Modulación y Procesamiento de Señales

Práctico 4
Transformada Z (versión 2020)

Cada ejercicio comienza con un símbolo el cual indica su dificultad de acuerdo a la siguiente escala: ✦ básico, ★ medio, ✷ avanzado, y ✹ difícil. Además puede tener un número, como (3.14) que indica el número de ejercicio del libro *Discrete-time signal processing*, Oppenheim/Schafer, 2nd edition, o (2.2, Proakis) que indica el número de ejercicio del libro *Digital Signal Processing*, Proakis/Manolakis, 3rd edition.

✦ Ejercicio 1 (3.1)

Determinar la transformada Z de cada una de las siguientes secuencias, especificando su región de convergencia:

(a) $(1/2)^n u[n]$.
(b) $-(1/2)^n u[-n-1]$.
(c) $(1/2)^n u[-n]$.
(d) $\delta[n]$.
(e) $\delta[n-1]$.

✦ Ejercicio 2

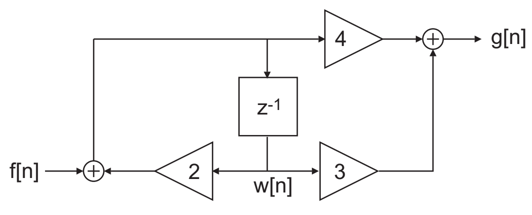
Hallar las transformadas Z inversas de las siguientes transferencias:

$$H_1(z) = \frac{z^3}{z-1} \quad H_2(z) = \frac{4z^2+8z}{z^2-5z+4}$$

en la hipótesis de sistema causal. ¿Son estables?

✦ Ejercicio 3

Hallar $g[n]$ en función de $f[n]$, y la función de transferencia del sistema de la figura.



★ Ejercicio 4

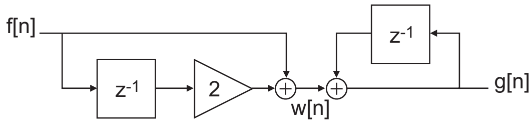
Hallar todas las transformadas Z inversas de la transferencia:

$$H(z) = \frac{z}{(z-1)^2(z-2)}$$

Discutir cuales corresponden a sistemas estables y cuales a sistemas causales.

★ Ejercicio 5

En el sistema de la figura, $f[n] = u[n+2]$. Hallar $g[n]$. Realizar el sistema empleando solamente un elemento de retardo.



✶Ejercicio 6 (3.9)

Un **SLIT** causal tiene respuesta al impulso $h[n]$, cuya transformada Z es:

$$H(z) = \frac{1 + z^{-1}}{(1 - \frac{1}{2}z^{-1})(1 + \frac{1}{4}z^{-1})}$$

(a) ¿Cuál es la región de convergencia de $H(z)$?

(b) ¿Es el sistema estable? Justifique.

(c) Hallar la transformada Z de una entrada $X(z)$ que genere la salida:

$$y[n] = -\frac{1}{3}\left(-\frac{1}{4}\right)^n u[n] - \frac{4}{3}2^n u[-n-1]$$

(d) Hallar la respuesta al impulso del sistema.

✶Ejercicio 7

Considere el sistema con la siguiente función de transferencia,

$$H(z) = \frac{1}{1 - az^{-1} + a^2z^{-2}},$$

donde a es un número real positivo.

(a) Escriba la ecuación de recurrencia que relaciona la salida $y[n]$ con la entrada $x[n]$ del sistema. ¿Se trata de un filtro FIR o IIR? Justificar la respuesta.

(b) Dibuje el diagrama de bloques del sistema.

(c) Calcule los polos y ceros de la función de transferencia[1][2]. Indicar la condición que debe cumplir el parámetro a para que el filtro sea causal y estable. En las condiciones de causalidad y estabilidad, dibuje el diagrama de polos y ceros para algún valor de a e indique la ROC de $H(z)$.

