  - Introduce ruido blanco con densidad espectral de potencia $G_n(f) = N_0/2$.
- Transmisor:
  - Amplifica un factor g_T la potencia de la señal a enviar.
- Receptor:
  - Amplifica un factor g_R la potencia de la señal recibida.
  - Filtrado pasabajos de frecuencia de corte W para atenuar el ruido sin afectar el mensaje.

Transmisión de señales analógicas en banda base

Potencia en las distintas etapas del sistema



Potencia de la señal útil

Potencia transmitida	Potencia recibida	Potencia en el destino
$S_T = g_T S_x$	$S_R = S_T/L$	$S_D = g_R S_R$

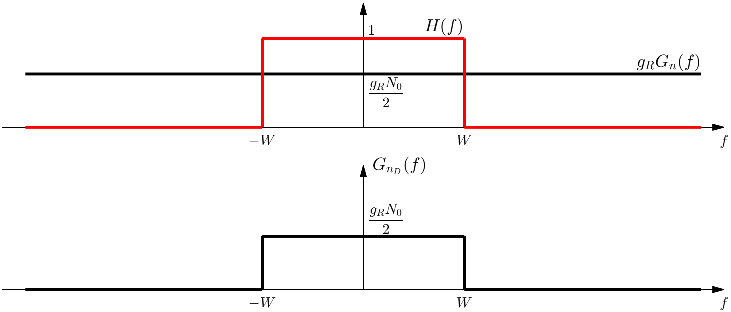
- Típicamente el sistema se diseña de forma tal que la amplificación del transmisor junto con la del receptor compensen la atenuación producida en el canal,

$$g_T g_R \approx L, \qquad S_D = \frac{g_T g_R}{L} S_x \approx S_x.$$

Transmisión de señales analógicas en banda base

Potencia del ruido en el destino

- La densidad espectral de potencia del ruido a la entrada del receptor es
$$G_n(f) = \frac{N_0}{2},$$
constante para todas las frecuencias (ruido blanco).
- El filtro pasabajos $H(f)$ del receptor tiene frecuencia de corte W, igual al ancho de banda del mensaje $x(t)$.



Transmisión de señales analógicas en banda base

Potencia del ruido en el destino

- El ruido en el destino, es decir, luego del filtrado pasabajos y el amplificador de ganancia en potencia g_R, tiene densidad espectral de potencia

$$G_{n_D}(f) = \begin{cases} g_R N_0/2 & \text{si } |f| \leq W \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

- Por lo tanto, la potencia del ruido en el destino es,

$$N_D = \int_{-\infty}^{\infty} G_{n_D}(f) df = \int_{-W}^{W} \frac{g_R N_0}{2} df = g_R N_0 W.$$

Relación señal a ruido en el destino

- La relación señal útil a ruido en el destino es

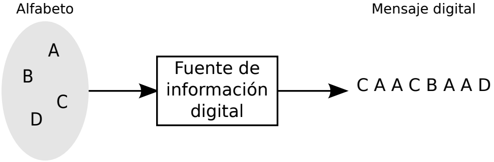
$$\left(\frac{S}{N}\right)_D = \frac{S_D}{N_D} = \frac{g_R S_R}{g_R N_0 W} = \frac{S_R}{N_0 W}$$

Transmisión digital en banda base

[Carlson and Crilly, 2009, cap 11]

Transmisión digital en banda base

- El objetivo de un sistema de comunicaciones digital es transferir un mensaje digital desde su fuente hasta el destino.
  - Un mensaje digital es una secuencia ordenada de símbolos producida por una fuente de información digital.
- La fuente de información se alimenta de un alfabeto de $M \geq 2$ símbolos distintos y produce símbolos de salida a una tasa promedio de r símbolos por segundo.

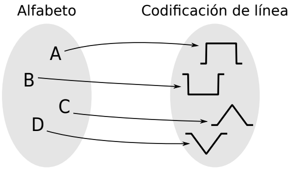


- El mensaje digital se transmite a través de un canal analógico.
  - Codificación de línea: conversión los símbolos del alfabeto en señales eléctricas.
- El desempeño de un sistema de comunicación digital se mide con
  - la tasa de señalización: velocidad o cadencia de los símbolos enviados (bits por segundo).
  - la probabilidad de error de los símbolos en el destino.

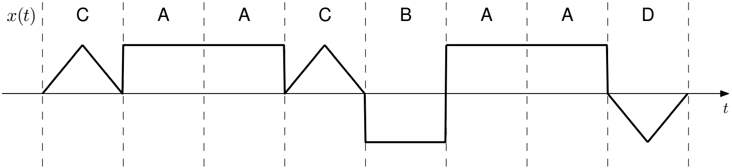
Transmisión digital en banda base

Codificación de línea

- Un sistema de comunicación digital transmite durante un intervalo T una señal analógica elegida de un conjunto de M señales posibles, dependiendo del símbolo de la fuente.



- Si la fuente produce el mensaje C A A C B A A D, se transmite por el canal analógico la señal $x(t)$:

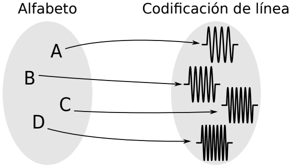


- Se dice que el sistema es de banda base porque el código de línea tiene frecuencias en un entorno de 0 Hz (continua).

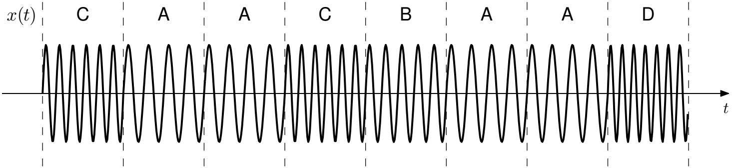
Transmisión digital en banda base

Codificación de línea

- En el caso en que la señal de línea esté modulada, se llama transmisión pasabanda.



- Si la fuente produce el mensaje C A A C B A A D, se transmite por el canal analógico la señal $x(t)$:



Señal digital de pulsos de amplitud modulada

- La representación de mensajes digitales en banda base toma la forma de un tren de pulsos de amplitud modulada (*PAM*, Pulse Amplitude Modulation).
- Esto significa que la señal analógica a transmitir es de la forma

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k p(t-kD)$$

  - a_k es la amplitud moduladora del k-ésimo símbolo del mensaje.
  - D es el tiempo entre símbolos. La fuente genera $r = 1/D$ símbolos/s.

- Observaciones:
  - La forma del pulso $p(t)$ modulado es fija, determinada por el código de línea elegido.
  - Si el alfabeto de la fuente tiene M símbolos, los niveles de amplitud a_k pertenecen a un conjunto de M valores discretos, uno por cada símbolo.
  - Por otro lado, cada símbolo de la fuente podría codificarse con una palabra binaria de K bits, con $K \geq \log_2 M$
    - En ese caso, solo hay dos niveles de amplitud correspondientes a los símbolos 0 y 1.
    - El tiempo entre símbolos es $T_b = D/K$.

Señal digital de pulsos de amplitud modulada

Ejemplo

- Se considera una fuente de información digital que emite símbolos de un alfabeto de $M = 4$ símbolos distintos: A, B, C y D.
- La fuente emite un símbolo cada D segundos o equivalentemente, a una cadencia de $r = 1/D$ símbolos/s.

Símbolo	Amplitud a_k	Código binario
A	3A/4	10
B	A/2	11
C	-A/2	01
D	-3A/4	00

Codificación cuaternaria

- Amplitudes moduladoras

$$a_k \in \left\{ -\frac{3A}{4}, -\frac{A}{2}, \frac{A}{2}, \frac{3A}{2} \right\}$$

- Pulso modulado

$$p(t) = \begin{cases} 1, & 0 < t < D \\ 0, & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Codificación binaria

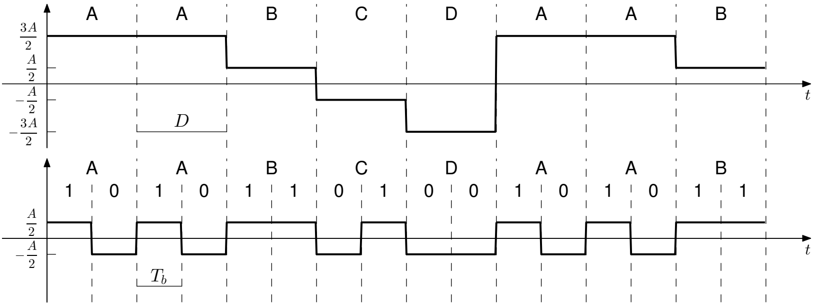
- Amplitudes moduladoras

$$a_k \in \left\{ -\frac{A}{2}, \frac{A}{2} \right\}$$

- Pulso modulado

$$p(t) = \begin{cases} 1, & 0 < t < T_b = D/2 \\ 0, & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Señal digital de pulsos de amplitud modulada



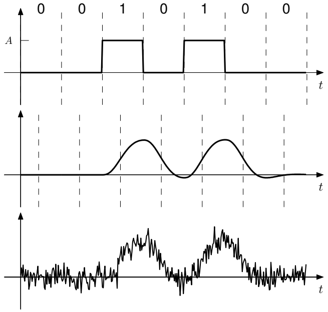
- Resumiendo, en un sistema de comunicación digital, se transmite una señal analógica que consiste en una sucesión de pulsos modulados en amplitud.
  - La señal analógica transmitida se denomina señal PAM digital.
- Si se usan $M > 2$ niveles de amplitud a_k en la señal *PAM* el código de línea se llama código M-ario.

