Variables aleatorias y procesos estocásticos

Modulación y Procesamiento de Señales

Ernesto López
Pablo Zinemanas, Mauricio Ramos
{pzinemanas, mramos}@fing.edu.uy

Centro Universitario Regional Este
Sede Rocha
Tecnólogo en Telecomunicaciones

Curso 2016

Introducción

Clasificación de señales

Las señales pueden clasificarse en dos tipos:

- Señales determinísticas
- Señales aleatorias

Señales determinísticas

- Lo estudiado hasta ahora consistió en el análisis y diseño de sistemas para procesar señales determinísticas.
- Las señales determinísticas se describen
  - a través de una expresión matemática
  - la especificación del valor de las muestras para cada instante n.
- Pueden ser repetidamente reproducidas de forma incambiada. Cada muestra de la secuencia está determinada unívocamente.
- Ejemplos de señales determinísticas:
  - la respuesta al impulso de un sistema lineal e invariante en el tiempo
  - una señal de voz o música almacenada en una computadora

Introducción

Señales aleatorias

- Las señales aleatorias no se pueden especificar con una expresión matemática o mediante los valores de sus muestras, si no que se describen en términos de su comportamiento promedio.
  - nunca toman los mismos valores en distintas mediciones.
  - no pueden predecirse con exactitud a lo largo del tiempo.
- Ejemplos de señales aleatorias:
  - Señal que consiste en mediciones diarias de la temperatura en un lugar fijo a una hora del día fija.
  - Imagen de televisión sintonizada en un canal donde no hay emisión.
  - Ruido de banda ancha proveniente de fuentes naturales, como la vibración térmica de atomos en conductores, que genera una señal que contamina la señal de interés en el conductor.

Introducción

Motivación

- Conversión analógica a digital (A/D):
  - El conversor C/D es una idealización del conversor A/D para convertir una señal de tiempo continuo a una señal en tiempo discreto.
    - Una señal en tiempo discreto tiene muestras que toman cualquier valor real arbitrario.
  - En la práctica, el conversor A/D convierte una señal en tiempo continuo en una señal digital.
    - Las muestras de la señal digital solo toman un conjunto finito de valores reales.
  - El proceso de restringir la amplitud de las muestras a un conjunto discreto de valores en el conversor A/D se llama cuantización.
  - El error introducido en el proceso de cuantiazción en la conversión A/D se modela como un proceso aleatorio que se suma a la señal en tiempo discreto original.

El proceso aleatorio en este caso se llama ruido de cuantización.

Introducción

Motivación

En la transmisión de señales en telecomunicaciones

- Señal transmitida como proceso aleatorio
  - Desde el punto de vista del receptor, todas las señales que se reciben son desconocidas e impredecibles.
  - Al evaluar el desempeño de los sistemas de comunicación, las señales transmitidas se modelan como procesos aleatorios.
    - Una señal de voz que se transmite en una comunicación telefónica puede considerarse una señal aleatoria.
- Ruido contaminante en la transmisión
  - Por otro lado, todo sistema de comunicación es afectado por ruido.
    - El ruido es toda señal no deseada que se mezcla con la señal útil que se quiere transmitir.
  - El ruido se debe a diversas causas: a los componentes electrónicos imperfectos (por ejemplo, amplificadores), al ruido térmico de las resistencias, a las interferencias de señales externas.
  - Ruidos de distinta naturaleza se modelan como procesos aleatorios con características distintas.

Introducción

Procesos estocásticos o aleatorios

- Un proceso aleatorio es una colección de señales que se define a través de un conjunto de propiedades estadísticas.
  - Todas las señales de la colección tienen las mismas propiedades estadísticas.
  - El conjunto de propiedades estadísticas definen una regla para crear señales.
- Una señal aleatoria es una señal particular de la colección de señales determinadas por un proceso estocástico.
- Cada muestra de una señal aleatoria es una variable aleatoria.
  - Por lo tanto, los valores de las muestras de una señal particular de la colección son desconocidas a priori.
  - Es necesario definir un marco matemático para describir cada variable aleatoria y las relaciones entre ellas.

Variables aleatorias

Variables aleatorias: definiciones

Tirar una moneda

- Se considera el experimento de tirar una moneda no cargada.
- El experimento produce dos resultados posibles, cara o número:

$$\omega_1 = \{C\} \qquad \text{o} \qquad \omega_2 = \{N\}$$

- Ambos eventos se obtienen con igual probabilidad:

$$\Pr\{C\} = 0.5 \qquad\qquad \Pr\{N\} = 0.5$$

Evento y Espacio muestral

- Definición: cada resultado posible del experimento se llama evento.
- Definición: el conjunto de todos los resultados posibles del experimento se llama espacio muestral.
- El espacio muestral se denota como Ω y tiene probabilidad 1,

$$\Pr\{\Omega\} = 1$$

- En el ejemplo de tirar una moneda: $\Omega = \{C,\, N\}, \quad \Pr\{C,\, N\} = 1$

Variables aleatorias: definiciones

Tirar una moneda

- Se define una variable real X, y se asigna $X = 1$ si el resultado de la tirada es cara y $X = -1$ si el resultado es número.
- De esta forma, la variable tiene igual probabilidad de tomar el valor 1 o -1,
$$\Pr\{X = 1\} = 0.5 \qquad \Pr\{X = -1\} = 0.5$$
- Además, como los únicos resultados posibles al tirar la moneda son cara o número, se cumple que
$$\Pr\{X = x\} = 0 \qquad \text{si} \qquad x \neq \pm 1.$$
- La asignación en este caso, es mas bien arbitraria
  - Se podría haber elegido por ejemplo, cara: $X = 0$, y número: $X = 1$.

Definida de esta forma, X es una variable aleatoria.

Variables aleatorias: definiciones

Tirar una moneda

- Si la moneda está cargada (sesgada), la probabilidad de obtener cara es distinta a la probabilidad de obtener número.
- Por ejemplo, si la probabilidad de obtener cara es p y la de obtener número es $1-p$, se tiene que

$$\Pr\{X=1\}=p \qquad \Pr\{X=-1\}=1-p$$

- Variable aleatoria de Bernoulli:
  - Variable aleatoria que toma solo dos valores, por ejemplo, $X=1$ y $X=0$, con probabilidades p y $1-p$ respectivamente.
  - Se denota $X\sim\mathcal{B}(1,p)$.

Tirar un dado

- En el experimento de tirar un dado, el espacio muestral es,

$$\Omega=\{1,\,2,\,3,\,4,\,5,\,6\}$$

- Si el número obtenido se asigna a una variable X, se tiene una variable aleatoria con igual probabilidad de tomar cualquier valor entero entre uno y seis.

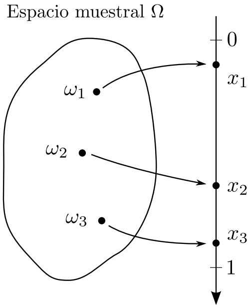
Variables aleatorias: definiciones

Variable aleatoria

- Se definió:
  - Evento (ω_i): resultado de un experimento.
  - Espacio muestral (Ω): conjunto de todos los resultados posibles de un experimento, $\omega_i \in \Omega$.

1. Cada evento ω_i del espacio muestral Ω tiene una probabilidad de ocurrencia.
2. A cada evento ω_i se le asignó una correspondencia con un número real X,

$$X : \Omega \to \mathbb{R}$$



- De esta forma, se definió la variable aleatoria X en términos de la probabilidad de que asuma cierto valor.
- Interesa caracterizar la variable aleatoria en lugar de los eventos del espacio muestral.

Variables aleatorias: definiciones

Variables aleatorias discretas y continuas

- Las variables aleatorias se clasifican en: discretas o continuas.
  - Discretas: el espacio muestral Ω tiene un número finito de eventos ω_i.
  - Continuas: el espacio muestral contiene infinitos eventos.
- En el experimento de tirar una moneda, la variable aleatoria es discreta, porque el experimento tiene solo dos resultados posibles.