(d) Asumiendo que el parámetro a cumple la condición de estabilidad, esbozar la magnitud de la respuesta en frecuencia del sistema de forma aproximada (no es necesario calcularla). Indicar el valor de frecuencia en donde la ganancia del sistema es máxima ¿Qué tipo de filtro es en cuanto a la selectividad de frecuencias?

(e) Calcular la respuesta al impulso $h[n]$ del sistema.

✶Ejercicio 8

Se considera el sistema con la siguiente ecuación en recurrencia

$$y[n] = x[n] + \alpha x[n-1] + \beta y[n-1],$$

donde los coeficientes α y β son reales y el sistema es causal.

(a) Calcular la función de transferencia $H(z)$ del sistema indicando la región de convergencia en función de α y β.

(b) Discutir la estabilidad del sistema en función de α y β.

(c) Calcular el módulo al cuadrado de la respuesta en frecuencia del sistema, es decir, $|H(e^{j\omega})|^2$.

Se quiere que el sistema tenga ganancia cuadrática 0 en la frecuencia 0 y 4/7 en la frecuencia $\pi/3$.

(d) Encontrar los valores de α y β asegurando que el sistema sea estable. Dibujar el diagrama de polos y ceros indicando la región de convergencia.

De aquí en mas, se trabajará con los valores de α y β calculados en la parte anterior.

---

[1] *Sugerencia*: expresar los polos en magnitud y fase y usarlos en el resto del problema en esa notación.

[2] Puede ser útil la siguiente igualdad: $\arctan \pm\sqrt{3} = \pm \arctan \sqrt{3} = \pm\pi/3$

(e) Calcular la salida del sistema si la entrada es $x[n] = -(2)^n u[-n-1]$. *Sugerencia:* hacer el cálculo en el dominio z y antitransformar.

El sistema se pone en paralelo con otro sistema causal de función de transferencia

$$H_1(z) = \frac{2}{1-2z^{-1}}.$$

(f) Calcular la función de transferencia $H_p(z)$ y la ecuación en recurrencia del sistema equivalente.

✶Ejercicio 9

Considere un sistema causal dado por la siguiente transferencia:

$$H(z) = \frac{\beta z}{(z-1/2)(z+\alpha)}$$

Se pide:

(a) Encontrar la ecuación en recurrencias que relaciona la salida $y[n]$ con la entrada $x[n]$.

(b) Realizar diagrama de ceros y polos junto con la ROC de la transferencia. Estudiar estabilidad en función de los parámetros α y β. Justifique.

(c) Encontrar α y β para que la respuesta en frecuencia $H(e^{j\omega})$ valga $8/5$ en $\omega = 0$ y $8/3$ en $\omega = \pi$. ¿El sistema resulta estable? Justifique.

De ahora en adelante se utilizarán los valores de α y β calculados anteriormente.

(d) Calcular la respuesta al impulso $h[n]$ del sistema.

(e) Dibujar el diagrama de bloques del sistema en forma canónica (mínima cantidad de retardos).

✶Ejercicio 10

Considere un sistema SLIT dado por su ecuación en recurrencia:

$$y[n] = \left(\alpha + \frac{1}{3}\right) y[n-1] - \frac{\alpha}{3} y[n-2] + Gx[n-1]$$

(a) ¿El sistema es causal? Justifique.

(b) Encontrar la transferencia $H(z)$.

(c) Se quiere que la respuesta en frecuencia $H(e^{j\omega})$ valga 12 en $\omega = 0$ y -2 en $\omega = \pi$. Calcular α y G para cumplir con las especificaciones. ¿El sistema resulta estable? Justifique.

De ahora en adelante se utilizarán los valores de α y G calculados anteriormente.

(d) Realizar diagrama de ceros y polos junto con la ROC de la transferencia.

(e) Calcular la respuesta al impulso $h[n]$ del sistema.

(f) Dibujar el diagrama de bloques del sistema utilizando sólo dos retardos.