Ventajas de la comunicación digital

Regeneración del mensaje

Es posible recuperar el mensaje original a pesar de su transmisión por un canal ruidoso.

- Efecto del canal
  - Atenuación, retardo, distorsión
  - Interferencias y ruido aditivo
- Interferencia intersimbólica
  - La distorsión en el canal produce interferencia intersimbólica (*ISI*, Intersymbol Interference): desbordamiento de los pulsos hacia ranuras vecinas.

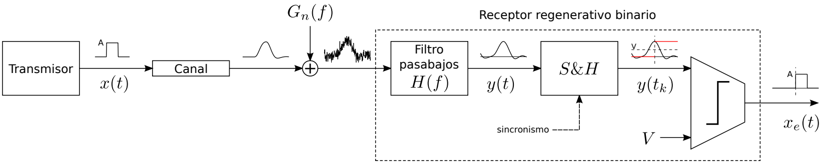


Ventajas de la comunicación digital

Regeneración del mensaje

- El receptor de un sistema de comunicación digital en banda base se llama receptor regenerativo.

- El receptor regenerativo reconstruye el mensaje, eventualmente con algunos errores con probabilidad P_e.

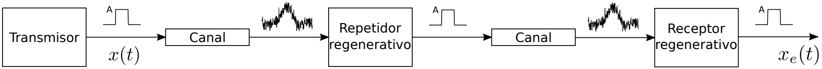


- Una complicación del receptor regenerativo, es que necesita una señal de sincronismo para muestrear los pulsos en los instantes óptimos.

Ventajas de la comunicación digital

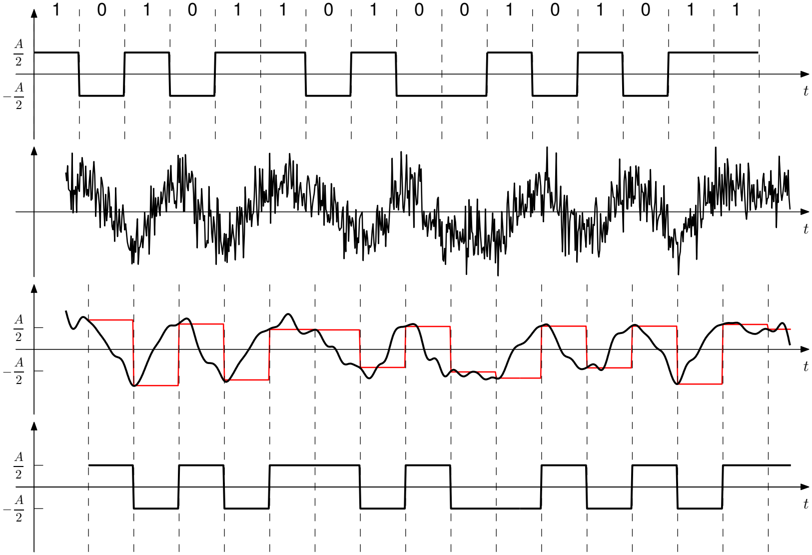
Regeneración del mensaje

- En comunicaciones de muy larga distancia, se emplean repetidores regenerativos para regenerar el mensaje antes de que se degrade demasiado por el ruido y la distorsión y posteriormente se generen errores en la detección.



Ventajas de la comunicación digital

Receptor regenerativo



Ventajas de la comunicación digital

- Reproducción confiable
  - Como el mensaje es una sucesión de pulsos de forma conocida, puede regenerarse. Las perturbaciones en el canal tienen que ser muy grandes para producir errores (confundir un 1 con un 0 o viceversa) en la recepción.
  - En la comunicación analógica, el mensaje sufre distorsión y ruido en el canal, pero como la forma de onda no se conoce en el receptor, no puede regenerarse, incluso aunque se empleen repetidores entre el transmisor y el receptor para amplificar la señal.
- Estabilidad
  - Los sistemas digitales son intrínsecamente invariables en el tiempo, ya que se implementan con chips procesadores de señales digitales (*DSP*) que solo cambian el comportamiento si se reprograman.
  - En sistemas analógicos, la señales y los parámetros del sistema están sujetos a cambios con el envejecimiento de los componentes o las condiciones climáticas (temperatura, humedad).

Ventajas de la comunicación digital

- Flexibilidad
  - Para cambiar el procesamiento de la señales, alcanza con reprogramar el chip DSP. Además, con algoritmos de procesamiento de señales digitales, es posible incluir características como códigos de detección y corrección de errores, encriptación, algoritmos de compresión.
- Multiplexación de distintas fuentes de información
  - Se pueden integrar datos de características distintas (imágenes, audio, video) sobre un mismo flujo de datos, lo que facilita la convergencia de servicios.

Desventajas de la comunicación digital

- Complejidad para tareas sencillas
  - Por ejemplo, un pasabajos analógico es un circuito RC.
  - Un pasabajos digital requiere de un filtro anlialiasing, la conversión A/D, el procesamiento digital que implementa el pasabajos y la conversión D/A.
- Señal de sincronismo
  - Se necesita sincronismo entre el transmisor y el receptor para el muestreo de los pulsos en el instante óptimo.
- Mayor ancho de banda
  - Cuando la señal digital proviene del muestreo de una señal analógica, el ancho de banda de la señal digital es mayor que el de la señal analógica.
    - El ancho de banda de una señal de voz es $W \approx 4$ kHz (para inteligibilidad). Si se muestrea a 8 kHz y codifica con 8 bits por muestra, el ancho de banda es $B_T > 32$ kHz.
    - Pero con técnicas de compresión es posible reducir el ancho de banda de transmisión de la señal digital por debajo del ancho de banda de la señal analógica.
    - Por ejemplo, es posible transmitir 4 o 5 canales de TV digital a calidad estándar en el ancho de banda de un canal analógico (6 MHz) usando compresión con pérdida.

Características de la señal PAM digital

- Como se mencionó previamente, la señal PAM digital es

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k p(t-kD)$$

  - a_k es la amplitud moduladora correspondiente al k-ésimo símbolo del mensaje.
  - D es el tiempo entre símbolos.

- El pulso no modulado $p(t)$ puede ser de forma arbitraria sujeto a la siguiente condición:

$$p(t) = \begin{cases} 1, & t = 0 \\ 0, & t = \pm D,\, \pm 2D, \dots \end{cases}$$

- De esta forma, es posible recuperar el mensaje al muestrear $x(t)$ periódicamente en tiempos múltiplos de D, $t = nD$, con $n = 0,\, \pm 1,\, \pm 2, \dots$:

$$x(nD) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k p(nD - kD) = a_n$$

- Ejemplos de señales $p(t)$ que cumplen la condición son
  - pulso rectangular: $p(t) = \Pi(t/D)$
  - seno cardinal: $p(t) = \operatorname{sinc}(t/D)$

Características de la señal PAM digital

Cadencia de símbolos

- Como la duración de un símbolo es D segundos, la tasa o cadencia de símbolos es
$$r = \frac{1}{D} \text{ símbolos/s o baudios}$$
- Cuando el alfabeto de la fuente tiene dos símbolos ($M = 2$, caso binario), $D = T_b$ es la duración de un bit y la tasa de bits es
$$r_b = \frac{1}{T_b} \text{ bits/s o bps.}$$
- Una fuente M-aria puede codificarse con $K = \log_2 M$ bits y la duración de un bit cumple que $T_b = D/K$. Por lo tanto,
$$r_b = r \log_2 M$$

Características de la señal PAM digital

Códigos de línea empleados frecuentemente

(a) Unipolares RZ y NRZ

- $a_k \in \{0,\, A\}$.

(b) Polares RZ y NRZ

- $a_k \in \{-A/2,\, A/2\}$.