Variables aleatorias: definiciones

Ejemplo de variable aleatoria continua

- Se considera el experimento de hacer girar una aguja giratoria y se define como variable aleatoria el ángulo final de la aguja (en grados).
- El espacio muestral de este experimento es

$$\Omega = \{\omega : 0 \leq \omega < 360\} \qquad \text{y} \qquad X = \omega.$$

- Como $X \in [0, 360)$, la variable puede tomar infinitos valores y por lo tanto, la probabilidad de tomar un valor específico es nula,

$$\Pr\{X = x\} = 0.$$

- La probabilidad de que la variable pertenezca a un intervalo específico, $X \in [a,\, b]$, es en este caso

$$\Pr\{a \leq X \leq b\} = \frac{b - a}{360}.$$

Caracterización de variables aleatorias

Distribución de probabilidad

- Una forma de caracterizar una variable aleatoria es mediante la función de distribución de probabilidad, definida como

$$F_X(x) = \Pr\{X \leq x\}$$

- Esto significa que una función F le asigna a cada valor real x, el de la probabilidad de que una variable aleatoria X asuma un valor inferior o igual a x.
- Propiedad de la distribución de probabilidad: por definición, la distribución de probabilidad cumple que:

$$\lim_{x \to -\infty} F_X(x) = \lim_{x \to -\infty} \Pr\{X \leq x\} = 0$$

$$\lim_{x \to \infty} F_X(x) = \lim_{x \to \infty} \Pr\{X \leq x\} = 1$$

Caracterización de variables aleatorias

Ejemplos de distribuciones de probabilidad

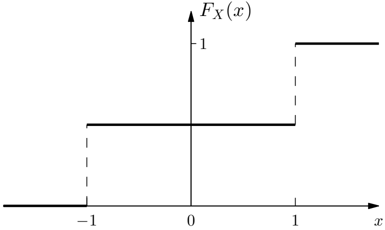
- En base a la asignación de la variable aleatoria en los ejemplos anteriores, las distribuciones de probabilidad son:

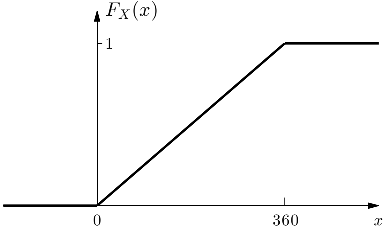
Tirar una moneda

$$F_X(x) = \begin{cases} 0, & x < -1 \\ 0.5, & x < 1 \\ 1, & x \geq 1 \end{cases}$$

Aguja giratoria

$$F_X(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ x/360, & 0 \leq x < 360 \\ 1, & x \geq 360 \end{cases}$$





Densidad de probabilidad

- Otra forma equivalente de caracterizar una variable aleatoria es mediante la función de densidad de probabilidad, y se define como la derivada de la distribución de probabilidad (si existe),

$$f_X(x) = \frac{d}{dx} F_X(x).$$

- Algunas propiedades de la densidad de probabilidad son:
  - $\Pr\{X \leq x\} = F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f_X(u)du$
  - $\int_{-\infty}^{\infty} f_X(u)du = 1$
  - $\Pr\{a \leq x \leq b\} = \int_{a}^{b} f_X(u)du = F_X(b) - F_X(a)$

Caracterización de variables aleatorias

Densidad de probabilidad: caracterización

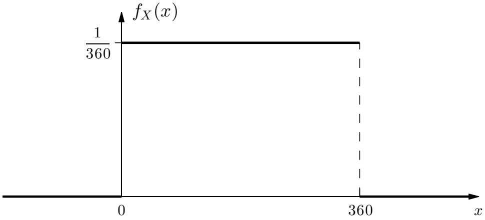
Tirar una moneda

- La distribución de probabilidad no es continua en x, y por lo tanto, no existe su derivada. La variable aleatoria (VA) no tiene densidad de probabilidad.
- Lo anterior se puede generalizar para todas la VA discretas.

Aguja giratoria

- Derivando la función de distribución de probabilidad, se tiene que

$$f_X(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{360}, & 0 < x < 360 \\ 0, & \text{en otro caso} \end{cases}$$



- Una VA X que toma valores en un intervalo $[a, b]$ de "forma equiprobable", tiene densidad de probabilidad constante. Se dice que la VA tiene distribución uniforme y se denota $X \sim \mathcal{U}(a, b)$.

Caracterización de variables aleatorias

Esperanza (valor medio, media)

Intuitivamente, es el valor que se espera encontrar si se repite un experimento un número grande de veces y se promedian todos los valores obtenidos de la variable aleatoria asignada a cada resultado del experimento.

Caso discreto

X VA que toma valores x_k con probabilidad $\Pr\{X = x_k\} = p_k$

$$\mu = \mathrm{E}[X] = \sum_k x_k p_k$$

Caso continuo

X VA con densidad de probabilidad $f_X(x)$

$$\mu = \mathrm{E}[X] = \int_{-\infty}^{\infty} x f_X(x) dx$$

- Algunas propiedades útiles:
  - La esperanza de una constante, es la propia constante.
  - Linealidad: $\mathrm{E}[aX + bY] = a\,\mathrm{E}[X] + b\,\mathrm{E}[Y]$
  - Esperanza de una función de una VA X, $Y = g(X)$:

$$\mathrm{E}[Y] = \mathrm{E}[g(X)] = \int_{-\infty}^{\infty} g(x) f_X(x) dx.$$

Caracterización de variables aleatorias

Cálculo del valor esperado

- Tirar una moneda
  - La esperanza de la VA definida en el experimento es

$$\begin{aligned} \mathrm{E}[X] &= (-1)\times \Pr\{X=-1\} + 1\times \Pr\{X=1\} \\ &= (-1)\times\frac{1}{2} + 1\times\frac{1}{2} = 0 \end{aligned} \tag{1}$$

- Tirar un dado
  - La probabilidad de obtener el numero k al tirar un dado no cargado es $p_k = \frac{1}{6}$ para todo k. Por lo tanto, la esperanza queda

$$\mathrm{E}[X] = \sum_{k=1}^{6} k p_k = \frac{1}{6}\sum_{k=1}^{6} k = \frac{1+2+3+4+5+6}{6} = 3.5$$

- Aguja giratoria
  - En el ejemplo de la aguja giratoria, la VA es continua, y la esperanza es:

$$\mathrm{E}[X] = \int_{-\infty}^{\infty} x f_X(x)dx = \frac{1}{360}\int_{0}^{360} x dx = \frac{1}{360}\left.\frac{x^2}{2}\right|_0^{360} = 180$$

Caracterización de variables aleatorias

Varianza

- Intuitivamente, la varianza es una medida de la dispersión de los valores que toma una VA.
  - Varianza 0 indica que la VA toma siempre el mismo valor, y por lo tanto no es aleatoria.
  - Varianza pequeña, indica que los valores de la VA son cercanos a la media, y por lo tanto son cercanos entre si.
  - Varianza grande indica que los valores que toma la VA difieren mucho entre si y también difieren de la media.
- Formalmente, es el valor esperado del cuadrado de la desviación de la media $\mu = \mathrm{E}[X]$,

$$\mathrm{Var}(X) = \mathrm{E}\left[(X-\mu)^2\right].$$

- Se denota como $\mathrm{Var}(X)$ o σ_X^2.
- Usando la propiedad de linealidad de la esperanza, la varianza se puede expresar como (demostración: ejercicio)

$$\mathrm{Var}(X) = \mathrm{E}\left[X^2\right] - \mu^2.$$

Caracterización de variables aleatorias

Cálculo de la varianza

- Caso discreto: X VA con media μ que toma valores x_k con probabilidad $\Pr\{X = x_k\} = p_k$

$$\begin{aligned}
\sigma_X^2 = \mathrm{Var}(X) &= \sum_k (x_k - \mu)^2 p_k \\
&= \left(\sum_k x_k^2 p_k \right) - \mu^2
\end{aligned}$$

- Caso continuo: X VA con media μ y densidad de probabilidad $f_X(x)$

$$\begin{aligned}
\sigma_X^2 = \mathrm{Var}(X) &= \int_{-\infty}^{\infty} (x - \mu)^2 \, f_X(x) \, dx \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} x^2 \, f_X(x) \, dx - \mu^2
\end{aligned}$$

Caracterización de variables aleatorias

Cálculo de la varianza

- Tirar una moneda
  - Teniendo en cuenta que la media μ es nula, la varianza de la VA es

$$
\begin{aligned}
\sigma_X^2 &= \sum_k x_k^2 p_k - \mu^2 \\
&= (-1)^2 \times \Pr\{X = -1\} + 1^2 \times \Pr\{X = 1\} - 0 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \\
&= 1 \qquad (2)
\end{aligned}
$$

- Aguja giratoria
  - La VA es continua y se vio previamente que la media es $\mu = \frac{360}{2}$.
  - La varianza es

$$
\begin{aligned}
\sigma_X^2 &= \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f_X(x)dx - \mu^2 = \frac{1}{360}\int_0^{360} x^2 dx - \left(\frac{360}{2}\right)^2 \\
&= \frac{1}{360}\frac{x^3}{3}\Big|_0^{360} - \left(\frac{360}{2}\right)^2 = \frac{360^2}{3} - \frac{360^2}{4} \\
&= \frac{360^2}{12}
\end{aligned}
$$

Cálculo de la varianza

- VA Bernoulli, $X \sim \mathcal{B}(1, p)$: $X = 0$ o $X = 1$ con probabilidades $1 - p$ y p respectivamente.

