Conversión A/D
y
Ruido de Cuantización

Modulación y Procesamiento de Señales
Ernesto López
Pablo Zinemanas, Mauricio Ramos
{pzinemanas, mramos}@fing.edu.uy

Centro Universitario Regional Este
Sede Rocha
Tecnólogo en Telecomunicaciones

Curso 2016

Conversión A/D

Introducción

- El conversor C/D es un sistema ideal que convierte una señal de tiempo continuo en una señal de tiempo discreto
  - La precisión de las muestras de la señal en tiempo discreto es infinita.
- En la práctica, se emplea un sistema que convierte la señal de tiempo continuo en una señal digital.
  - La señal digital es una secuencia con muestras con precisión finita o muestras cuantizadas.

Chip para conversión A/D

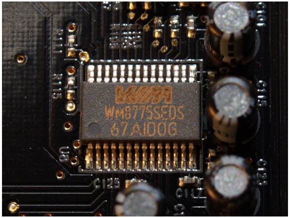
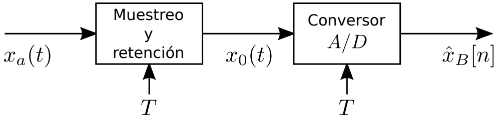


Foto obtenida de *Wikipedia*:
`http://en.wikipedia.org/wiki/Analog-to-digital_converter`

- Chip *WM8775* de *Wolfson Microelectronics* en una tarjeta de sonido.
- Soporta frecuencias de muestreo de 32 a 96 kHz con largo de palabra de 16 a 32 bits.

Conversión A/D

Diagrama de bloques del proceso de conversión A/D



Ambos bloques del sistema están disponibles como dispositivos físicos, ya sea en chips separados o integrados en un único chip.

- Conversor A/D: Dispositivo que convierte el voltaje de entrada en un código binario que representa el valor mas cercano a la amplitud de la señal de entrada.
  - La conversión no es instantánea y requiere una entrada constante durante cierto lapso de tiempo para realizarla.
- Muestreo y retención: Muestrea la señal y mantiene el valor de la muestra constante durante un lapso de tiempo para que el conversor A/D pueda realizar la conversión.

Conversión A/D

Muestreo y retención

- La salida del sistema de muestreo y retención (*S&H*, Sample and Hold) ideal es

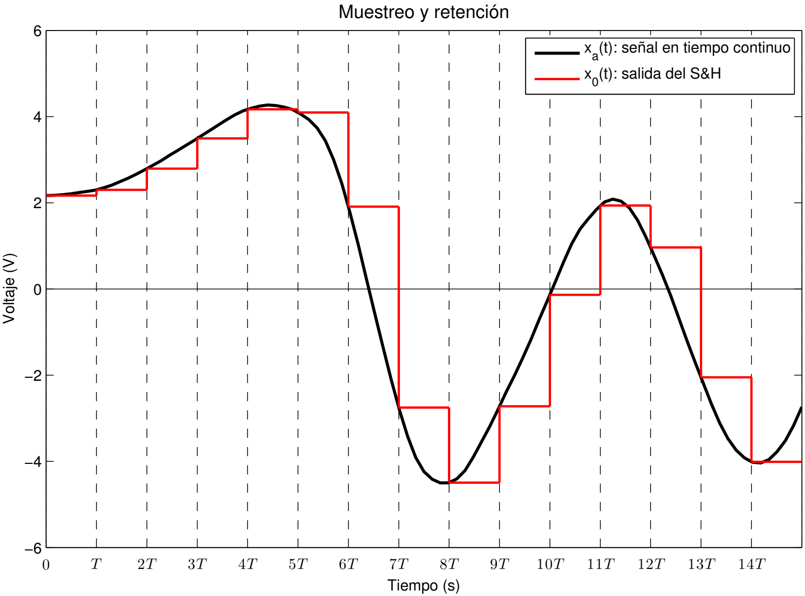
$$x_0(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]h_0(t-nT), \quad \text{donde} \quad h_0(t) = \begin{cases} 1, & 0 < t < T \\ 0, & \text{en otro caso} \end{cases}$$

  y $x[n] = x_a(nT)$ son las muestras ideales.