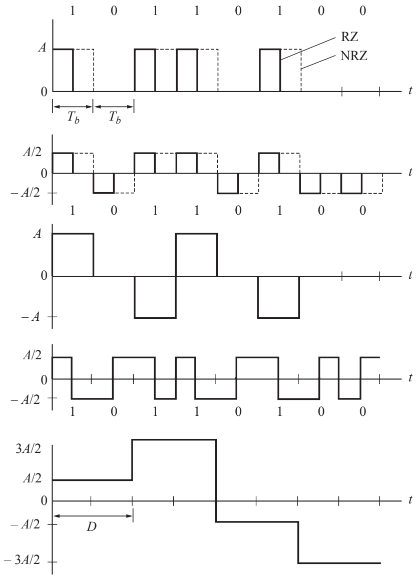
(c) Bipolar NRZ o de marcas invertidas (AMI)

- Unos sucesivos se representan con polaridad alternante.

(d) Código Manchester

- Unos con medio pulso positivo seguido de medio pulso negativo, y viceversa con los ceros.

(e) Polar cuaternaria NRZ



Características de la señal PAM digital

Características deseables de los códigos de línea

- Autosincronización: la señal de sincronización se puede extraer del código de línea.
- Ancho de banda de transmisión: debe ser tan pequeño como sea posible.
- Espectro adecuado a las características del canal:
  - si el canal es acoplado a CA, el código no puede tener componente de continua.
  - el ancho de banda de la señal tiene que ser menor que el ancho de banda del canal de forma de evitar *ISI*.
- Potencia de transmisión: debe ser lo menor posible
  - En un código con componente de continua, se desperdicia potencia en la continua.

Características de la señal PAM digital

Comparación de los códigos de línea

- Retorno a cero y sin retorno a cero:
  - Con codificación con retorno a cero (*RZ*, return to zero) la forma de onda regresa al nivel de cero volts en la mitad del intervalo de bit.
  - Tiene la ventaja de que emplea menos potencia que el código sin retorno a cero (*NRZ*, non-return to zero) correspondiente.
  - Otra ventaja es que lleva información de sincronización (en algunos casos). Los codigos NRZ pierden la información de sincronización en una secuencia larga de unos o ceros.
  - La desventaja es que la señal tiene mayor ancho de banda que el código NRZ correspondiente debido a que los pulsos son de menor duración temporal.
- Unipolar y polar:
  - Los códigos unipolares siempre tienen componente de continua, lo que involucra desperdicio de potencia y la necesidad del uso de canales acoplados a continua.
    - Por ejemplo, no son adecuados a lineas telefónicas, que tienen mala respuesta en bajas frecuencias.

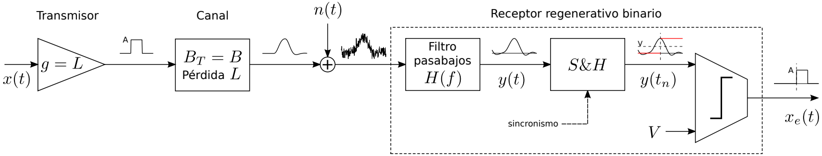
Características de la señal PAM digital

Comparación de los códigos de línea

- Los códigos bipolar NRZ (AMI) y Manchester son los únicos que no tienen componente de continua independientemente de la secuencia transmitida.
- Los códigos polar RZ y Manchester son los únicos que no pierden la información de sincronización incluso ante largas secuencias de unos o ceros.

Para una comparación detallada de los códigos se necesita calcular la densidad espectral de potencia de cada código.

Limitaciones en la transmisión



- Se quiere analizar la señal recibida.
  - Se asume que el transmisor tiene ganancia tal que compensa la atenuación en el canal.
  - Se asume que el filtro pasabajos del receptor tiene frecuencia de corte $f_c \geq B$, de forma de no introducir ISI adicional al canal.
- Luego del filtro pasabajos para eliminar ruido fuera de la banda del mensaje la señal es,

$$y(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k \tilde{p}(t - t_d - kD) + \hat{n}(t)$$

- t_d retardo en la transmisión.
- $\tilde{p}(t)$: pulso distorsionado por el canal.
- $\hat{n}(t)$: ruido filtrado por el pasabajos del receptor.

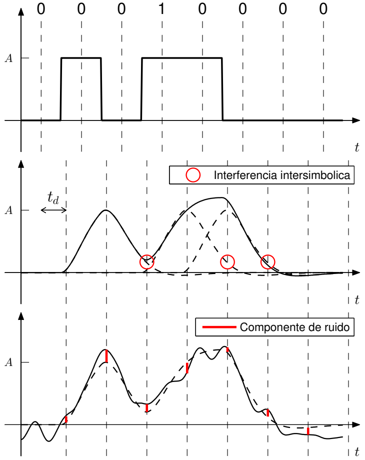
Limitaciones en la transmisión

- Se asume también que se dispone de una señal de sincronización que permite identificar los tiempos de muestreo óptimos, $t_n = nD + t_d$.
  - Podría extraerse de la señal recibida o de una señal de reloj enviada aparte por el transmisior.

- El pulso filtrado cumple que $\tilde{p}(0) = 1$, pero no vale cero en múltiplos de D debido a la ISI. Por lo tanto

$$y(t_n) = a_n + \sum_{k \neq n} a_k \tilde{p}(nD - kD) + \hat{n}(t_n)$$

  - el primer término es la información del mensaje.
  - el segundo término se debe a la ISI.
  - el último término es la componente del ruido filtrado.



Limitaciones en la transmisión

Observaciones

- El filtro pasabajos en recepción involucra un compromiso entre la eliminación de ruido y la interferencia intersimbólica:
  - a menor frecuencia de corte, mayor reducción de la potencia del ruido, pero mayor ISI.
- Una limitación fundamental en la transmisión es la relación entre la ISI, el ancho de banda de transmisión B_T y la tasa de señalización de símbolos r.
  - Esta relación fue determinada por Nyquist en 1928, y se conoce como tasa de Nyquist.
  - La tasa de Nyquist establece una cota superior de la tasa de símbolos que puede transmitirse por un canal de banda limitada de forma tal que el mensaje pueda resolverse sin abigüedad en el receptor.

Limitaciones en la transmisión

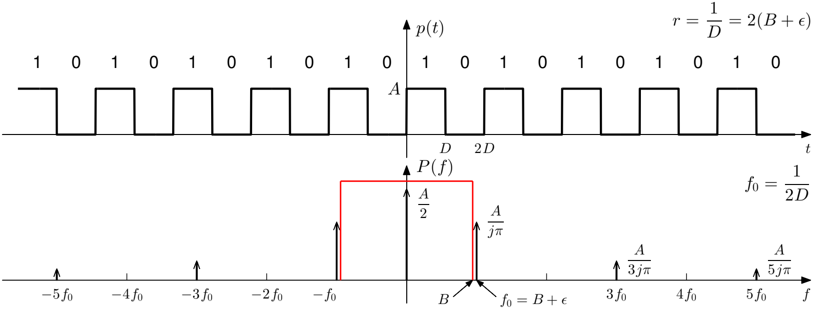
Tasa de Nyquist

Dado un canal pasabajos ideal de ancho de banda B, es posible transmitir símbolos independientes a una tasa $r \leq 2B$ baudios sin interferencia intersimbólica.
No es posible la transmisión de símbolos independientes a $r > 2B$.

- Es fácil demostrar la segunda parte asumiendo que se transmiten símbolos a una cadencia $r = 2(B + \epsilon) > 2B$.
  - El tiempo de un pulso es
$$D = \frac{1}{r} = \frac{1}{2(B + \epsilon)}$$
  - Se considera el mensaje formado por $\ldots 01010101 \ldots$
  - La forma de onda resultante es periódica de período $2D$ y la frecuencia fundamental es
$$f_0 = \frac{1}{2D} = B + \epsilon$$
  - El espectro de la señal contiene componentes en la frecuencia fundamental f_0 y sus armónicos (detalles en el apéndice, pero no es obligatorio leerlo).
  - Por lo tanto, como $B < f_0$, toda la señal es eliminada por el canal.

Limitaciones en la transmisión

Tasa de Nyquist



Limitaciones en la transmisión

Tasa de Nyquist

- La transmisión a tasa máxima de $r = 2B$ solo se logra con un tipo especial de pulso:

Seno cardinal	Espectro
$p(t) = \operatorname{sinc}(rt) = \operatorname{sinc}\left(\frac{t}{D}\right)$	$P(f) = \mathcal{F}\{p(t)\} = \frac{1}{r}\Pi\left(\frac{f}{r}\right)$

Demostración: ejercicio.