Media

$$\begin{aligned} \mu &= \sum_k x_k p_k \\ &= 0 \times (1-p) + 1 \times p \\ &= p \end{aligned}$$

Varianza

$$\begin{aligned} \sigma_X^2 &= \sum_k x_k^2 p_k - \mu^2 \\ &= 0^2 \times (1-p) + 1^2 \times p - p^2 \\ &= p(1-p) \end{aligned}$$

Caracterización de variables aleatorias

Cálculo de la varianza

- VA de distribución uniforme en $[a, b]$, $X \sim \mathcal{U}(a,b)$:

Media

$$\begin{aligned}
\mu &= \int_{-\infty}^{\infty} x f_X(x) dx \\
&= \frac{1}{b-a} \int_a^b x dx \\
&= \frac{1}{b-a} \frac{x^2}{2} \Big|_a^b \\
&= \frac{1}{b-a} \frac{b^2 - a^2}{2} \\
&= \frac{1}{b-a} \frac{(b-a)(b+a)}{2} \\
&= \frac{a+b}{2}
\end{aligned}$$

Varianza

$$\begin{aligned}
\sigma_X^2 &= \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f_X(x) dx - \mu^2 \\
&= \frac{1}{b-a} \int_a^b x^2 dx - \left(\frac{a+b}{2}\right)^2 \\
&= \frac{1}{b-a} \frac{x^3}{3} \Big|_a^b - \left(\frac{a+b}{2}\right)^2 \\
&= \frac{1}{b-a} \frac{b^3 - a^3}{3} - \left(\frac{a+b}{2}\right)^2 \\
&= \frac{(b-a)(a^2 + ba + b^2)}{3(b-a)} - \frac{(a+b)^2}{4} \\
&= \frac{(a+b)^2 - ab}{3} - \frac{(a+b)^2}{4} \\
&= \frac{(b-a)^2}{12}
\end{aligned}$$

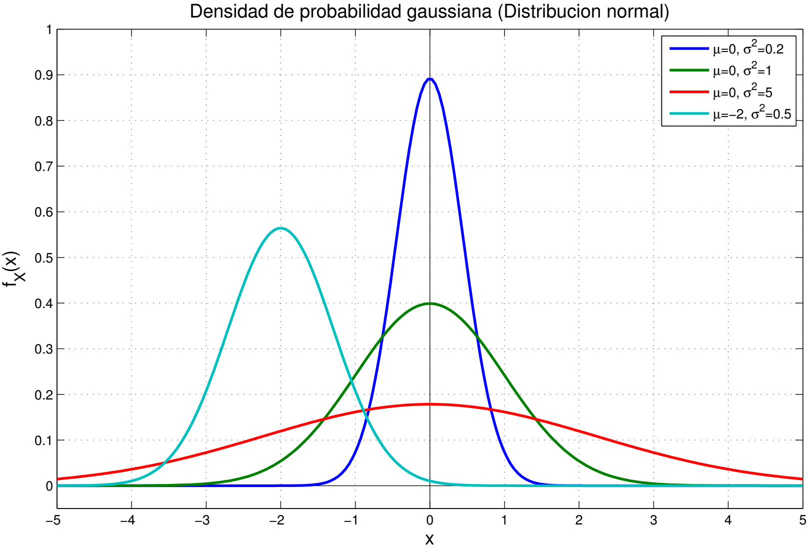
La distribución Normal

Se dice que una variable aleatoria es gaussiana o tiene distribución Normal si su función de densidad de probabilidad es

$$f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left[-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right]$$

- La VA con esta distribución tiene media μ y varianza σ^2.
- La densidad de probabilidad queda completamente determinada especificando la media y la varianza

La distribución Normal



Variables aleatorias: caso multivariado

Distribución de probabilidad conjunta

- Cuando en un experimento hay varias variables aleatorias, no alcanza con la caracterización estadística individual de cada VA, si no que también es necesario considerar la dependencia estadística que existe entre ellas.
- Dadas dos variables aleatorias X y Y, hay que especificar la probabilidad de todos los valores posibles que pueden tomar X y Y.
  - Caso discreto:
    - La caracterización se realiza mediante la probabilidad conjunta:

$$p_{X,Y}(x,y) = \mathrm{P}(X = x,\, Y = y),$$

    Indica la probabilidad de que X tome el valor x y Y tome el valor y.
  - Caso continuo:
    - La caracterización se realiza mediante la distribución de probabilidad conjunta

$$F_{X,Y}(x,y) = \mathrm{P}(X \leq x, Y \leq y).$$

    Indica la probabilidad de que X sea menor que x y Y sea menor que y.
    - O mediante la densidad de probabilidad conjunta, que es la derivada de la distribución de probabilidad conjunta,

$$f_{X,Y}(x,y) = \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} F_{X,Y}(x,y)$$

Variables aleatorias: caso multivariado

Ejemplo: VAs definidas a partir de tirada de dados

- Se considera el experimento de tirar un dado no cargado y se definen dos variables aleatorias A y B:
  - $A = 1$ si el resultado es un número par y $A = 0$ en caso contrario.
  - $B = 1$ si el resultado es un número primo y $B = 0$ en caso contrario.

	1	2	3	4	5	6
A	0	1	0	1	0	1
B	0	1	1	0	1	0

- Sea X el resultado de la tirada del dado. Como $\Pr(X = k) = \frac{1}{6}$ para $k = 1, \ldots, 6$, la probabilidad conjunta es,

$$
\begin{array}{ll}
\mathrm{P}(A = 0, B = 0) = P\{1\} = \frac{1}{6} & \mathrm{P}(A = 1, B = 0) = P\{4, 6\} = \frac{2}{6} \\
\mathrm{P}(A = 0, B = 1) = P\{3, 5\} = \frac{2}{6} & \mathrm{P}(A = 1, B = 1) = P\{2\} = \frac{1}{6}
\end{array}
$$

- Notar que se cumple que

$$\sum_{i=0}^{1} \sum_{j=0}^{1} \mathrm{P}(A = i,\, B = j) = 1.$$

Variables aleatorias: caso multivariado

Probabilidad condicional

- La probabilidad condicional indica la probabilidad de cierto evento teniendo en cuenta que otro evento ha ocurrido.
- Se denota como $\mathrm{P}(X = x|Y = y)$ y se lee como "la probabilidad de que la VA X tome el valor x dado que la VA Y tomó el valor y."
- Teorema de Bayes:

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(X = x, Y = y) &= \mathrm{P}(Y = y \mid X = x)\mathrm{P}(X = x)\\ &= \mathrm{P}(X = x \mid Y = y)\mathrm{P}(Y = y)\end{aligned}$$

Ejemplo: VAs definidas a partir de tirada de dados

En el ejemplo anterior se tiene que:

- $\mathrm{P}(A = 0, B = 0) = \dfrac{1}{6}$
- $\mathrm{P}(B = 0|A = 0) = \dfrac{1}{3}$
- $\mathrm{P}(A = 0) = \dfrac{1}{2}$

$$\underbrace{\mathrm{P}(A = 0, B = 0)}_{\frac{1}{6}} = \underbrace{\mathrm{P}(B = 0|A = 0)}_{\frac{1}{3}}\underbrace{\mathrm{P}(A = 0)}_{\frac{1}{2}}$$

Variables aleatorias: caso multivariado

Momentos conjuntos: correlación y covarianza

Análogamente al caso de una sola variable, en el caso multivariado también es útil la caracterización de variables aleatorias a través de promedios.

- Correlación: La correlación se define como

$$r_{X,Y} = \mathrm{E}[XY].$$

- Covarianza: la covarianza se define como

$$\mathrm{Cov}(X,Y) = \mathrm{E}\left[(X - \mathrm{E}[X])(Y - \mathrm{E}[Y])\right] = \mathrm{E}[XY] - \mathrm{E}[X]\,\mathrm{E}[Y]$$

Variables aleatorias: caso multivariado

Ejemplo: VAs definidas a partir de tirada de dados

- Correlación:

$$r_{A,B} = \mathrm{E}[AB] = \sum_{i=0}^{1}\sum_{j=0}^{1} ij\mathrm{P}(A = i,\ B = j)$$
$$= 1 \times 1 \times \mathrm{P}(A = 1, B = 1) = \frac{1}{6}$$

- Covarianza: Teniendo en cuenta que $\mathrm{E}[A] = \mathrm{E}[B] = \frac{1}{2}$,

$$\begin{aligned}\mathrm{Cov}(A, B) &= \sum_{i=0}^{1}\sum_{j=0}^{1}(i - \mathrm{E}[A])(j - \mathrm{E}[B])\mathrm{P}(A = i,\ B = j)\\
&= \left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{1}{2}\right)\mathrm{P}(A = 0, B = 0) + \left(-\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{2}\right)\mathrm{P}(A = 0, B = 1)\\
&\quad + \left(\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{1}{2}\right)\mathrm{P}(A = 1, B = 0) + \left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{2}\right)\mathrm{P}(A = 1, B = 1)\\
&= \left(\frac{1}{4}\right)\left(\frac{1}{6}\right) - \left(\frac{1}{4}\right)\left(\frac{2}{6}\right) - \left(\frac{1}{4}\right)\left(\frac{2}{6}\right) + \left(\frac{1}{4}\right)\left(\frac{1}{6}\right) = -\frac{1}{12}\end{aligned}$$

Variables aleatorias: caso multivariado

Independencia y no correlación

En muchos casos, el valor que toma una variable aleatoria X no depende del valor que toma otra variable aleatoria Y.