- La salida es una forma de onda escalonada donde el valor de las muestras se mantiene constante durante todo el período de muestreo T.
  - El dispositivo físico de muestreo y retención se diseña de forma tal que el instante de muestreo sea lo mas preciso posible y el voltaje en el instante de muestreo se mantenga lo mas estable posible.

- Su propósito es proveer un valor de voltaje constante al conversor A/D.

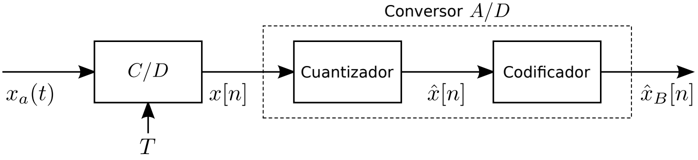
Conversión A/D



Conversión A/D

Conversor A/D

Como modelo del sistema práctico, se asume que el módulo de conversión recibe muestras ideales para realizar la tarea:



- El conversor de tiempo continuo a tiempo discreto ideal modela el muestreo realizado por el $S\&H$.
- El módulo de conversión se compone de dos sistemas:
  - Cuantizador: aproxima el valor de las muestras con precisión infinita a un valor determinado dentro de un conjunto finito de valores.
  - Codificador: codifica los valores de las muestras cuantizadas de forma apropiada para ser almacenados o transmitidos.

Cuantización

- El cuantizador aproxima el valor de la muestra de entrada al valor mas cercano dentro de un conjunto de valores predefinidos.
- La operación de cuantización es no lineal y se representa como

$$\hat{x}[n] = Q(x[n])$$

  - La muestra $\hat{x}[n]$ es referida como muestra cuantizada.

- El número de valores predefinidos es una potencia de 2.
  - Cada valor posible del cuantizador se llama nivel de cuantización.
  - Con una cantidad de niveles potencia de 2, se puede codificar cada nivel con un número binario: palabra del código.
  - Con una palabra de N bits es posible codificar 2^N niveles de cuantización.

Largo de palabra, N	Número de niveles, 2^N
3	8
8	256
16	65536
24	16777216
32	4294967296

- Parámetros del conversor A/D
  - Largo de palabra (N): define la cantidad de niveles de cuantización.
  - Escala completa (X_m): Amplitud de pico máxima de la señal de entrada (10, 5 o 1 volt).

Cuantización

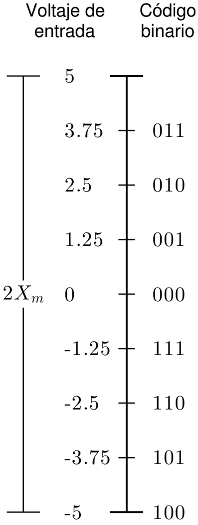
- Resolución del cuantizador:
  - Sea $N = B + 1$ el número de bits del cuantizador.
  - La resolución del cuantizador (paso de cuantización) es la distancia entre dos niveles de cuantización sucesivos,

$$\Delta = \frac{2X_m}{2^{B+1}} = \frac{X_m}{2^B}.$$

- Ejemplo:
  - Si $B = 2$ (cuantizador de 3 bits) y la escala completa es $X_m = 5$ volts, la resolución es

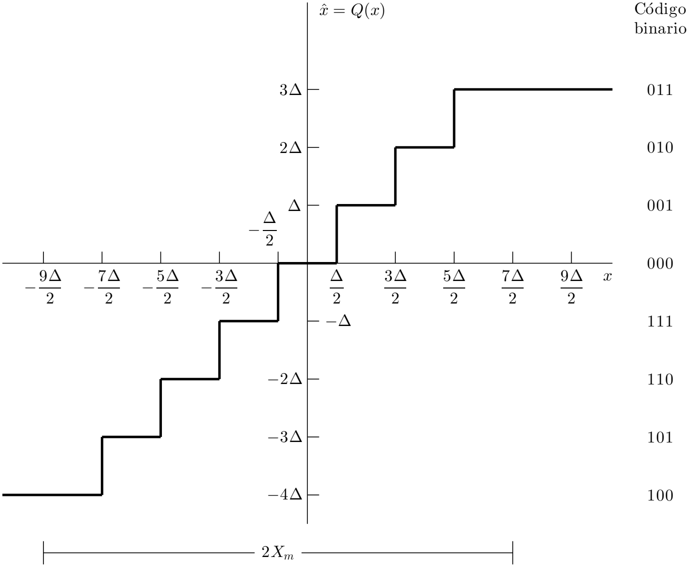
$$\Delta = \frac{10}{8} = 1.25 \text{ volts.}$$