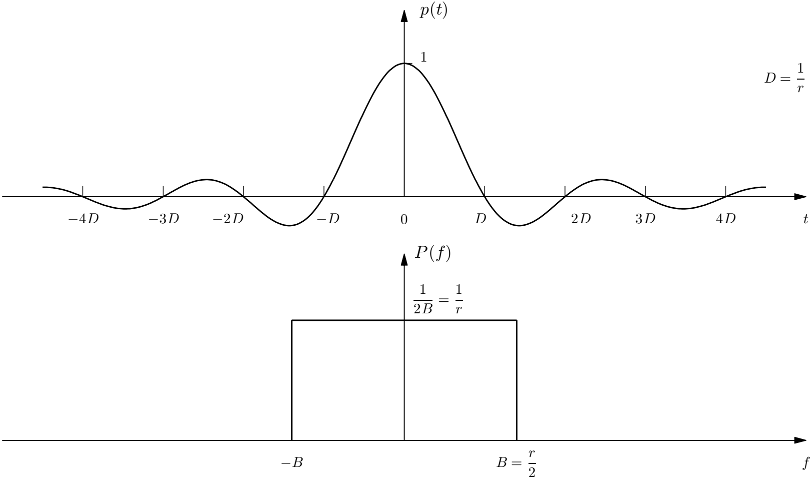
  - El pulso es de banda limitada, con $P(f) = 0$ para $|f| > r/2$.
  - Como el ancho de banda del canal es $B = r/2$, el espectro del pulso entra completamente en el canal y el pulso no sufre distorsión.

Observación

La tasa de Nyquist no tiene en cuenta el ruido introducido en el canal. Solo tiene en cuenta el ancho de banda del canal (ancho de banda de transmisión).

Limitaciones en la transmisión

Tasa de Nyquist



Limitaciones en la transmisión

Ejemplo

- Se considera una fuente de información que emite un símbolo cada $T_0 = 8$ ms de un alfabeto de $M = 256$ símbolos.

1. La señal a transmitir se codifica con un código de línea binario. Calcular la tasa de bits de la señal y el ancho de banda mínimo del canal para que el mensaje pueda ser recuperado en la recepción.
   - Se necesitan palabras de $n = 8$ bits para codificar cada símbolo de la fuente, ya que $2^8 = 256$.
   - Esto implica que hay que transmitir 8 bits en 8 ms, es decir, 1 bit por ms.
   - En el código de línea binario, la duración de un símbolo binario es $T_b = 1$ ms.
   - La cadencia es

   $$r_b = \frac{1}{T_b} = 1000 \text{ símbolos binarios/s} \equiv 1000 \text{ baudios} \equiv 1000 \text{ bps} \equiv 1 \text{ kbps.}$$

   - Para poder recuperar el mensaje, el ancho de banda del canal B tiene que cumplir que $r \leq 2B$. Por lo tanto

   $$B \geq \frac{r_b}{2} = 500 \text{ Hz.}$$

Limitaciones en la transmisión

Ejemplo

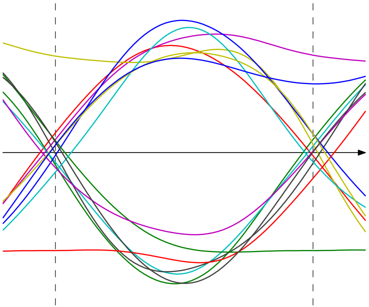
2. Ahora la señal a transmitir se codifica con un código de línea cuaternario. Calcular la tasa de bits de la señal y el ancho de banda mínimo del canal para que el mensaje pueda ser recuperado en la recepción.
    - Como el código de línea ahora tiene $L = 4$ niveles, con cada nivel se pueden representar 2 bits.
    - La duración de un pulso del código de línea cuaternario es por lo tanto,
    $$D = 2T_b = 2 \text{ ms.}$$
    - La cadencia de símbolos es ahora
    $$r = \frac{1}{D} = 500 \text{ símbolos/s} = 500 \text{ baudios.}$$
        - Notar que como se mencionó previamente, se cumple que $r_b = r \log_2 L$.
    - El ancho de banda del canal B tiene que cumplir que
    $$B \geq \frac{r}{2} = 250 \text{ Hz.}$$

Limitaciones en la transmisión

Compensación del canal

- En la práctica, un canal necesita compensación para aproximarse a la respuesta ideal.
- Los ajustes de la compensación se hacen realizando medidas en el lugar del receptor, porque nunca se conocen de antemano las características de un canal.
- Un experimento usual es el análisis del diagrama de ojo.

  - Consiste en observar símbolos sucesivos superpuestos.
  - El tiempo de muestreo óptimo corresponde al instante de mayor apertura del ojo.
  - La pendiente se debe a la ISI, e indica la sensibilidad al error de sincronización.
  - Las distorsiones no lineales se manifiestan en un ojo asimétrico (bizco).



Densidad espectral de potencia de señal PAM digital

- El conocimiento del espectro de la señal PAM brinda información útil relacionada a la transmisión digital.
- El espectro de la señal PAM depende de:
  - el código de línea específico empleado (polar, unipolar, NRZ, RZ, etc).
  - la distribución de probabilidad de los símbolos emitidos por la fuente
- Como los símbolos emitidos por la fuente son desconocidos a priori, la señal PAM se modela como una señal aleatoria.
- El contenido espectral se describe con la densidad espectral de potencia.

Densidad espectral de potencia de señal PAM digital

- La señal PAM digital en el tiempo se expresa como

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k p(t - kD)$$

- Considerando a la fuente de símbolos como un proceso aleatorio estacionario en sentido amplio, la densidad espectral de potencia de la señal PAM $x(t)$ es (sin demostración)

$$G_x(f) = |P(f)|^2 \frac{1}{D} \sum_{k=-\infty}^{\infty} R_a[k] e^{-j2\pi f k D} \tag{1}$$

  - $P(f)$ es la transformada de Fourier del pulso del código de línea $p(t)$.
  - $R_a[k]$ es la función de autocorrelación de la secuencia de símbolos a_k,

$$R_a[k] = \mathrm{E}\left\{a_n a_{n-k}\right\}$$

- Observación:
  - La densidad espectral de potencia depende del espectro del pulso $p(t)$ y la distribución de probabilidad de los símbolos a través de su función de autocorrelación $R_a[k]$.

Densidad espectral de potencia de señal PAM digital

Función de autocorrelación

- Se considera que la secuencia de símbolos es un proceso estacionario en sentido amplio, con símbolos independientes de media μ_a y varianza σ_a^2.
- La autocorrelación es entonces

$$
\begin{aligned}
R_a[k] &= \mathrm{E}\{a_n a_{n-k}\} \\
&\overset{(a)}{=} \begin{cases} \mathrm{E}\{a_n^2\}, & k = 0 \\ \mathrm{E}\{a_n\}\,\mathrm{E}\{a_{n-k}\}, & k \neq 0 \end{cases} \\
&\overset{(b)}{=} \begin{cases} \sigma_a^2 + \mu_a^2, & k = 0 \\ \mu_a^2, & k \neq 0 \end{cases}
\end{aligned}
$$

(a) Los símbolos a_k son independientes

(b) La definición de la varianza es

$$
\begin{aligned}
\sigma_a^2 &= \mathrm{E}\{(a_k - \mu_a)^2\} \\
&= \mathrm{E}\{a_k^2\} - \mu_a^2
\end{aligned}
$$

- Sustituyendo este resultado en la ecuación 1, se tiene que

$$
\begin{aligned}
G_x(f) &= |P(f)|^2 \frac{1}{D} \sum_{k=-\infty}^{\infty} R_a[k] e^{-j2\pi f k D} \\
&= |P(f)|^2 \frac{1}{D} \left(\sigma_a^2 + \mu_a^2 \sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{-j2\pi f k D} \right)
\end{aligned}
$$

Densidad espectral de potencia de señal PAM digital

- Teniendo en cuenta que se verifica la siguiente igualdad

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{-j2\pi fkD} = \frac{1}{D} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta\left(f - \frac{k}{D}\right), \qquad \text{(ver Apéndice II)}$$

- y sustituyendo en el resultado anterior, se obtiene que

$$G_x(f) = |P(f)|^2 \frac{1}{D} \left(\sigma_a^2 + \frac{\mu_a^2}{D} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta\left(f - \frac{k}{D}\right)\right)$$

- Operando y sustituyendo $r = \frac{1}{D}$ se llega a que

$$G_x(f) = \sigma_a^2 r |P(f)|^2 + (\mu_a r)^2 \sum_{k=-\infty}^{\infty} |P(kr)|^2 \delta(f - kr) \qquad (2)$$

