

Transformada Z

Modulación y Procesamiento de Señales

Ernesto López

Pablo Zinemanas, Mauricio Ramos

{pzinemanas, mramos}@fing.edu.uy

Centro Universitario Regional Este

Sede Rocha

Tecnólogo en Telecomunicaciones

Curso 2016

La transformada Z

Introducción

- ▶ Se vio que la transformada de Fourier es importante para la representación y el análisis de señales y sistemas en tiempo discreto.
- ▶ Con la transformada Z también se obtiene una representación de una secuencia, y las propiedades de la secuencia están vinculadas a las propiedades de su transformada Z .
- ▶ La transformada Z consiste en una generalización de la transformada de Fourier:
 - ▶ con la transformada de Fourier, una secuencia se descompone en una combinación lineal de exponenciales complejas (senos y cosenos) de amplitud constante.
 - ▶ la transformada Z descompone a una secuencia en una combinación lineal en senos y cosenos de amplitud exponencial.

Motivación

- ▶ No todas las secuencias tienen transformada de Fourier. La transformada Z se aplica a un conjunto más amplio de secuencias.
- ▶ En muchos casos, la transformada Z brinda una notación más conveniente que facilita el análisis y la manipulación de secuencias y sistemas.

Definición e interpretación

Definición

Transformada Z

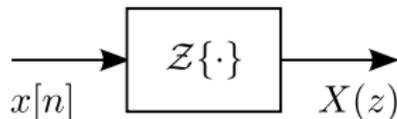
$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]z^{-n}, \quad z \in \mathbb{C}$$

Transformada de Fourier

$$X(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]e^{-j\omega n}$$

- ▶ La transformada Z puede considerarse como un operador $\mathcal{Z}\{\cdot\}$ que transforma una secuencia en una función $X(z)$,

$$\mathcal{Z}\{x[n]\} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]z^{-n} = X(z)$$



- ▶ La función $X(z)$ es una función compleja de variable z compleja,

$$X: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$$

- ▶ La correspondencia entre una secuencia y su transformada Z se indica con la siguiente notación:

$$x[n] \xleftrightarrow{\mathcal{Z}} X(z).$$

Definición e interpretación

Interpretación

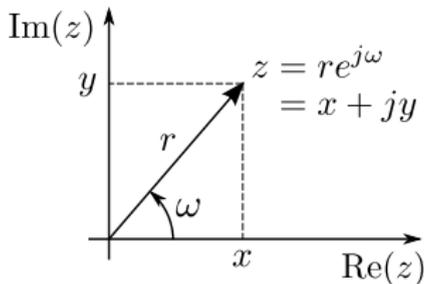
- ▶ Como la transformada Z es una función de variable compleja, es conveniente describirla e interpretarla en el plano complejo.
 - ▶ A cada punto z del plano complejo le asigna un valor complejo $X(z)$.
 - ▶ Equivalentemente, a cada punto del plano complejo le corresponden dos valores reales, la magnitud y la fase de $X(z)$.
- ▶ A su vez, la variable compleja z también puede representarse mediante dos números reales en módulo y fase o parte real y parte imaginaria:

Coordenadas polares

$$z = re^{j\omega}$$

Coordenadas rectangulares

$$z = x + jy$$



Definición e interpretación

Ejemplo

- ▶ Considérese una secuencia $x[n]$ cuya transformada Z es

$$X(z) = \frac{z}{z - a}, \quad a \in \mathbb{R}.$$

- ▶ Expresión en **coordenadas polares**:

- ▶ Se sustituye z por

$$z = re^{j\omega}.$$

- ▶ Queda una función compleja de dos variables reales,

$$\begin{aligned} X(r, \omega) &= \frac{re^{j\omega}}{re^{j\omega} - a} \\ &= \frac{r \cos \omega + jr \sin \omega}{r \cos \omega - a + jr \sin \omega} \end{aligned}$$

- ▶ que puede expresarse en magnitud y fase como

$$|X(r, \omega)| = \frac{r}{\sqrt{r^2 + a^2 - 2a \cos \omega}}, \quad \angle X(r, \omega) = \omega - \arctan \left(\frac{r \sin \omega}{r \cos \omega - a} \right)$$