- Observaciones:
  - El cuantizador redondea el voltaje de entrada al nivel de cuantización mas cercano.
  - El cero es un nivel de cuantización. Como el número de niveles es par, hay un nivel de cuantización menos en la zona de voltajes positivos.

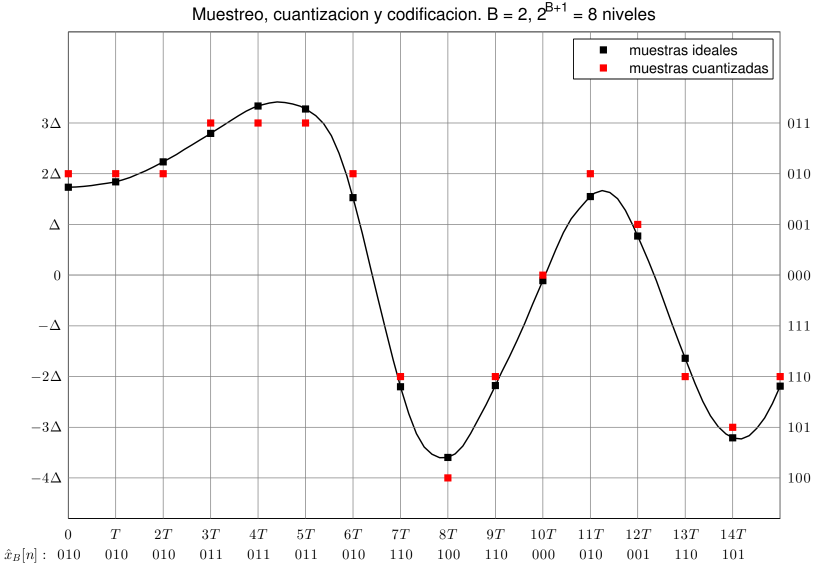


Cuantización

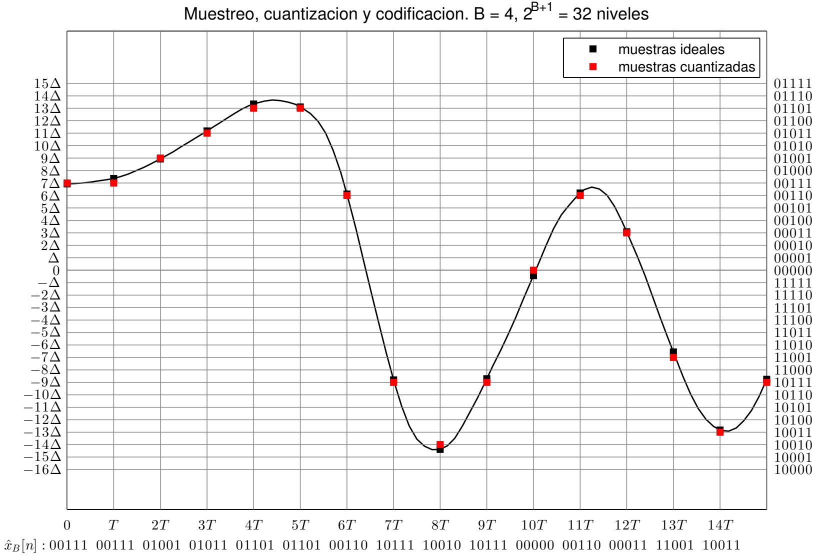
Característica de un cuantizador uniforme: $N = 3$, 8 niveles



Cuantización



Cuantización



Codificación

Codificación a código binario

- En principio, cualquier asignación de palabras puede ser empleada para codificar cada nivel.
- En procesamiento de señales, es conveniente usar un código binario que permita hacer las cuentas directamente con las palabras del código.
- Código complemento a 2:

Palabra binaria	Valor decimal	Voltaje $(\times X_m)$ $X_m = 5$
0.11	3/4	3.75
0.10	1/2	2.5
0.01	1/4	1.25
0.00	0	0
1.11	-1/4	-1.25
1.10	-1/2	-2.5
1.01	-3/4	-3.75
1.00	-1	-5

- El bit mas significativo es el bit que determina el signo (bit de signo).
- En una palabra de $B+1$ bits de la forma

$$a_0.a_1a_2\dots a_B$$

el valor decimal es

$$-a_0 2^0 + a_1 2^{-1} + a_2 2^{-2} + \cdots + a_B 2^{-B}$$

Codificación

Codificación a código binario

- Como el valor de la palabra binaria $\hat{x}_B[n]$ se asume normalizado a 1, es decir, $-1 \leq \hat{x}_B[n] < 1$, la relación entre la palabra del código y el nivel de la señal cuantizada es,

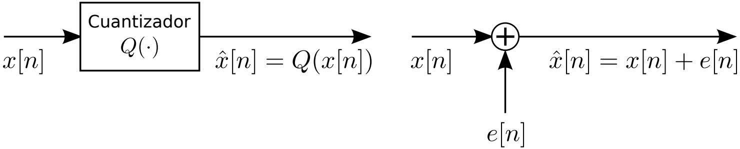
$$\hat{x}[n] = X_m \hat{x}_B[n]$$

- Es común asumir que la señal de entrada está normalizada a amplitud de pico unitaria de forma que $\hat{x}[n] = \hat{x}_B[n]$.

Análisis del error de cuantización

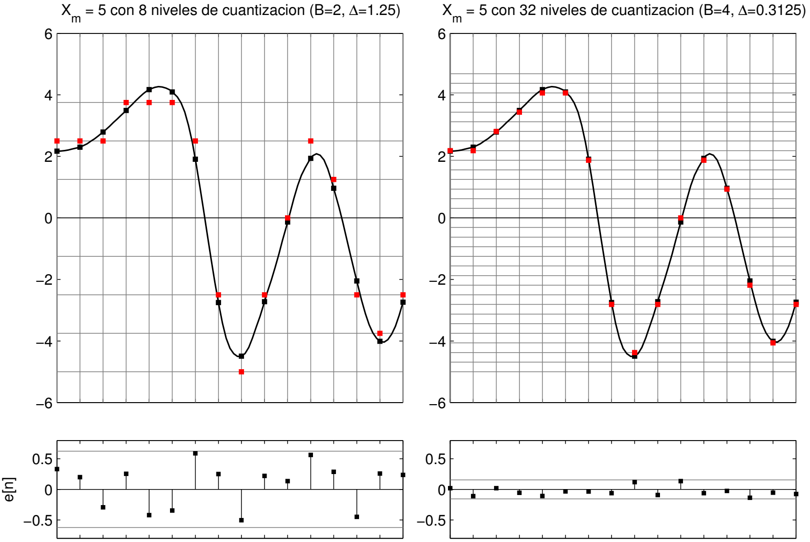
Error de cuantización

- El valor de las muestras cuantizadas $\hat{x}[n]$ es distinto al valor de las muestras verdaderas $x[n]$.
- La diferencia entre ellas es el error de cuantización, que se define como
$$e[n] = \hat{x}[n] - x[n].$$
- Como el valor de las muestras cuantizadas se redondea al nivel mas cercano, se cumple que
$$-\frac{\Delta}{2} < e[n] \leq \frac{\Delta}{2}.$$
- Un modelo del error de cuantización útil en la práctica es suponer que se trata de ruido que se adiciona a la señal sin cuantizar.