- Independencia estadística: dos variables aleatorias X y Y se dice que son estadísticamente independientes si la densidad de probabilidad conjunta es separable,

$$f_{X,Y}(x,y) = f_X(x) f_Y(y).$$

- No correlación: dos variables aleatorias X y Y se dice que no están correlacionadas si la correlación es separable,

$$r_{X,Y} = \mathrm{E}[XY] = \mathrm{E}[X]\,\mathrm{E}[Y]$$

  - En este caso, la covarianza entre las VAs es,

$$\mathrm{Cov}(X,Y) = \mathrm{E}[XY] - \mathrm{E}[X]\,\mathrm{E}[Y] = \mathrm{E}[X]\,\mathrm{E}[Y] - \mathrm{E}[X]\,\mathrm{E}[Y] = 0,$$

  es decir, dos VAs son no correlacionadas si su covarianza es nula.

Variables aleatorias: caso multivariado

Independencia y no correlación

- La propiedad de independencia estadística es mas fuerte que la de no correlación. Si dos VAs son estadísticamente independientes, no están correlacionados, pero lo recíproco no es cierto.
- La varianza de la suma de dos variables no correlacionadas es la suma de las varianzas de cada una,

$$\mathrm{Var}[X+Y] = \mathrm{Var}[X] + \mathrm{Var}[Y].$$

(demostración: ejercicio)

Procesos estocásticos

Procesos estocásticos: definiciones

- Un proceso estocástico (o aleatorio) en tiempo discreto es una secuencia donde cada muestra es una variable aleatoria.
- Análogamente a una variable aleatoria, un proceso aleatorio es una correspondencia del espacio muestral Ω en un conjunto de señales en tiempo discreto.
- De esta forma, un proceso estocástico es una colección de señales en tiempo discreto.

Ejemplo 1: sinusoide de amplitud constante aleatoria

- Se considera el experimento de tirar un dado, y se define la variable aleatoria A como el resultado de la tirada
  - De esta forma, A toma algún valor entero entre uno y seis de forma equiprobable.
- Definiendo

$$x[n] = A\cos(\omega_0 n),$$

  se creó un proceso aleatorio que consiste en la colección de seis señales en tiempo discreto equiprobables.

Procesos estocásticos: definiciones

Ejemplo 2: proceso Bernoulli

- Se considera el experimento de tirar una moneda sucesivas veces.
  - Se asigna a la muestra $x[n]$ el valor 1 si en la tirada n-ésima sale cara y el valor -1 si en la tirada n-ésima sale número.
  - Cada muestra del proceso es una VA Bernoulli.
- El proceso definido de esta forma se llama proceso Bernoulli.
- Como el resultado de una tirada de la moneda no depende del resultado de las otras tiradas, las muestras de la secuencia son independientes entre si.
- Un proceso definido de esta forma, en donde todas las muestras tienen la misma distribución de probabilidad y son mutuamente independientes se llama proceso independiente e idénticamente distribuido (IID).

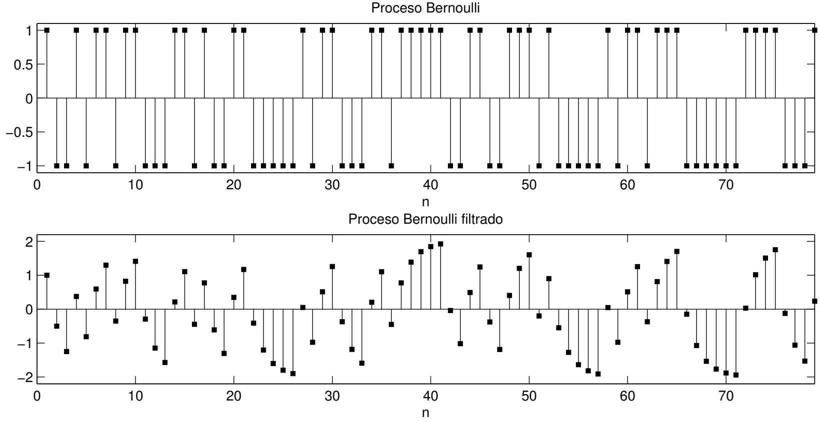
Ejemplo: proceso Bernoulli filtrado

- Dado un proceso estocástico $x[n]$, se puede crear otro proceso estocástico mediante la transformación de $x[n]$ con alguna operación matemática.
- Un ejemplo típico de transformación es el filtrado con un SLIT.
- Por ejemplo, dado un proceso Bernoulli, se puede obtener un nuevo proceso $y[n]$ mediante el filtrado con una ecuación en diferencias de primer orden, como por ejemplo

$$y[n] = 0.5y[n-1] + x[n].$$

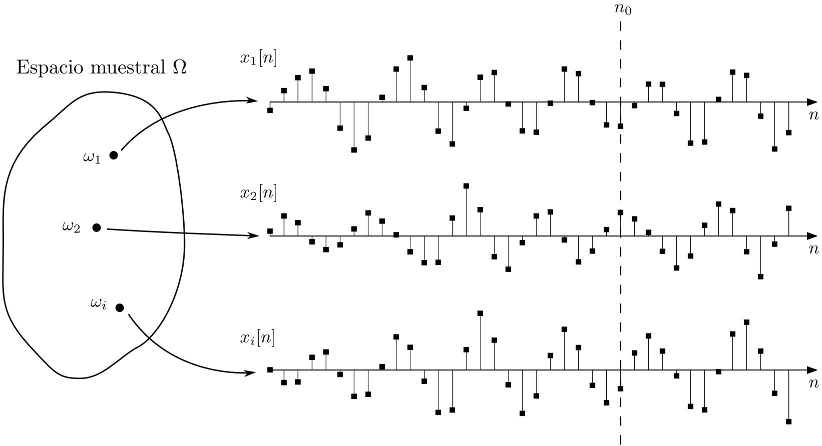
Procesos estocásticos: definiciones

Realizaciones de proceso Bernoulli y de proceso Bernoulli filtrado



Procesos estocásticos: definiciones

- Un proceso aleatorio es una correspondencia de resultados de experimentos en el espacio muestral a señales.
- A cada resultado ω_i de un experimento en Ω le corresponde una secuencia $x_i[n]$.
- Cada secuencia $x_i[n]$ se llama realización del proceso.



Procesos estocásticos: definiciones

Punto de vista alternativo

- Para un n fijo, por ejemplo $n = n_0$, el valor que toma la señal, $x[n_0]$, es una variable aleatoria en el espacio muestral Ω.
- Dicho de otra forma, para cada $\omega_i \in \Omega$ hay un valor correspondiente $x_i[n_0]$.
- Esto significa que un proceso aleatorio puede verse como una secuencia indexada de variables aleatorias,

$$\ldots,\, x[-2],\, x[-1],\, x[0],\, x[1],\, x[2], \ldots$$

- Por lo tanto, cada muestra del proceso tiene una distribución y una densidad de probabilidad,

$$F_{x[n]}(\alpha) = \Pr(x[n] \leq \alpha), \qquad\qquad f_{x[n]}(\alpha) = \frac{d}{d\alpha} F_{x[n]}(\alpha)$$

- Además, como se trata de un conjunto de variables aleatorias, para caracterizar completamente el proceso hay que establecer las distribuciones de probabilidad conjunta entre todos los conjuntos posibles de muestras, para definir como se relacionan las muestras en distintos instantes de tiempo.