Definición e interpretación

Ejemplo

- Expresión en **coordenadas rectangulares**:

- Se sustituye z por

$$z = x + jy.$$

- Queda una función compleja de dos variables reales,

$$X(x, y) = \frac{x + jy}{x - a + jy}$$

- que puede expresarse en magnitud y fase como

$$|X(x, y)| = \sqrt{\frac{x^2 + y^2}{(x - a)^2 + y^2}}, \quad \angle X(x, y) = \arctan \frac{y}{x} - \arctan \frac{y}{x - a}$$

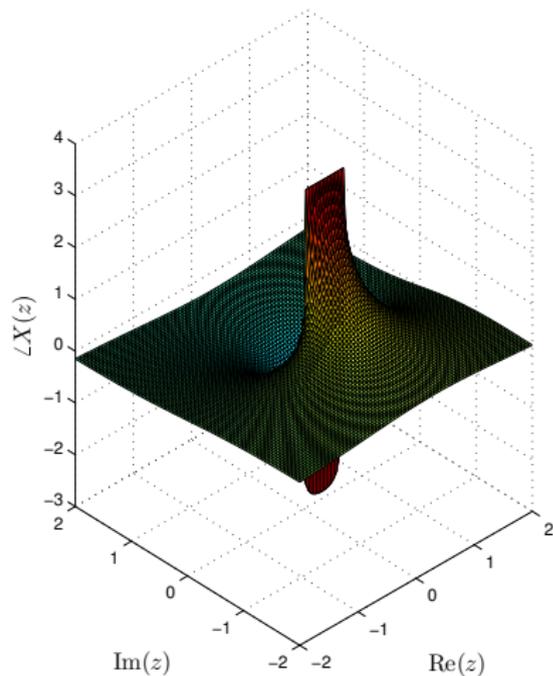
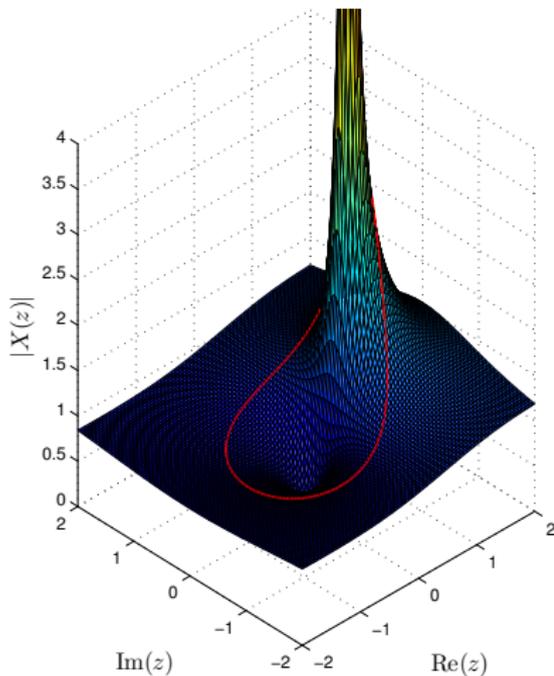
- Observación:

$$X(z) = \frac{z}{z - a} \quad \Rightarrow \quad \begin{array}{ll} X(0) = 0 & \text{(cero en 0)} \\ X(a) = \infty & \text{(polo en } a) \end{array}$$

- Los puntos del plano complejo donde $X(z)$ vale cero se llaman **ceros de $X(z)$** y los puntos donde vale infinito se llaman **polos de $X(z)$** .

Definición e interpretación

Magnitud y fase de $X(z) = z/(z-a)$, con $a = 0.7$



Definición e interpretación

Interpretación

- ▶ $X(z)$ puede considerarse como dos funciones reales, $|X(z)|$ y $\angle X(z)$, de una variable compleja z .
- ▶ Cada una de las funciones puede representarse gráficamente como una superficie, donde a cada valor del plano complejo se le asigna un valor real.