✶Ejercicio 11

El sistema S es lineal e invariante en el tiempo con respuesta al impulso $h[n]$. La expresión de la transformada Z de $h[n]$ es

$$H(z) = \frac{5(z^{-1}-1)}{(1+\frac{1}{2}z^{-1})(1-2z^{-1})}.$$

(a) Muestre las posibles regiones de convergencia (RoC) de $H(z)$ justificando cuál/es corresponde/n a un sistema estable y cuál/es corresponde/n a un sistema causal (puede ser útil realizar un diagrama de polos y ceros en el plano complejo).

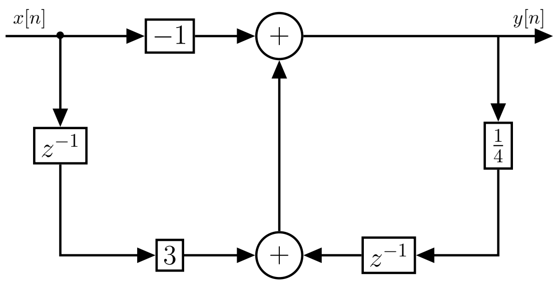


Figura 1: Diagrama de bloques del sistema S.

A partir de ahora asuma que la región de convergencia de $H(z)$ es

$$\text{RoC}: \left\{ z \in \mathbb{C} / \frac{1}{2} < |z| < 2 \right\}.$$

(b) ¿El sistema S está completamente caracterizado por su respuesta al impulso? Justifique.

(c) Halle la transformada Z de la salida, $Y(z)$, cuando la entrada es

$$x[n] = u[n-2].$$

(d) Halle la respuesta al impulso $h[n]$ del sistema.

(e) Muestre, a partir de la expresión de $H(z)$, que el sistema S admite la expresión en recurrencia:

$$y[n] = 5x[n-1] - 5x[n] + \frac{3}{2}y[n-1] + y[n-2].$$

(f) Realice un diagrama de bloques del sistema utilizando la mínima cantidad de retardos posible.

(g) Si el sistema fuera causal, se podría encontrar su respuesta al impulso, $h_{causal}[n]$, iterando con la expresión en recurrencia de la parte (e). Para ello se sustituye $x[n]$ por $\delta[n]$ y se supone que $y[n] = 0$ para $n < 0$. Obtenga los valores de $h_{causal}[n]$ para $n = 0, 1, 2$. Verifique que difieren con los valores de $h[n]$ para $n = 0, 1, 2$ de la expresión calculada en la parte (d).

✶Ejercicio 12

(a)
1. ¿Cuál es la *condición necesaria* que deben cumplir los polos de la transferencia $H(z)$ de un sistema lineal e invariante en el tiempo (SLIT) para que además sea *causal* y *estable*?
2. ¿Es esta una *condición suficiente*? Explique.

El sistema S, lineal, invariante en el tiempo, causal y estable, admite una representación en diagrama de bloques como el ilustrado en la figura 1.

(b) A partir del diagrama de bloques de la figura 1, deduzca la ecuación en recurrencia del sistema S.

(c) A partir de la ecuación en recurrencia de la parte anterior, halle la Transformada Z de su respuesta al impulso y muestre que tiene la siguiente expresión:

$$H(z) = \frac{3z^{-1}}{1 - \frac{1}{4}z^{-1}} - \frac{1}{1 - \frac{1}{4}z^{-1}}$$

(d)
1. A partir de $H(z)$, halle $h[n]$.
2. Muestre que $h[n]$ puede escribirse como

$$h[n] = 11\left(\frac{1}{4}\right)^n u[n] - 12\delta[n]$$

(e) Calcule los valores de $h[n]$ para $-2 \leq n \leq 2$ y realice un gráfico de ellos.

(f) Calcule $Y(z)$, Transformada Z de la salida, cuando a la entrada se inyecta una señal

$$x[n] = 2\delta[n] - \delta[n-1]$$

¿Cómo calcularía la salida $y[n]$?

(g) A partir de la ecuación en recurrencia, realice un diagrama de bloques del sistema S utilizando la mínima cantidad de retardos posible.