- En el caso en que la media sea nula, es decir, $\mu_a = 0$, la expresión se simplifica a

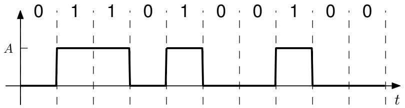
$$G_x(f) = \sigma_a^2 r |P(f)|^2.$$

Densidad espectral de potencia de señal PAM digital

Código de línea unipolar NRZ

$a_k = \{0,\, A\}$ equiprobables

$$p(t) = \begin{cases} 1, & 0 < t \leq D \\ 0, & \text{en otro caso} \end{cases}$$



- La densidad espectral de potencia se obtiene con la ecuación 2.
- Hay que calcular la media μ_a y la varianza σ_a^2 de a_k, y el espectro $P(f)$ del pulso $p(t)$.
  - Media

$$\mu_a = E\{a_k\} = 0\,\mathrm{Pr}\{a_k = 0\} + A\,\mathrm{Pr}\{a_k = A\} = \frac{A}{2}$$

  - Varianza

$$\begin{aligned}\sigma_a^2 &= \mathrm{E}\{a_k^2\} - \mu_a^2 \\ &= \frac{A^2}{2} - \frac{A^2}{4} \\ &= \frac{A^2}{4}\end{aligned}$$

Como

$$\begin{aligned}\mathrm{E}\{a_k^2\} &= 0^2\,\mathrm{Pr}\{a_k = 0\} + A^2\,\mathrm{Pr}\{a_k = A\} \\ &= \frac{A^2}{2}\end{aligned}$$

Densidad espectral de potencia de señal PAM digital

Código de línea unipolar NRZ

- Falta calcular el espectro del pulso conformador.
- El pulso $p(t)$ es

$$p(t) = \Pi(t/D) = \begin{cases} 1, & |t| \leq D/2 \\ 0, & \text{en otro caso} \end{cases}$$

- Aplicando la transformada de Fourier de tiempo continuo,

$$\begin{aligned} P(f) &= \int_{-\infty}^{\infty} p(t) e^{-j2\pi f t}\, dt = \int_{-D/2}^{D/2} e^{-j2\pi f t}\, dt \\ &= \frac{1}{-j2\pi f} e^{-j2\pi f t}\Big|_{-D/2}^{D/2} = \frac{e^{j2\pi f D/2} - e^{-j2\pi f D/2}}{j2\pi f} \\ &= \frac{\sin(\pi f D)}{\pi f} = D\frac{\sin(\pi f D)}{\pi f D} \\ &= D\,\mathrm{sinc}(fD) \end{aligned}$$

- Nota: el módulo del espectro de $p(t)$ es el mismo que el de $p(t-\tau)$.

Densidad espectral de potencia de señal PAM digital

Código de línea unipolar NRZ

- El espectro del pulso $p(t)$ es

Pulso	Espectro
$p(t) = \Pi(t/D)$	$P(f) = D\,\mathrm{sinc}(fD) = \dfrac{1}{r}\,\mathrm{sinc}\left(\dfrac{f}{r}\right)$

- Sustituyendo en la ecuación 2 se obtiene que

$$G_x(f) = \frac{A^2}{4r}\,\mathrm{sinc}^2\left(\frac{f}{r}\right) + \frac{A^2}{4}\sum_{k=-\infty}^{\infty} \mathrm{sinc}^2\left(k\right)\delta\left(f - kr\right)$$

- Además, se cumple que

$$\mathrm{sinc}(k) = \frac{\sin(\pi k)}{\pi k} = \begin{cases} 1, & k = 0 \\ 0, & \text{en otro caso} \end{cases}$$

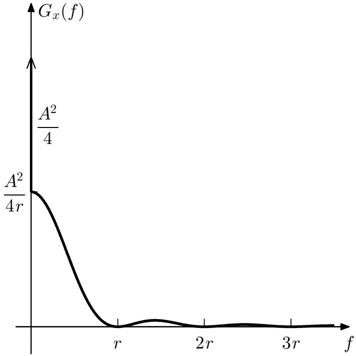
Densidad espectral de potencia de señal PAM digital

Código de línea unipolar NRZ

$$G_x(f) = \frac{A^2}{4r}\,\mathrm{sinc}^2\left(\frac{f}{r}\right) + \frac{A^2}{4}\delta(f)$$

- Observaciones:
  - Hay una delta en cero debido al componente de continua ($\mu_a \neq 0$).
  - Si se emplea el primer cruce por cero para definir el ancho de banda, en este caso se cumple que

$$B_T \approx r$$

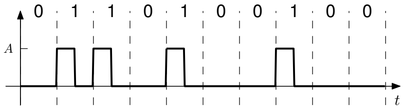


Densidad espectral de potencia de señal PAM digital

Código de línea unipolar RZ

$a_k = \{0,\, A\}$ equiprobables

$$p(t) = \begin{cases} 1, & 0 < t \le \frac{D}{2} \\ 0, & \text{en otro caso} \end{cases}$$



- Al igual que en el caso anterior, la media y la varianza de a_k son
  - Media: $\mu_a = \dfrac{A}{2}$
  - Varianza: $\sigma_a^2 = \dfrac{A^2}{4}$
- El espectro del pulso $p(t)$ es

Pulso	Espectro
$p(t) = \Pi\left(t/(D/2)\right)$	$P(f) = \dfrac{D}{2}\,\mathrm{sinc}\left(\dfrac{fD}{2}\right) = \dfrac{1}{2r}\,\mathrm{sinc}\left(\dfrac{f}{2r}\right)$

- Sustituyendo en la ecuación 2 se obtiene que

$$G_x(f) = \frac{A^2}{16r}\,\mathrm{sinc}^2\left(\frac{f}{2r}\right) + \frac{A^2}{16}\sum_{k=-\infty}^{\infty}\mathrm{sinc}^2\left(\frac{k}{2}\right)\delta\left(f - kr\right)$$

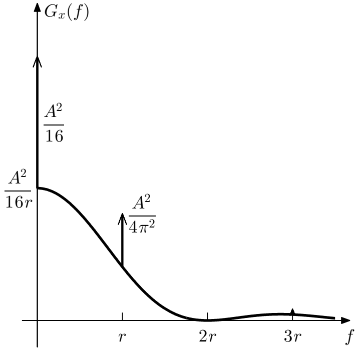
Densidad espectral de potencia de señal PAM digital

Código de línea unipolar RZ

$$G_x(f) = \frac{A^2}{16r}\,\mathrm{sinc}^2\left(\frac{f}{2r}\right) + \frac{A^2}{16}\sum_{k=-\infty}^{\infty}\mathrm{sinc}^2\left(\frac{k}{2}\right)\delta\left(f-kr\right)$$

- Observaciones:
  - Hay una delta en cero debido al componente de continua, pero de menor amplitud que en el caso anterior.
  - Hay una delta en r, la cadencia de símbolos. Esta señal puede filtrarse con un pasabanda angosto y usar como señal de sincronización.
  - El ancho de banda (primer cruce por cero), en este caso es

$$B_T \approx 2r$$

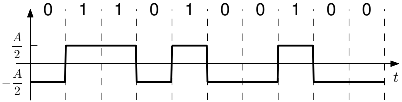


Densidad espectral de potencia de señal PAM digital

Código de línea polar NRZ

$$a_k = \left\{ -\frac{A}{2}, \frac{A}{2} \right\} \text{ equiprobables}$$

$$p(t) = \begin{cases} 1, & 0 < t \leq D \\ 0, & \text{en otro caso} \end{cases}$$



- La media μ_a y la varianza σ_a^2 de a_k ahora son
  - Media

$$\mu_a = E\{a_k\} = -\frac{A}{2}\Pr\{a_k = 0\} + \frac{A}{2}\Pr\{a_k = A\} = 0$$

  - Varianza

$$\begin{aligned} \sigma_a^2 &= \mathrm{E}\{a_k^2\} - \mu_a^2 \\ &= \frac{A^2}{4} - 0 \\ &= \frac{A^2}{4} \end{aligned}$$

Como

$$\begin{aligned} \mathrm{E}\{a_k^2\} &= \left(-\frac{A}{2}\right)^2 \Pr\{a_k = 0\} + \left(\frac{A}{2}\right)^2 \Pr\{a_k = A\} \\ &= \frac{A^2}{4} \end{aligned}$$