Definición e interpretación

Vínculo con la Transformada de Fourier

Transformada Z

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]z^{-n}, \quad z \in \mathbb{C}$$

Transformada de Fourier

$$X(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]e^{-j\omega n}$$

- ▶ Si se reemplaza la variable z por $e^{j\omega}$ en la transformada Z , ésta se reduce a la transformada de Fourier.
- ▶ En otras palabras, la transformada de Fourier es la transformada Z evaluada en $z = e^{j\omega}$,

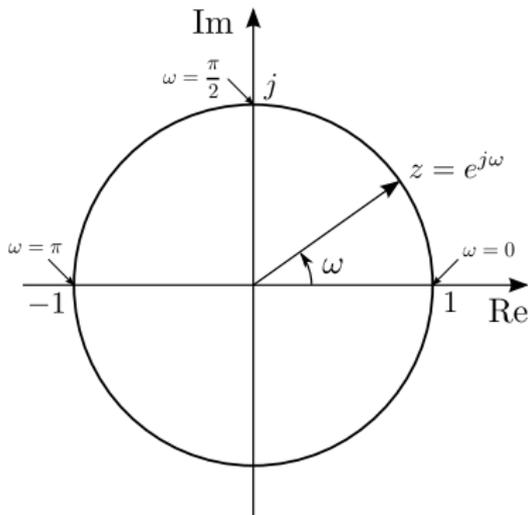
$$X(z)\Big|_{z=e^{j\omega}} = X(e^{j\omega}).$$

- ▶ Este es el motivo de emplear la notación $X(e^{j\omega})$ en lugar de $X(\omega)$ para la transformada de Fourier.
- ▶ Evaluar en $z = e^{j\omega}$ equivale a restringir a z a tener magnitud unitaria, es decir, $|z| = 1$.