Procesos estocásticos: definiciones

Promedios de procesos: definiciones

Media del proceso

$$\mu_x[n] = \mathrm{E}\{x[n]\}$$

media de cada muestra del proceso

Varianza del proceso

$$\sigma_x^2[n] = \mathrm{E}\left\{(x[n] - \mu_x[n])^2\right\}$$

varianza de cada muestra del proceso

Autocorrelación

$$r_x[k,l] = \mathrm{E}\left\{x[k]x[l])\right\}$$

Autocovarianza

$$c_x[k,l] = \mathrm{E}\left\{(x[k] - \mu_x[k])(x[l] - \mu_x[l])\right\}$$

- La autocorrelación y autocovarianza relacionan las muestras en instantes distintos de tiempo, k y l.
- Si $k = l$, la autocovarianza se reduce a la varianza.
- Expandiendo la ecuación de la autocovarianza, se ve que se realciona con la autocorrelación como

$$c_x[k,l] = r_x[k,l] - \mu_x[k]\mu_x[l].$$

- Para procesos de media nula, la autocovarianza y la autocorrelación coinciden.

Procesos estocásticos: definiciones

Ejemplo 3: sinusoide con fase aleatoria

- Se considera el proceso que consiste en una sinusoide con fase aleatoria,

$$x[n] = A\sin(n\omega_0 + \phi)$$

  - A y ω_0 son constantes.
  - ϕ tiene distribución uniforme en $[-\pi, \pi]$.

- Media del proceso: la media del proceso es

$$\mu_x[n] = \mathrm{E}\{x[n]\} = \mathrm{E}\{A\sin(n\omega_0 + \phi)\}$$

- y usando la definición de la esperanza,

$$\begin{aligned}\mu_x[n] &= \int_{-\infty}^{\infty} x[n] f_\phi(\alpha) d\alpha \\ &= \frac{A}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \sin(n\omega_0 + \alpha) d\alpha \\ &= -\frac{A}{2\pi}\cos(\omega_0 n + \alpha)\Big|_{-\pi}^{\pi}\end{aligned}$$

Se concluye que

$$\mu_x[n] = 0, \quad \forall n \qquad (3)$$

- Observación: en este caso, la media es independiente de n.

Procesos estocásticos: definiciones

Ejemplo 3: sinusoide con fase aleatoria

- Autocorrelación del proceso: la autocorrelación del proceso es

$$r_x[k,l] = \mathrm{E}\left\{x[k]x[l])\right\} = \mathrm{E}\{A\sin(\omega_0 k + \phi)A\sin(\omega_0 l + \phi)\}$$

- Teniendo en cuenta la identidad trigonométrica

$$2\sin A \sin B = \cos(A-B) - \cos(A+B)$$

la autocorrelación queda

$$r_x[k,l] = \frac{A^2}{2}\,\mathrm{E}\{\cos[\omega_0(k-l)]\} - \frac{A^2}{2}\,\mathrm{E}\{\cos[\omega_0(k+l)+2\phi]\}$$

- El primer término es constante y el segundo término es nulo (cuenta análoga en el cálculo de la media, ejercicio) y por lo tanto,

$$r_x[k,l] = \frac{A^2}{2}\cos[\omega_0(k-l)] \qquad (4)$$

- Observación: En este caso, la autocorrelación es función de una sola variable, la diferencia de tiempos $k-l$.

Procesos estocásticos: definiciones

Ejemplo: sinusoide con fase aleatoria

- Varianza del proceso: como la media del proceso es nula, la autocorrelación es igual a la covarianza,

$$c_x[k,l] = r_x[k,l] = \frac{A^2}{2}\cos[\omega_0(k-l)].$$

- La covarianza evaluada en $k = l$ es la varianza, y queda

$$\sigma_x^2[n] = \frac{A^2}{2},$$

constante par todo n.

Procesos estocásticos: estacionaridad

Estacionaridad

- En muchas aplicaciones, las propiedades estadísticas de los procesos no dependen del tiempo: el proceso es estadísticamente invariante en el tiempo o estacionario.
- Estacionaridad de primer orden: se dice de un proceso con densidad de probabilidad independiente del tiempo,

$$f_{x[n]}(\alpha) = f_{x[n+k]}(\alpha), \qquad \forall k.$$

  - Las estadísticas de primer orden (media, varianza) son independientes del tiempo,

$$\mu_x[n] = \mu_x$$
$$\sigma_x^2[n] = \sigma_x^2$$

- Estacionaridad de segundo orden: la densidad de probabilidad conjunta de dos muestras del proceso depende solo de la distancia temporal de las muestras

$$f_{x[n_1],x[n_2]}(\alpha, \beta) = f_{x[n_1+k],x[n_2+k]}(\alpha, \beta), \qquad \forall k.$$

  - Las estadísticas de segundo orden (autocorrelación, autocovarianza) son independientes del tiempo,

$$r_x[k, l] = r_x[k - l].$$

Procesos estocásticos: estacionaridad

Proceso estacionario en sentido estricto

Un proceso aleatorio $x[n]$ es estacionario en sentido estricto si es estacionario para todos los órdenes $L > 0$.

- La condición de estacionaridad en sentido estricto es muy exigente y es difícil de demostrar.
- Una definición de estacionaridad menos exigente y con aplicación práctica es la estacionaridad en sentido amplio.

Proceso estacionario en sentido amplio

Un proceso estocástico $x[n]$ es estacionario en sentido amplio (*WSS*, wide sense stationary) si:

1. La media del proceso es constante (independiente de n),

$$\mu_x[n] = m_x$$

2. La autocorrelación $r_x[k, l]$ depende solo de la diferencia temporal $k - l$.
3. La varianza del proceso es finita, $\sigma_x^2 < \infty$.

Procesos estocásticos: estacionaridad

Ejemplo 1: sinusoide de amplitud constante aleatoria

- Se considera el proceso $x[n] = A\cos(\omega_0 n)$, donde A es una VA que vale el resultado de la tirada de un dado.
- La media del proceso es

$$\begin{aligned}\mu_x[n] &= E\{A\cos(\omega_0 n)\}\\ &\overset{(a)}{=} E\{A\}\cos(\omega_0 n)\\ &\overset{(b)}{=} \mu_A\cos(\omega_0 n)\end{aligned}$$

(a) Linealidad de la esperanza, teniendo en cuenta que la única VA en la expresión es A.

(b) $E\{A\} = \mu_A = 3.5$

- La media del proceso depende de n y por lo tanto no es WSS.

Procesos estocásticos: estacionaridad

Ejemplo 2: proceso Bernoulli

- Media y varianza: por definición, las muestras de un proceso Bernoulli son IID. Por lo tanto, la media y la varianza son independientes de n y valen (ecuaciones 1 y 2)

Media	Varianza
$\mu_x[n] = \mu_x = 0$	$\sigma_x^2[n] = \sigma_x^2 = 1$

- La autocorrelación del proceso es

$$
\begin{aligned}
r_x[k,l] = E\{x[k]x[l]\} &= \begin{cases} E\{x^2[k]\}, & k = l \\ E\{x[k]\}E\{x[l]\}, & k \neq l \end{cases} \\
&= \begin{cases} \sigma_x^2 = 1, & k - l = 0 \\ \mu_x^2 = 0, & k - l \neq 0 \end{cases} \\
&= \sigma_x^2 \delta[k-l]
\end{aligned}
$$

- Como la media no depende del tiempo y la autocorrelación depende solo de la diferencia temporal $k - l$, el proceso es WSS.
- Mas aún, el proceso es estacionario en sentido estricto. Todo proceso IID es estacionario en sentido estricto.

Procesos estocásticos: estacionaridad

Ejemplo 3: sinusoide con fase aleatoria

- Previamente se calculó la media y la autocorrelación (ecuaciones 3 y 4) de la sinusoide con fase aleatoria:

Media	Autocorrelación
$\mu_x[n] = 0, \quad \forall n$	$r_x[k,l] = \dfrac{A^2}{2}\cos[\omega_0(k-l)]$

- Como la media es constante y la autocorrelación solo depende de la diferencia de tiempos $k-l$, el proceso es WSS.

Procesos estocásticos: relación entre procesos

- En aplicaciones que involucran mas de un proceso aleatorio, puede ser de interés determinar la covarianza o la correlación entre una variable aleatoria en un proceso, $x[k]$, con una variable aleatoria de otro proceso, $y[l]$.
  - Un ejemplo es determinar la relación estadística entre la entrada y la salida cuando se filtra un proceso con un SLIT.