Densidad espectral de potencia de señal PAM digital

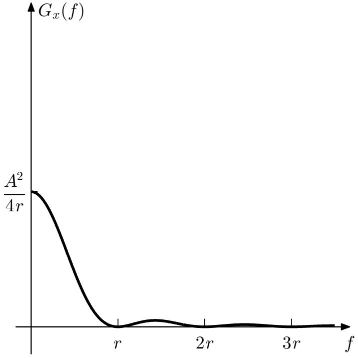
Código de línea polar NRZ

- El espectro del pulso $p(t)$ es el mismo que en el primer caso.
- Sustituyendo en la ecuación 2 y teniendo en cuenta que el mensaje tiene media nula,

$$G_x(f) = \frac{A^2}{4r}\,\mathrm{sinc}^2\left(\frac{f}{r}\right)$$

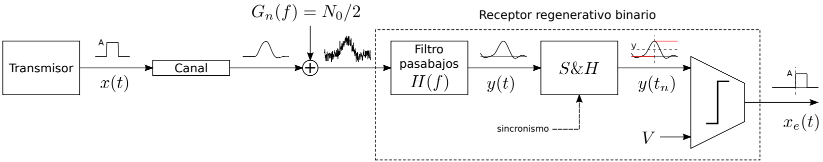
- Observaciones:
  - No hay una delta en cero debido a que no hay continua, $\mu_a = 0$.
  - No hay una delta en r, la cadencia de símbolos, por lo que no puede extraerse la señal de sincronización.
  - El ancho de banda (primer cruce por cero), en este caso es

$$B_T \approx r$$



Ruido y probabilidad de error en recepción

- Objetivo: estudiar la influencia del ruido en la probabilidad de error en la recepción.
- Receptor regenerativo:



  - El pasabajos atenúa el ruido sin introducir ISI.
  - El dispositivo de muestreo y retención muestrea la señal en los instantes de tiempo óptimo t_n,

$$y(t_n) = a_n + \sum_{k \neq n} a_k \tilde{p}(nD - kD) + \hat{n}(t_n)$$

  - El comparador, compara los valores sucesivos de $y(t_n)$ con un umbral V
    - Si $y(t_n) > V$ el comparador pasa el nivel alto para indicar un 1.
    - Si $y(t_n) < V$ el comparador pasa el bajo alto para indicar un 0.

Ruido y probabilidad de error en recepción

- En el análisis se van a asumir las siguientes hipótesis:
  - El canal no introduce distorsión y por lo tanto, la señal recibida está libre de ISI.
  - El filtro pasabajos de recepción tampoco introduce ISI.
  - El ruido introducido en el canal es blanco, de media nula e independiente de la señal.
- Debido a que no se introduce ISI, la señal muestreada en los instantes óptimos es

$$y(t_n) = a_n + n(t_n)$$

- Se considera el caso binario unipolar,
  - $a_k = 0$ representa el bit 0
  - $a_k = A$ representa el bit 1
- Se quiere establecer el valor óptimo del umbral V del comparador y determinar la probabilidad de error en ese caso.
  - El umbral V se debe establecer en algún nivel intermedio $0 \leq V \leq A$.

Ruido y probabilidad de error en recepción

- El análisis debe realizarse desde un enfoque probabilístico.
  - Sea la variable aleatoria Y que representa el valor $y(t_n)$ en un instante de muestreo arbitrario.
  - Sea la variable aleatoria n que representa el valor $n(t_n)$, y tiene distribución de probabilidad $p_N(n)$, $n \sim p_N(n)$
- La densidad de probabilidad de Y depende del ruido y también del valor del símbolo recibido.
- Se consideran las siguientes hipótesis correspondientes a los dos casos posibles:
  - H_0: el símbolo recibido es 0. En este caso, $a_n = 0$ y por lo tanto $Y = n$.
  - H_1: el símbolo recibido es 1. En este caso, $a_n = A$ y por lo tanto $Y = A + n$.
- La densidad de probabilidad de Y condicionada a cada hipótesis es por lo tanto,

$$p_Y(y|H_0) = p_N(y), \qquad p_Y(y|H_1) = p_N(y - A)$$

  - En el caso de la hipótesis H_1, la PDF condicional de Y es la PDF del ruido n desplazada a tener media A

Ruido y probabilidad de error en recepción

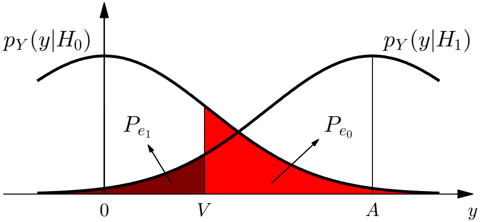
- El comparador implementa la siguiente regla de decisión:

  - Elije la hipótesis H_0 si

    $$Y < V$$

  - Elije la hipótesis H_1 si

    $$Y > V$$



- Las probabilidades de cometer un error están dadas por

$$P_{e_0} \triangleq \Pr\{Y > V|H_0\} = \int_V^{\infty} p_Y(y|H_0)dy$$

$$P_{e_1} \triangleq \Pr\{Y < V|H_1\} = \int_{-\infty}^{V} p_Y(y|H_1)dy$$

- Hay que establecer el umbral de forma de minimizar la probabilidad promedio de error,

$$P_e = P_0 P_{e_0} + P_1 P_{e_1}, \qquad \text{con } P_0 = \Pr\{H_0\} \text{ y } P_1 = \Pr\{H_1\}$$

Ruido y probabilidad de error en recepción

- El umbral óptimo V_{opt} se establece como $\frac{dP_e}{dV} = 0$, con

$$P_e = P_0 \int_V^\infty p_Y(y|H_0)dy + P_1 \int_{-\infty}^V p_Y(y|H_1)dy$$

- Para calcular la derivada, hay que usar la regla de integración de Liebnitz (ver Apéndice III), y el resultado es

$$\frac{dP_e}{dV} = -P_0 p_Y(V|H_0) + P_1 p_Y(V|H_1)$$

- e igualando a cero, se llega a que

$$P_0 p_Y(V_{\text{opt}}|H_0) = P_1 p_Y(V_{\text{opt}}|H_1)$$

- En el caso frecuente en que los símbolos son equiprobables, es decir, $P_0 = P_1 = 1/2$, se tiene que

$$P_e = \frac{1}{2}\left(P_{e_0} + P_{e_1}\right)$$

$$p_Y(V_{\text{opt}}|H_0) = p_Y(V_{\text{opt}}|H_1)$$

- El umbral óptimo V_{opt} corresponde al punto de intersección de las curvas de las PDF.

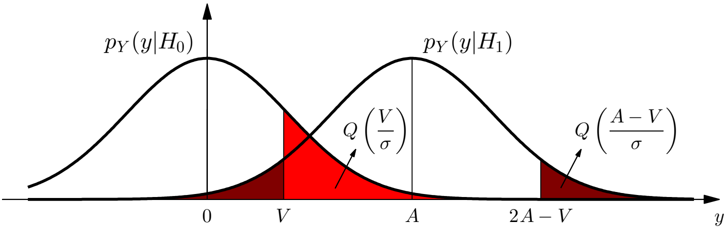
Ruido y probabilidad de error en recepción

Ruido Gaussiano

- Se asume ahora que el ruido es gaussiano de media nula y varianza σ^2, es decir
$$p_N(n) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-n^2/2\sigma^2}$$
- En este caso, la probabilidad de confundir cada símbolo es

$$P_{e_0} = \int_V^{\infty} p_Y(y|H_0)dy = Q\left(\frac{V}{\sigma}\right)$$
$$P_{e_1} = \int_{-\infty}^{V} p_Y(y|H_1)dy = Q\left(\frac{A-V}{\sigma}\right)$$

donde Q es el área bajo la cola de la gaussiana (ver Apéndice IV).