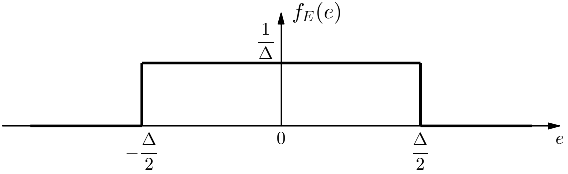
Análisis del error de cuantización

Error de cuantización con cuantizadores de distinta cantidad de bits



Análisis del error de cuantización

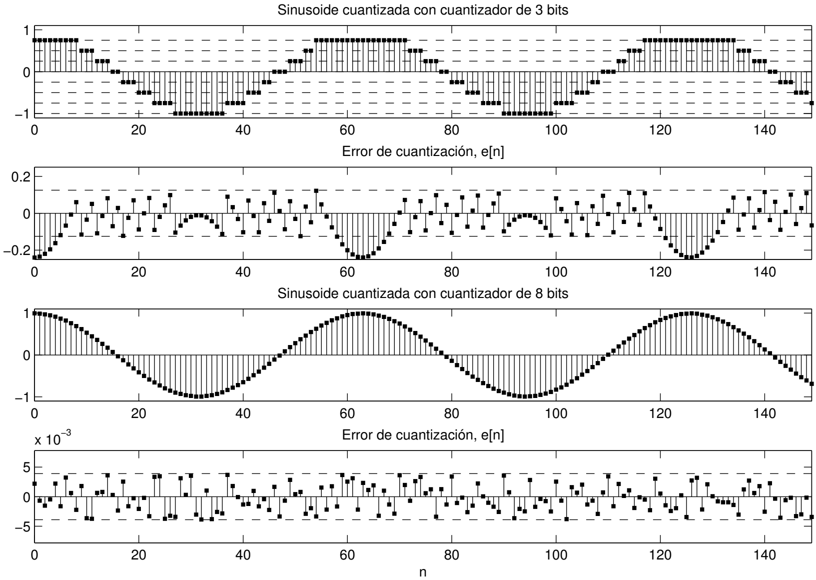
- Para representar los efectos de la cuantización se emplea el siguiente modelo estadístico del ruido de cuantización:
  1. El error de cuantización $e[n]$ es una realización de un proceso aleatorio estacionario.
  2. La secuencia del error $e[n]$ no está correlacionada con la secuencia $x[n]$.
  3. Las muestras del proceso del error $e[n]$ no están correlacionadas entre si, es decir, el error es ruido blanco.
  4. La distribución de probabilidad del error es uniforme en el intervalo del error de cuantización $(-\Delta/2,\, \Delta/2]$.



- Estas hipótesis sobre el ruido de cuantización son válidas en el caso de señales complejas (complicadas) y que varían muchos niveles de cuantización muestra a muestra, como voz o música.

Análisis del error de cuantización

Validez del modelo estadístico del error de cuantización



Análisis del error de cuantización

- Teniendo en cuenta que el ruido tiene distribución uniforme en $(-\Delta/2,\ \Delta/2]$, su varianza es

$$\sigma_e^2 = \int_{-\Delta/2}^{\Delta/2} e^2 \frac{1}{\Delta} de = \frac{\Delta^2}{12}.$$

- Sustituyendo el valor de voltaje que corresponde a un paso de cuantización, se tiene que la potencia de ruido de cuantización es

$$\sigma_e^2 = \frac{2^{-2B} X_m^2}{12}.$$

(ver Apéndice de definiciones de la potencia de señales)

Análisis del error de cuantización

- La relación señal a ruido de un cuantizador de $B + 1$ bits es

$$\begin{aligned}
\mathrm{SNR} &= 10\log_{10}\left(\frac{\sigma_x^2}{\sigma_e^2}\right) \\
&= 10\log_{10}\left(\frac{12\cdot 2^{2B}\sigma_x^2}{X_m^2}\right) \\
&= 20B\log_{10}(2) + 10\log_{10}(12) + 20\log_{10}\left(\frac{\sigma_x}{X_m}\right) \\
&= 6.02B + 10.8 - 20\log_{10}\left(\frac{X_m}{\sigma_x}\right)
\end{aligned}$$

- La relación señal a ruido de cuantización se incrementa 6 dB por cada bit agregado al largo de palabra.

Análisis del error de cuantización

Interpretación del término $-20\log_{10}\left(\frac{X_m}{\sigma_x}\right)$ en la SNR

- σ_x es el valor RMS de la señal y X_m es un parámetro fijo del cuantizador.
  - Por ejemplo, si la señal es una sinusoide de amplitud A,

$$\sigma_x = A/\sqrt{2}. \qquad \text{(ver Apéndice)}$$

- Si la amplitud de la señal es pequeña, σ_x es pequeño, haciendo que la SNR decrezca.
  - La SNR decae 6 dB si la amplitud de la señal se divide a la mitad.
- Se concluye que es importante que la amplitud de la señal se ajuste a la escala completa del conversor.