Correlación cruzada

$$r_{xy}[k,l] = \mathrm{E}\left\{x[k]y[l])\right\}$$

Covarianza cruzada

$$c_{xy}[k,l] = \mathrm{E}\left\{(x[k]-\mu_x[k])(y[l]-\mu_y[l])\right\}$$

- Expandiendo la ecuación de la covarianza cruzada, se ve que se relaciona con la correlación cruzada como

$$c_{xy}[k,l] = r_{xy}[k,l] - \mu_x[k]\mu_y[l].$$

- Procesos no correlacionados: Se dice que dos procesos $x[n]$ y $y[n]$ no están correlacionados si la covarianza cruzada es nula,

$$c_{xy}[k,l] = 0, \qquad \forall k,\ l.$$

Procesos estocásticos: propiedades de la autocorrelación

- Simetría: la autocorrelación de un proceso WSS es simétrica conjugada en el retardo k,

$$r_x[k] = r_x^*[-k]$$

  - Si el proceso es real, la autocorrelación es simétrica: $r_x[k] = r_x[-k]$.

- Valor cuadrático medio: la autocorrelación evaluada en el retardo $k = 0$ es el valor cuadrático medio del proceso,

$$r_x[0] = \mathrm{E}\{|x[n]|^2\} \geq 0.$$

- Procesos no correlacionados: si dos procesos $x[n]$ y $y[n]$ no están correlacionados, la autocorrelación de la suma de los procesos,

$$z[n] = x[n] + y[n],$$

  es la suma de las autocorrelaciones de los procesos,

$$r_z[k, l] = r_x[k, l] + r_y[k, l].$$

Procesos estocásticos: ergodicidad

Ergodicidad

- La media y la autocorrelación son ejemplos de promedios tomados en el conjunto de todas las realizaciones posibles del proceso.
- En la práctica, no se conocen las características del proceso. En general solo se conoce una o varias realizaciones del proceso.
- Es importante poder estimar las características del proceso (media, varianza, autocorrelación) a partir de las muestras de una realización del proceso.
  - Esto sería posible si los promedios entre realizaciones coinciden con los promedios temporales en una realización.

Procesos estocásticos: ergodicidad

- Ejemplo: cálculo de la media de un proceso
  - Si se dispone de una cantidad suficiente de realizaciones, la media se podría calcular como,

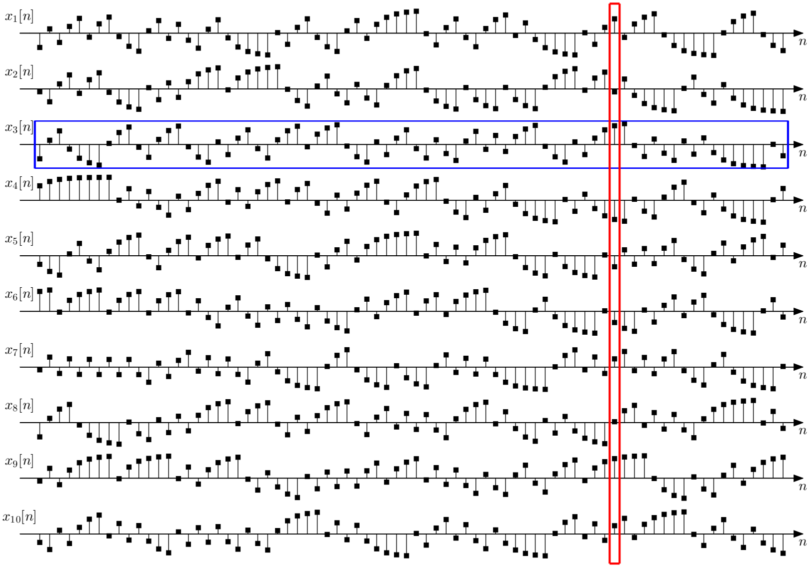
    $$\hat{\mu}_x[n] = \frac{1}{L}\sum_{i=1}^{L} x_i[n]$$

  - En caso de conocer solo una realización del proceso, se podría considerar estimar la media usando la media muestral, que consiste en el promedio de las muestras a lo largo del tiempo,

    $$\hat{\mu}_x[N] = \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} x_i[n]$$

  - Para que esto sea válido, el promedio temporal tiene que se igual al promedio entre realizaciones.
- Definición: Proceso ergódico. Un proceso es ergódico si todos los promedios tomados entre realizaciones coinciden con los promedios tomados a lo largo del tiempo en una realización.

Procesos estocásticos: ergodicidad



Procesos estocásticos: ergodicidad

- ¿Cómo se determina si un proceso es ergódico?
  - Si se conoce el proceso, habría que calcular todos los promedios temporales (media muestral, autocorrelación muestral y momentos de mayor orden) y ver si coinciden con los promedios entre realizaciones.
  - En la práctica, no se conoce el proceso y no se cuenta con un número grande de realizaciones. Por lo tanto, si se necesita usar algún promedio entre realizaciones, se asume que el proceso es ergódico y se usan promedios temporales para estimarlo.
- Una condición necesaria de ergodicidad es que el proceso sea estacionario en sentido estricto.
- Una condición necesaria de ergodicidad en media y ergodicidad en la autocorrelación (momentos de primer y segundo orden) es que el proceso sea estacionario en sentido amplio.

Procesos estocásticos: ergodicidad

Ejemplo 1: sinusoide de amplitud constante aleatoria

Proceso	Media
$x[n] = A\cos(\omega_0 n)$	$\mu_x[n] = 3.5\cos(\omega_0 n)$

- Para estudiar la ergodicidad, se comienza por averiguar si la media muestral tiende a la media entre realizaciones,

$$\begin{aligned}\hat{\mu}_x(N) &= \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} A_i \cos(\omega_0 n)\\ &\overset{(a)}{=} \frac{A_i}{N}\frac{\sin(\omega_0 N/2)}{\sin(\omega_0/2)}\cos(\omega_0(N-1)/2)\end{aligned}$$

(a) Ver Apéndice I.

- Se cumple entonces que la media de $x_i[n]$ en el tiempo es

$$E\{x_i[n]\} = \lim_{N\to\infty}\hat{\mu}_x(N) = 0$$

- Como la media entre realizaciones no coincide con la media de temporal de una realización, el proceso no es ergódico.
- Este resultado es esperable, porque no se cumple la condición necesaria de ergodicidad en media, que es que el proceso sea estacionario en sentido amplio.

Procesos estocásticos: ergodicidad

Ejemplo 3: sinusoide con fase aleatoria

Proceso	Media
$x[n] = A\sin(n\omega_0 + \phi)$	$\mu_x[n] = 0$

- Siguiendo un razonamiento análogo al caso anterior (apéndice I), se llega a que la media muestral es

$$\hat{\mu}_x(N) = \frac{A}{N}\frac{\sin(\omega_0 N/2)}{\sin(\omega_0/2)}\sin(\omega_0(N-1)/2 + \phi)$$

- Se cumple entonces que si $\omega_0 \neq 0$, la media de $x_i[n]$ en el tiempo es

$$E\{x_i[n]\} = \lim_{N\to\infty}\hat{\mu}_x(N) = 0$$

- y por lo tanto el proceso es ergódico en media.
- Para demostrar que el proceso es ergódico habría que probar lo mismo para todos los momentos de mayor orden. Por ejemplo, para el momento de segundo orden, hay que probar que

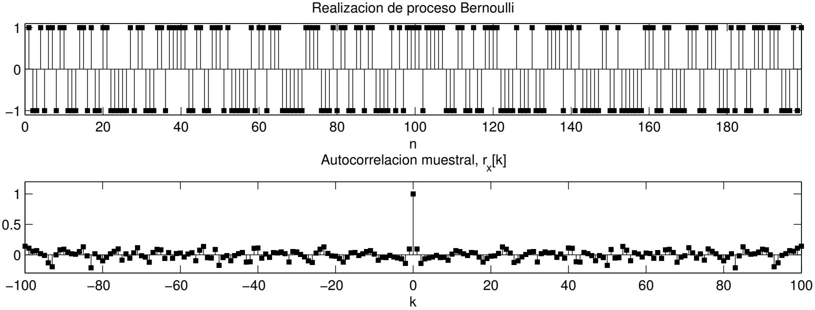
$$\hat{r}_x[k] = \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} x_i[n]x_i[n-k] \underset{N\to\infty}{\longrightarrow} r_x[k] = E\{x[n]x[n-k]\}$$

Procesos estocásticos: ergodicidad

Ejemplo 2: proceso Bernoulli

Media	Varianza	Autocorrelación
$\mu_x[n] = \mu_x = 0$	$\sigma_x^2[n] = \sigma_x^2 = 1$	$r_x[k] = \sigma_x^2 \delta[k]$

- Es fácil verificar que los promedios calculados a lo largo del tiempo usando solo una realización $x_i[n]$ coinciden.
- Ejemplo de autocorrelacióm muestral calculada a partir de una realización:



Procesos estocásticos: PSD

Densidad Espectral de Potencia

- Como en el caso de señales determinísticas, el análisis de Fourier también es importante en el estudio de procesos aleatorios.
- Como un proceso es una colección de señales, no es posible aplicar la transformada de Fourier directamente al proceso en si.
- La autocorrelación de un proceso WSS brinda la descripción en el dominio del tiempo del momento de segundo orden del proceso.
- Densidad Espectral de Potencia (*PSD*, Power Spectral Density): se define como la transformada de Fourier de la secuencia (determinística) de autocorrelación,

Densidad Espectral de Potencia

$$P_x(e^{j\omega}) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} r_x[k]e^{-j\omega k}$$

Autocorrelación

$$r_x[k] = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} P_x(e^{j\omega})e^{j\omega k}d\omega$$

- La PSD se interpreta como la descripción en frecuencia del momento de segundo orden del proceso.