Ruido y probabilidad de error en recepción

Ruido Gaussiano

- La probabilidad de cometer un error en recepción queda

$$P_e = P_0 Q\left(\frac{V}{\sigma}\right) + P_1 Q\left(\frac{A-V}{\sigma}\right)$$

- En el caso en que los símbolos son equiprobables, como la PDF gaussiana tiene simetría par, las PDF se intersectan en el punto medio y

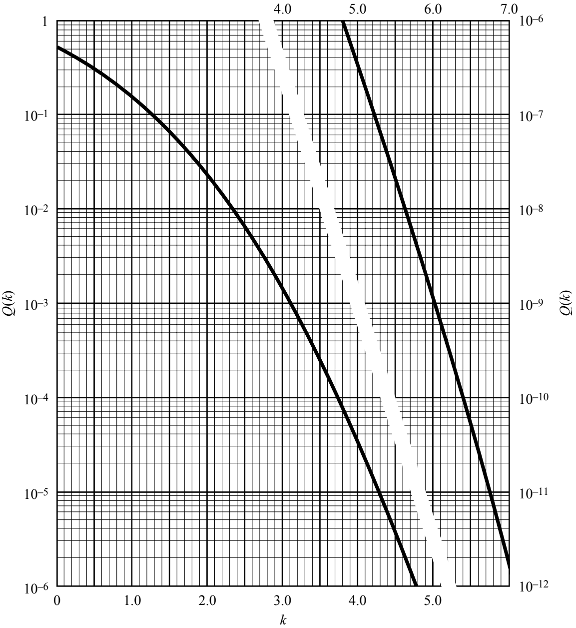
$$V_{\mathsf{opt}} = \frac{A}{2}.$$

- En ese caso, se cumple que

$$P_{e_0} = P_{e_1} = Q\left(\frac{A}{2\sigma}\right), \qquad P_e = \frac{1}{2}\left(P_{e_0} + P_{e_1}\right) = Q\left(\frac{A}{2\sigma}\right)$$

- Ejemplo:
  - Si $A/2\sigma = 2$, $P_e \approx 2 \times 10^{-2}$
  - Si $A/2\sigma = 6$, $P_e \approx 1 \times 10^{-9}$

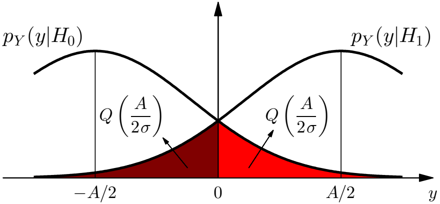
Ruido y probabilidad de error en recepción



Ruido y probabilidad de error en recepción

Ruido Gaussiano

- Estos mismos resultados son válidos en el caso de una señal polar con
  - $a_k = \pm A/2$
  - $V_{\text{opt}} = 0$



- Pero la señalización polar tiene una ventaja que se evidencia al expresar A en términos de la potencia recibida S_R.
  - Recordar que la amplificación en el transmisor compensa la atenuación del canal y por lo tanto, $S_R \approx S_x$.
- Si los símbolos son equiprobables y la ISI es despreciable de forma que los pulsos son cuadrados, se cumple que (ver Apéndice V)
  - Código unipolar: $S_R \approx S_x = A^2/2$
  - Código polar: $S_R \approx S_x = A^2/4$

$$A = \begin{cases} \sqrt{2S_R} & \text{Unipolar} \\ \sqrt{4S_R}, & \text{Polar} \end{cases}$$

Ruido y probabilidad de error en recepción

Ruido Gaussiano

- Como el ruido tiene media nula, su varianza es igual a la potencia, $N_R = \sigma^2$, y por lo tanto,

$$\left(\frac{A}{2\sigma}\right)^2 = \frac{A^2}{4N_R} = \begin{cases} \frac{1}{2}(S/N)_R & \text{Unipolar} \\ (S/N)_R & \text{Polar} \end{cases}$$

- Finalmente, la probabilidad de error expresada en función la relación señal a ruido en predetección (luego de filtrado pasabajos) es

$$P_e = Q\left(\frac{A}{2\sigma}\right) = \begin{cases} Q\left(\sqrt{\frac{1}{2}(S/N)_R}\right) & \text{Unipolar} \\ Q\left(\sqrt{(S/N)_R}\right) & \text{Polar} \end{cases}$$

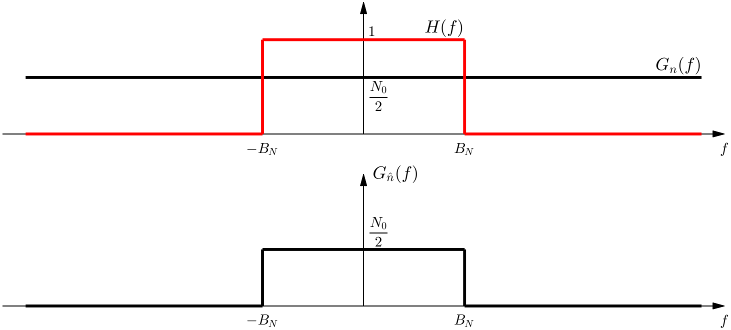
Ruido y probabilidad de error en recepción

Ruido en predetección

- La densidad espectral de potencia del ruido a la entrada del receptor es

$$G_n(f) = \frac{N_0}{2}.$$

- El filtro pasabajos $H(f)$ del receptor tiene ancho de banda B_N.



Ruido y probabilidad de error en recepción

Ruido en predetección

- El ruido en predetección, es decir, luego del filtrado pasabajos, tiene densidad espectral de potencia

$$G_{\hat{n}}(f) = \begin{cases} N_0/2 & \text{si } |f| \leq B_N \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

- Por lo tanto, la potencia del ruido en predetección en función del ruido a la entrada del receptor y el ancho de banda del filtro pasabajos del detector es,

$$\begin{aligned} N_R &= \int_{-\infty}^{\infty} G_{\hat{n}}(f) df \\ &= \int_{-B_N}^{B_N} \frac{N_0}{2} df \\ &= N_0 B_N. \end{aligned}$$

Ruido y probabilidad de error en recepción

Ruido en predetección

- Para no introducir ISI, el ancho de banda del filtro tiene que cumplir la condición de la tasa de Nyquist,

$$B_N \geq r_b/2.$$

- Por lo tanto, la potencia del ruido cumple que

$$N_R \geq N_0 \frac{r_b}{2}$$

- Se requiere mayor potencia de la señal S_R, y por lo tanto, mayor potencia de transmisión, para mantener una probabilidad de error P_e dada al aumentar la cadencia de bits r_b.

Probabilidad de error en el caso M-ario

- Se puede demostrar que la probabilidad de error en la detección de un símbolo en el caso de señalización M-aria polar NRZ con símbolos equiprobables es

$$P_e = 2\left(1 - \frac{1}{M}\right) Q\left[\sqrt{\frac{3}{M^2 - 1}\left(\frac{S}{N}\right)_R}\right]$$

  - Notar que si se sustituye $M = 2$, se obtiene la expresión de la P_e de la codificación binaria polar NRZ.

Apéndice I

Espectro de tren de pulsos periódico

- Definición de la transformada continua de Fourier

Transformada de Fourier

$$X(f) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-j2\pi ft}dt$$

Transformada inversa de Fourier

$$x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} X(f)e^{j2\pi ft}d\omega$$

- Además, las siguientes funciones forman un par de transformadas de Fourier

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{j2\pi kf_0t} \overset{\mathcal{F}}{\longleftrightarrow} X(f) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k \delta\left(f - kf_0\right) \qquad (3)$$

  - Una forma de ver que se trata de un par de transformadas de Fourier es aplicando la transformada de Fourier inversa a $X(f)$.
  - $x(t)$ es la representación en series de Fourier de una señal periódica de frecuencia f_0.
  - Los coeficientes c_k de la serie de Fourier se calculan como

$$c_k = \frac{1}{T}\int_0^T x(t)e^{-j\frac{2\pi}{T}kt}dt, \qquad \text{donde} \qquad T = \frac{1}{f_0} \qquad (4)$$

Apéndice I

Espectro de tren de pulsos periódico

- Sea el tren de pulsos periódico de período $2D$ definido en un período como

$$p(t) = \begin{cases} A, & 0 < t \leq D \\ 0, & D < t \leq 2D \end{cases}$$

- Los coeficientes de la serie de Fourier se obtienen con la ecuación 4

$$\begin{aligned}
c_k &= \frac{1}{2D}\int_0^{2D} x(t)e^{-j\frac{\pi}{D}kt}dt \\
&= \frac{A}{2D}\int_0^{D} e^{-j\frac{\pi}{D}kt}dt \\
&= \frac{A}{2D}\left(\frac{-D}{jk\pi}\right)e^{-j\frac{\pi}{D}kt}\Big|_0^D \\
&= \frac{A}{j2\pi k}\left(1-e^{-j\pi k}\right) \\
&= \frac{A}{\pi k}e^{-j\frac{\pi}{2}k}\left(e^{j\frac{\pi}{2}k}-e^{-j\frac{\pi}{2}k}\right) \\
&= \frac{A}{\pi k}e^{-j\frac{\pi}{2}k}\sin\frac{\pi k}{2}
\end{aligned}$$

- Evaluando la expresión para algunos valores de k

$$\begin{array}{llll}
c_0 = \frac{A}{2}, & c_1 = \frac{A}{j\pi}, & c_2 = 0 & \\
c_3 = \frac{A}{j3\pi}, & c_4 = 0, & c_5 = \frac{A}{j3\pi}, & \dots
\end{array}$$

- Y generalizando queda

$$c_k = \begin{cases} \dfrac{A}{2}, & k = 0 \\ \dfrac{A}{j\pi k}, & k \text{ impar} \\ 0, & k \text{ par} \end{cases} \tag{5}$$

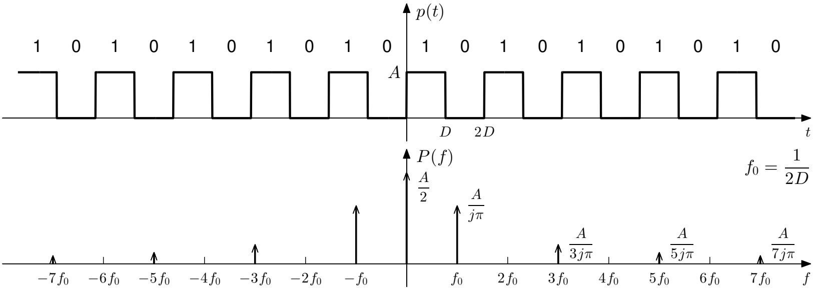
Apéndice I

Espectro de tren de pulsos periódico

- Finalmente, la transformada de Fourier del tren de pulsos $p(t)$ está dada por la ecuación 3,

$$P(f) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k \delta\left(f - kf_0\right)$$

donde los coeficientes c_k están dados por la ecuación 5.