Análisis del error de cuantización

Modelo gaussiano de la señal de entrada

- Muchas señales pueden modelarse como gaussianas (música, voz).
- Es común ajustar la amplitud de la señal de forma que $\sigma_x = X_m/4$.
  - De esta forma se mantiene σ_x relativamente grande y la amplitud supera la escala completa solo muy esporádicamente (0.064 % de las muestras).
- La relación señal a ruido queda

$$\mathrm{SNR} \approx 6B - 1.24 \text{ dB}.$$

- Por ejemplo, para obtener una SNR del orden de 90-96 dB, como se requiere en audio de alta calidad, es necesario un largo de palabra de 16 bits,

$$B \approx \frac{\mathrm{SNR} + 1.24}{6}. \qquad \text{Para } \mathrm{SNR} = 90 \text{ dB}, \ B = 15.$$

Apéndice: potencia de señales continuas y discretas

- Si $i(t)$ y $v(t)$ son la corriente y el voltaje en una resistencia R, la potencia instantánea es

$$p(t) = v(t)i(t) = \frac{1}{R}v^2(t).$$

- La potencia promedio consumida en el intervalo de tiempo $(t_1,\, t_2)$ es

$$P_{(t_1,\, t_2)} = \frac{1}{t_2 - t_1}\int_{t_1}^{t_2} \frac{1}{R}v^2(t)\, dt$$

- Esto sirve como motivación para definir la potencia promedio de cualquier señal, aunque no represente a alguna magnitud física en particular,

Señal continua	Señal discreta
$$P_{(t_1,\, t_2)} = \frac{1}{t_2 - t_1}\int_{t_1}^{t_2} \lvert x(t)\rvert^2\, dt$$	$$P_{(n_1,\, n_2)} = \frac{1}{n_2 - n_1 + 1}\sum_{n=n_1}^{n_2} \lvert x(n)\rvert^2$$

  - el módulo se toma para considerar señales de valores complejos

Apéndice: potencia de señales continuas y discretas

- Análogamente, la potencia promedio total se define como (caso real)

Señal continua	Señal discreta
$$P_x = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} x^2(t)\, dt$$	$$P_x = \lim_{N\to\infty} \frac{1}{2N+1} \sum_{n=-N}^{N} x^2(n)$$

- La potencia definida de esta forma, es el promedio de los valores que toma la señal en el tiempo,

$$P_x = \left\langle x^2[n] \right\rangle.$$

- En el caso en que $x[n]$ es un proceso *ergódico*, el promedio temporal coincide con el promedio entre realizaciones, y por lo tanto,

$$P_x = \mathrm{E}\left\{x^2[n]\right\}.$$

- Como la varianza de una señal es

$$\sigma_x^2 = \mathrm{E}\left\{x^2[n]\right\} - \mathrm{E}^2\left\{x[n]\right\},$$

si el proceso tiene media nula, se llega a que

$$P_x = \sigma_x^2.$$

Apéndice: potencia de señales continuas y discretas

- El valor *RMS* de una señal $x(t)$ se define como

$$x_{\mathrm{rms}} = \sqrt{P_x} = \sigma_x$$

- La potencia de una señal periódica de período T es

$$P_x = \frac{1}{T}\int_0^T x^2(t)\,dt$$

- Potencia de $x(t) = A\sin\left(\frac{2\pi t}{T}\right)$:

$$\begin{aligned}
P_x &= \frac{A^2}{T}\int_0^T \sin^2\left(\frac{2\pi t}{T}\right)\,dt\\
&\overset{(a)}{=} \frac{A^2}{2T}\int_0^T \left[1-\cos\left(\frac{4\pi t}{T}\right)\right]\,dt\\
&\overset{(b)}{=} \frac{A^2}{2T}t\Big|_0^T\\
&= \frac{A^2}{2}
\end{aligned}$$

(a) $\sin^2 x = \dfrac{1-\cos 2x}{2}$

(b) La integral de una sinusoide en un número entero de períodos es nula.

Referencias I