Procesos estocásticos: PSD

Propiedades de la Densidad Espectral de Potencia

- Simetría:
  - La PSD de un proceso WSS es real,

$$P(e^{j\omega}) \in \mathbb{R}, \qquad \forall \omega.$$

  - La PSD de un proceso WSS real, es real y par,

$$P(e^{j\omega}) = P(e^{-j\omega}).$$

- Positividad: La PSD de un proceso WSS es no negativa,

$$P_x(e^{j\omega}) \geq 0, \qquad \forall \omega.$$

- Potencia total: La potencia de un proceso WSS de media nula es proporcional al área bajo la curva de la PSD,

$$E\{|x[n]|^2\} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} P_x(e^{j\omega}) d\omega$$

Procesos estocásticos: PSD

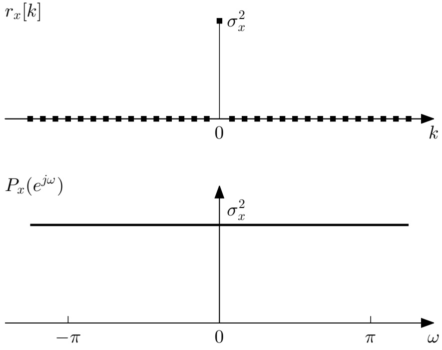
Ejemplo 2: proceso Bernoulli

- Se vio que la autocorrelación del proceso Bernoulli de media nula y varianza σ_x^2 es
$$r_x[k] = \sigma_x^2\delta[k].$$
- La PSD se obtiene aplicando la transformada de Fourier a la autocorrelación, y es

$$\begin{aligned}P_x(e^{j\omega}) &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} r_x[k]e^{j\omega k}\\ &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} \sigma_x^2\delta[k]e^{j\omega k}\end{aligned}$$

resultando en

$$P_x(e^{j\omega}) = \sigma_x^2 \qquad (5)$$



Procesos estocásticos: PSD

Ejemplo 3: sinusoide con fase aleatoria

Proceso	Autocorrelación
$x[n] = A\sin(\omega_0 n + \phi)$	$r_x[k] = \dfrac{A^2}{2}\cos\omega_0 k$

- Aplicando la transformada de Fourier a la autocorrelación $r_x[k]$, se llega a que

$$P_x(e^{j\omega}) = \frac{A^2}{2}\pi\left(\delta(\omega-\omega_0)+\delta(\omega+\omega_0)\right)$$

Procesos estocásticos: Ruido blanco

Definición: Ruido blanco

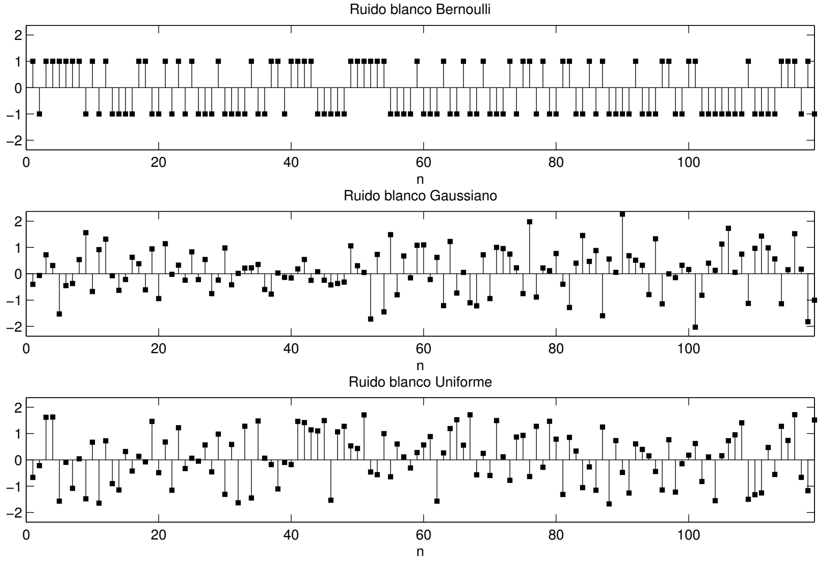
- Un proceso importante que aparece frecuentemente en aplicaciones prácticas es el ruido blanco.
  - Muchos tipos de ruido que aparecen en los sistemas de comunicación se modelan como ruido blanco.
- Un proceso $v[n]$ WSS de media nula y varianza σ_v^2 se dice blanco si la autocorrelación es nula para todo $k \neq 0$,

$$r_x[k] = \sigma_v^2 \delta[k].$$

- Implicancias:
  - Las muestras son mutuamente independientes.
  - La definición es independiente de la densidad de probabilidad particular de las muestras de proceso. Esto implica que hay infinitos tipos de procesos ruido blanco.
  - Por ejemplo, un proceso que consiste en muestras no correlacionadas cada una con distribución Gaussiana (normal) es referido como ruido blanco gaussiano (*WGN*, White Gaussian Noise).

Procesos estocásticos: Ruido blanco

Realizaciones de ruido blanco con distintas distribuciones



Procesos estocásticos: filtrado

Filtrado de un proceso aleatorio

- En ocasiones, los procesos son filtrados con sistemas LIT.
  - Por ejemplo, se podría filtrar una señal contaminada con ruido con un SLIT con el fin de atenuar el ruido.
- Es de interés determinar como cambia la estadística del proceso con el filtrado.

Planteo del problema

- Sea $x[n]$ un proceso WSS de media μ_x y autocorrelación $r_x[k]$ conocidas.
- El proceso es filtrado con un SLIT estable y con respuesta al impulso $h[n]$ real.
- Se quiere determinar la media, la autocorrelación y la densidad espectral de potencia del proceso de salida $y[n]$,

$$y[n] = x[n] * h[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k]x[n-k] \tag{6}$$

Procesos estocásticos: filtrado

Media del proceso filtrado

- La media del proceso se obtiene tomando la esperanza en la ecuación 6,

$$\begin{aligned}\mu_y[n] = E\{y[n]\} &= \mathrm{E}\left\{\sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k]x[n-k]\right\}\\ &\overset{(a)}{=} \sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k]E\left\{x[n-k]\right\}\\ &\overset{(b)}{=} \mu_x \sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k]\\ &\overset{(c)}{=} \mu_x H(e^{j0})\end{aligned}$$

(a) Linealidad de la esperanza.

(b) $x[n]$ es WSS y por lo tanto la media es constante y no depende de k.

(c) La transformada de Fourier evaluada en 0 es la suma de las muestras.

- Se concluye que la media de $y[n]$ es constante y vale la media de la entrada escalada por la respuesta en frecuencia del SLIT evaluada en $\omega = 0$:

$$\mu_y = \mu_x H(e^{j0})$$

Procesos estocásticos: filtrado

Autocorrelación del proceso filtrado

- Se puede demostrar que la autocorrelación del proceso filtrado es (ver apéndice II, pero no se pide saber la demostración)

$$r_y[k] = r_x[k] * h[k] * h[-k]. \tag{7}$$

- El proceso WSS filtrado es también WSS, ya que la autocorrelación es función de una variable.

Procesos estocásticos: filtrado

Densidad Espectral de Potencia

- La densidad de potencia es la transformada de Fourier de la autocorrelación.
- Como $r_y[k]$ es la convolución de tres secuencias, la transformada de Fourier es del producto de la transformada de Fourier de cada una de esas secuencias.
- Teniendo en cuenta que si $h[n]$ es real, se cumple que

$$h[n] \overset{\mathcal{F}}{\longleftrightarrow} H(e^{j\omega}) \qquad \Rightarrow \qquad h[-n] \overset{\mathcal{F}}{\longleftrightarrow} H^*(e^{j\omega}),$$

  la densidad espectral de potencia queda

$$P_y(e^{j\omega}) = P_x(e^{j\omega})H(e^{j\omega})H^*(e^{j\omega})$$

  resultando en

$$P_y(e^{j\omega}) = P_x(e^{j\omega})|H(e^{j\omega})|^2 \tag{8}$$

- La densidad espectral de potencia del proceso de salida es la densidad espectral de potencia del proceso de entrada multiplicada por la respuesta en magnitud al cuadrado del sistema.