Apéndice II

Se quiere ver que se cumple la siguiente igualdad,

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(t - kT) = \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{-j\frac{2\pi}{T}kt} \tag{6}$$

- Como el tren de impulsos es periódico de período T, se puede expresar como una serie de Fourier,

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{j\frac{2\pi}{T}kt}, \qquad c_k = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x(t) e^{-j\frac{2\pi}{T}kt} dt$$

- En este caso, los coeficientes c_k son

$$c_k = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} \delta(t) e^{-j\frac{2\pi}{T}kt} dt = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} \delta(t) dt = \frac{1}{T},$$

resultando en la igualdad de la ecuación 6.

Apéndice III

Regla de integración de Liebnitz

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\theta}\left(\int_{a(\theta)}^{b(\theta)} f(x,\theta)\,\mathrm{d}x\right) = \int_{a(\theta)}^{b(\theta)} \partial_\theta f(x,\theta)\,\mathrm{d}x + f(b(\theta),\theta)b'(\theta) - f(a(\theta),\theta)a'(\theta)$$

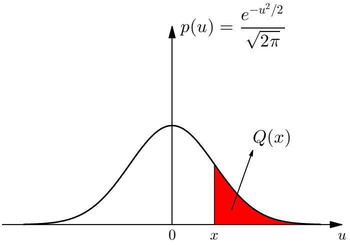
Apéndice IV

Función $Q(x)$: cola de la gaussiana

Sea una variable aleatoria X con densidad de probabilidad gaussiana de media nula y varianza unidad, $X \sim \mathcal{N}(0,1)$.

- La función $Q(x)$ se define como

$$Q(x) \triangleq \Pr\{X \geq x\} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_x^{\infty} e^{-u^2/2}\, du$$

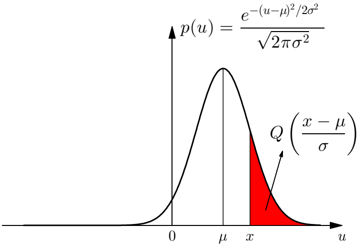


- En el caso en que

$$X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$$

se cumple que

$$\Pr\{X \geq x\} = Q\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)$$



Apéndice V: potencia de señales PAM

- Teniendo en cuenta que una señal PAM es aleatoria, la potencia puede calcularse a partir de la Densidad Espectral de Potencia (PSD) $G_x(f)$ como,

$$S_x = \int_{-\infty}^{\infty} G_x(f)\, df$$

- En el caso de códigos de línea sin retorno a cero, se tiene que,

Código Unipolar NRZ

$$G_x(f) = \frac{A^2}{4r}\,\mathrm{sinc}^2\left(\frac{f}{r}\right) + \frac{A^2}{4}\delta(f)$$

Código Polar NRZ

$$G_x(f) = \frac{A^2}{4r}\,\mathrm{sinc}^2\left(\frac{f}{r}\right)$$

- Para calcular S_x es necesario notar que

$$\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{sinc}^2(f)\; df = 1 \qquad \Rightarrow \qquad \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{sinc}^2\left(\frac{f}{r}\right)\; df = r$$

Apéndice V: potencia de señales PAM

Código Unipolar NRZ

$$
\begin{aligned}
S_x &= \int_{-\infty}^{\infty} \left[\frac{A^2}{4r} \operatorname{sinc}^2\left(\frac{f}{r}\right) + \frac{A^2}{4}\delta(f) \right] df \\
&= \frac{A^2}{4r} \int_{-\infty}^{\infty} \operatorname{sinc}^2\left(\frac{f}{r}\right) df \\
&\qquad + \frac{A^2}{4} \int_{-\infty}^{\infty} \delta(f)\, df \\
&= \frac{A^2}{4r} r + \frac{A^2}{4} \\
&= \frac{A^2}{2}
\end{aligned}
$$

Código Polar NRZ

$$
\begin{aligned}
S_x &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{A^2}{4r} \operatorname{sinc}^2\left(\frac{f}{r}\right) df \\
&= \frac{A^2}{4r} \int_{-\infty}^{\infty} \operatorname{sinc}^2\left(\frac{f}{r}\right) df \\
&= \frac{A^2}{4}
\end{aligned}
$$

Apéndice V: potencia de señales PAM

Demostración de $\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{sinc}^2(f)\, df = 1$

- Una forma fácil es notando que

$$g(t) = \mathrm{sinc}(t) \triangleq \frac{\sin \pi t}{\pi t} \quad \stackrel{\mathcal{F}}{\longleftrightarrow} \quad G(f) = \Pi(f) \triangleq \begin{cases} 1, & |f| \leq 1/2 \\ 0, & |f| > 1/2 \end{cases},$$

con la transformada de Fourier definida como en el Apéndice I.

- Usando el teorema de la modulación, que indica que

$$g(t)h(t) \quad \stackrel{\mathcal{F}}{\longleftrightarrow} \quad G(f) * H(f),$$

se obtiene que,

$$g^2(t) = \mathrm{sinc}^2(t) \quad \stackrel{\mathcal{F}}{\longleftrightarrow} \quad G(f)*G(f) = \Lambda(f) \triangleq \begin{cases} 1 - |f|, & |f| \leq 1 \\ 0, & |f| > 1 \end{cases},$$

Apéndice V: potencia de señales PAM

Demostración de $\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{sinc}^2(f)\, df = 1$

- Por definición de la transformada de Fourier, esto significa que

$$\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{sinc}^2(t)\, e^{-j2\pi f t} dt = \Lambda(f)$$

- Evaluando la ecuación anterior en $f = 0$ se llega a que

$$\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{sinc}^2(t)\, dt = \Lambda(0) = 1.$$

Apéndice V: potencia de señales PAM

- La potencia de una señal periódica $x(t)$ de período T se define como

$$P \triangleq \frac{1}{T}\int_0^T x^2(t)dt$$

- Una señal digital en banda base no es periódica, pero si la emisión de ceros y unos es equiprobable, la potencia de la señal transmitida es igual a la potencia de una señal cuadrada periódica.
- Código Unipolar NRZ
  - Se considera un código con duración de bit D y amplitud A volts para codificar los unos y 0 volts para codificar los ceros.
  - Si los bits son equiprobables, la potencia coincide con la potencia de una señal periódica de período $2D$ de valor A en medio período y valor 0 en el otro medio período.
- Código Polar NRZ
  - Se considera un código con duración de bit D y amplitud $A/2$ volts para codificar los unos y $-A/2$ volts para codificar los ceros.
  - Si los bits son equiprobables, la potencia coincide con la potencia de una señal periódica de período $2D$ de valor $A/2$ en medio período y valor $-A/2$ en el otro medio período.

Apéndice V: potencia de señales PAM

Código Unipolar NRZ

$$
\begin{aligned}
S_x &= \frac{1}{2D}\int_0^{2D} x^2(t)dt \\
&= \frac{1}{2D}\int_0^{D} A^2 dt \\
&= \frac{A^2}{2}
\end{aligned}
$$

Código Polar NRZ

$$
\begin{aligned}
S_x &= \frac{1}{2D}\int_0^{2D} x^2(t)dt \\
&= \frac{1}{2D}\int_0^{D} \left(\frac{A}{2}\right)^2 dt \\
&\quad + \frac{1}{2D}\int_D^{2D} \left(-\frac{A}{2}\right)^2 dt \\
&= \frac{1}{D}\int_0^{D} \frac{A^2}{4} dt \\
&= \frac{A^2}{4}
\end{aligned}
$$

Referencias I