Densidad Espectral de Potencia

- Es especialmente útil expresar la densidad espectral de potencia en términos de la transformada Z, ya que a partir de la transformada inversa es fácil calcular la autocorrelación.
- Teniendo en cuenta que se cumple que

$$h[n] \overset{\mathcal{Z}}{\longleftrightarrow} H(z) \qquad \Rightarrow \qquad h[-n] \overset{\mathcal{Z}}{\longleftrightarrow} H(z^{-1}),$$

  la densidad espectral de potencia queda

$$P_y(z) = P_x(z)H(z)H(z^{-1}) \tag{9}$$

Procesos estocásticos: filtrado

Ejemplo: proceso Bernoulli filtrado

- Se quiere encontrar la PSD y la autocorrelación del proceso Bernoulli $x[n]$ filtrado con el sistema dado por la siguiente ecuación en recurrencia,
$$y[n] = \frac{1}{2}y[n-1] + x[n].$$
- PSD: la PSD del proceso filtrado está dada por la ecuación 8, por lo que hay que calcular la PSD del proceso de entrada y la respuesta en frecuencia del sistema.
- La PSD del proceso Bernoulli es (ecuación 5)
$$P_x(e^{j\omega}) = \sigma_x^2 \qquad \text{con} \qquad \sigma_x^2 = 1$$
- La respuesta en frecuencia del sistema se puede obtener evaluando la función de transferencia $H(z)$ en el circulo unidad:

Función de transferencia
$$H(z) = \frac{1}{1 - \frac{1}{2}z^{-1}}$$

Respuesta en frecuencia
$$H(e^{j\omega}) = \frac{1}{1 - \frac{1}{2}e^{-j\omega}}$$

Procesos estocásticos: filtrado

Ejemplo: proceso Bernoulli filtrado

- Operando se llega a que

Módulo al cuadrado

$$|H(e^{j\omega})|^2 = \frac{1}{\frac{5}{4} - \cos\omega}$$

PSD

$$P_y(e^{j\omega}) = P_x(e^{j\omega})|H(e^{j\omega})|^2 = \frac{1}{\frac{5}{4} - \cos\omega}$$

- Autocorrelación: una forma simple de calcular al autocorrelación es primero calcular la PSD en el dominio Z y luego antitransformar.
- La transformada Z de la PSD es (ecuación 9)

$$\begin{aligned} P_y(z) = P_x(z)H(z)H(z^{-1}) &= \frac{1}{\left(1 - \frac{1}{2}z^{-1}\right)\left(1 - \frac{1}{2}z\right)} \\ &= \frac{-2z^{-1}}{\left(1 - \frac{1}{2}z^{-1}\right)\left(1 - 2z^{-1}\right)}, \end{aligned}$$

donde se tuvo en cuenta que $P_x(z) = \sigma_x^2 = 1$.

Procesos estocásticos: filtrado

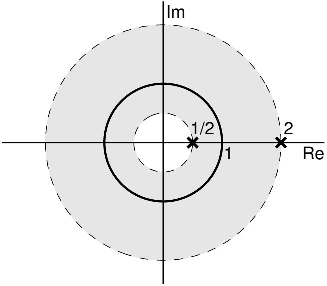
Ejemplo: proceso Bernoulli filtrado

- Descomponiendo en fracciones simples, se obtiene que

$$P_y(z) = \frac{4}{3}\left(\frac{1}{1-\frac{1}{2}z^{-1}} - \frac{1}{1-2z^{-1}}\right)$$

- Como la autocorrelación es simétrica, se trata de una secuencia hacia ambos lados, y por lo tanto la región de convergencia es

$$\frac{1}{2} < |z| < 2$$



- Antitransformando, se llega a que la autocorrelación es

$$r_y[k] = \frac{4}{3}\left[\left(\frac{1}{2}\right)^k u[k] + 2^k u[-k-1]\right] = \frac{4}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^{|k|}$$

Apéndice I

Media temporal de sinusoide de amplitud constante aleatoria

- Se considera el proceso del ejemplo I, que consiste en una sinusoide de amplitud constante aleatoria

$$x[n] = A\cos(\omega_0 n)$$

- A es una VA obtenida de una tirada de un dado, $A \in \{1,\, 2,\, 3,\, 4,\, 5,\, 6\}$

- La media temporal de una realización de amplitud A_i constante es

$$
\begin{aligned}
\hat{\mu}_x(N) &= \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} A_i\cos(\omega_0 n)\\
&= \frac{A_i}{N}\,\mathrm{Re}\left(\sum_{n=0}^{N-1} e^{j\omega_0 n}\right)\\
&= \frac{A_i}{N}\,\mathrm{Re}\left(\frac{1-e^{j\omega_0 N}}{1-e^{j\omega_0}}\right) = \frac{A_i}{N}\,\mathrm{Re}\left(\frac{e^{j\omega_0 N/2}}{e^{j\omega_0/2}}\,\frac{e^{-j\omega_0 N/2}-e^{j\omega_0 N/2}}{e^{-j\omega_0/2}-e^{j\omega_0/2}}\right)\\
&= \frac{A_i}{N}\,\frac{\sin(\omega_0 N/2)}{\sin(\omega_0/2)}\,\mathrm{Re}\left(e^{j\omega_0(N-1)/2}\right)\\
&= \frac{A_i}{N}\,\frac{\sin(\omega_0 N/2)}{\sin(\omega_0/2)}\cos(\omega_0(N-1)/2)
\end{aligned}
$$

Apéndice II

Autocorrelación de proceso filtrado

- Partiendo de la definición de la autocorrelación para $y[n]$, se tiene que

$$
\begin{aligned}
r_y[n,m] &= E\{y[n]y[m]\}\\
&= E\left\{\sum_{l=-\infty}^{\infty} h[l]x[n-l]\sum_{r=-\infty}^{\infty} h[r]x[m-r]\right\}\\
&\overset{(a)}{=} \sum_{l=-\infty}^{\infty} h[l]\sum_{r=-\infty}^{\infty} h[r]E\left\{x[n-l]x[m-r]\right\}\\
&\overset{(b)}{=} \sum_{l=-\infty}^{\infty} h[l]\sum_{r=-\infty}^{\infty} h[r]r_x[m-r-(n-l)]
\end{aligned}
$$

(a) Linealidad de la esperanza.

(b) $x[n]$ es WSS y por lo tanto la autocorrelación depende solo de la diferencia temporal,

$$m-r-(n-l)$$

- La dependencia con n y m en la última ecuación es de la forma $m-n$. Por lo tanto, $r_y[n,m]$ depende solo de la diferencia de tiempos $n-m$. Se concluye que el proceso filtrado es WSS.

Apéndice II

Autocorrelación de proceso filtrado

- Continuando con el razonamiento y teniendo en cuenta que el proceso es WSS y por lo tanto la autocorrelación es una función de una sola variable $k = m - n$,

$$\begin{aligned}
r_y[k] &= \sum_{l=-\infty}^{\infty} h[l] \sum_{r=-\infty}^{\infty} h[r] r_x[k-r+l] \\
&\overset{(a)}{=} \sum_{l=-\infty}^{\infty} h[l] \sum_{m=-\infty}^{\infty} h[m+l] r_x[k-m] \\
&= \sum_{m=-\infty}^{\infty} r_x[k-m] \sum_{l=-\infty}^{\infty} h[l]h[m+l] \\
&\overset{(b)}{=} \sum_{m=-\infty}^{\infty} r_x[k-m] r_h[m] \\
&= r_x[k] * r_h[k]
\end{aligned}$$

(a) Cambio de variable

$$m = r - l$$

y se deja expresado en función de m y l.

(b) Se definió la secuencia

$$r_h[m] = \sum_{l=-\infty}^{\infty} h[l]h[m+l]$$

Apéndice II

Autocorrelación de proceso filtrado

- Para analizar la secuencia $r_h[m]$, notar que

$$\begin{aligned}
h[m] * h[-m] &\overset{(a)}{=} \sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k]h[k-m] \\
&\overset{(b)}{=} \sum_{l=-\infty}^{\infty} h[m+l]h[l] \\
&= r_h[m]
\end{aligned}$$

(a) El hecho de que la secuencia está invertida, se traduce en cambiar el argumento de una de las secuencias en la sumatoria.

(b) Cambio de variable

$$l = k - m.$$

- Se concluye que la autocorrelación del proceso filtrado es

$$r_y[k] = r_x[k] * h[k] * h[-k]. \tag{10}$$

Referencias I

Hayes, M. H. (1996).
Statistical Digital Signal Processing and Modeling, chapter 3.
Wiley, 1st edition.