Definición e interpretación

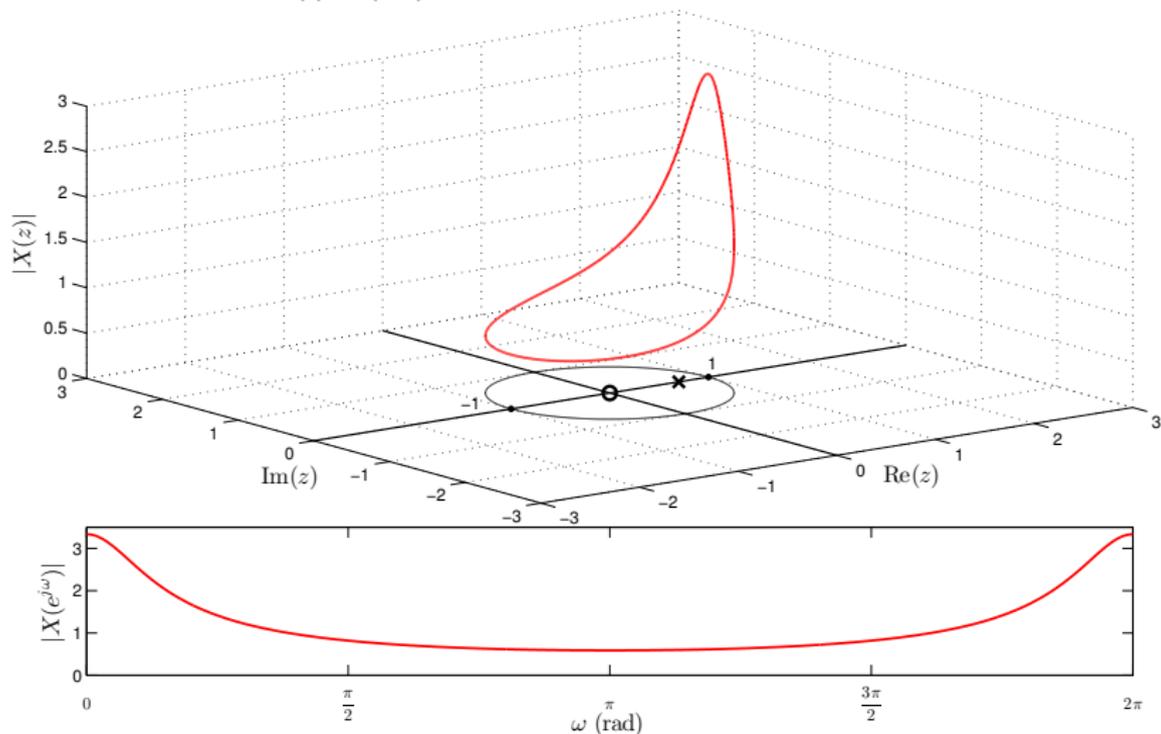
Vínculo con la Transformada de Fourier

- ▶ En el plano complejo, $z = e^{j\omega}$ determina una circunferencia centrada en el origen de radio uno al variar ω . Esta circunferencia se llama **circunferencia unidad**.
- ▶ Por lo tanto, la transformada de Fourier es la transformada Z evaluada en la circunferencia unidad.
 - ▶ ω es el ángulo entre el vector definido por un punto en la circunferencia unidad y el eje real.
 - ▶ Evaluando $X(z)$ en puntos en la circunferencia unidad comenzando en $z = 1$ ($\omega = 0$) hasta $z = -1$ ($\omega = \pi$) pasando por $z = j$ ($\omega = \pi/2$) se obtiene la transformada de Fourier en $0 \leq \omega \leq \pi$.
 - ▶ Un cambio de 2π radianes del ángulo corresponde a dar una vuelta entera en la circunferencia para volver al mismo punto, acorde con la periodicidad de la transformada de Fourier.



Definición e interpretación

$X(z) = z/(z-a)$ con $a = 0.7$ evaluada en la circunferencia unidad



La transformada de Fourier con el eje de frecuencia lineal envuelto en el círculo unidad con $\omega = 0$ en $z = 1$ y $\omega = \pi$ en $z = -1$ coincide con la transformada Z evaluada en el círculo unidad.

Convergencia de la transformada Z

Transformada Z

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]z^{-n}, \quad z \in \mathbb{C}$$

Con $z = re^{j\omega}$

$$X(re^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n](re^{j\omega})^{-n}$$

- ▶ Con z expresado en notación polar, la transformada Z queda

$$X(re^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} (x[n]r^{-n})e^{-j\omega n}$$

La ecuación indica que la transformada Z es la transformada de Fourier de la secuencia original $x[n]$ multiplicada por la secuencia r^{-n} (con r real positivo).

- ▶ Se vio previamente que la transformada de Fourier converge a una función continua de ω si la secuencia es absolutamente sumable.
- ▶ Aplicando este criterio a la ecuación anterior, se obtiene la **condición de convergencia de la transformada Z** ,

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |x[n]r^{-n}| < \infty$$

Convergencia de la transformada Z

Observaciones

- ▶ Debido a la multiplicación de la secuencia $x[n]$ por la exponencial real r^{-n} , es posible que la transformada Z converja incluso si la transformada de Fourier no converge.
- ▶ El conjunto de puntos z del plano complejo donde la transformada Z converge se llama **región de convergencia (ROC)**,

$$\text{ROC: } z \in \mathbb{C} \quad \text{tal que} \quad |X(z)| = \left| \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]z^{-n} \right| < \infty$$

Convergencia de la transformada Z

- ▶ La convergencia de $X(z)$ depende solo de $|z|$.

- ▶ Si se cumple que

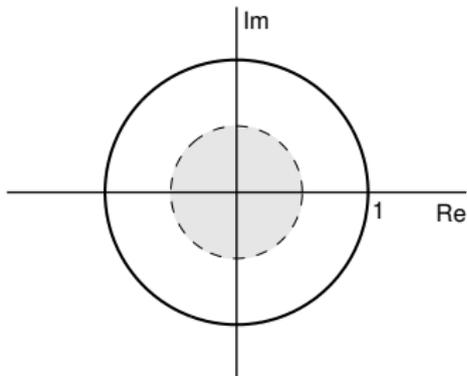
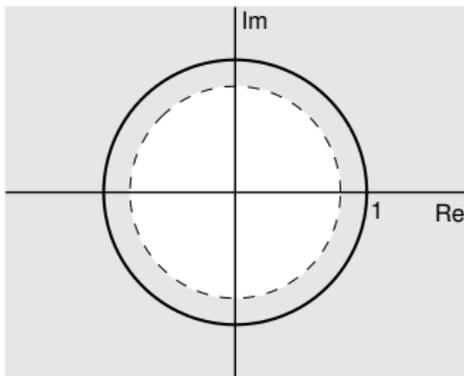
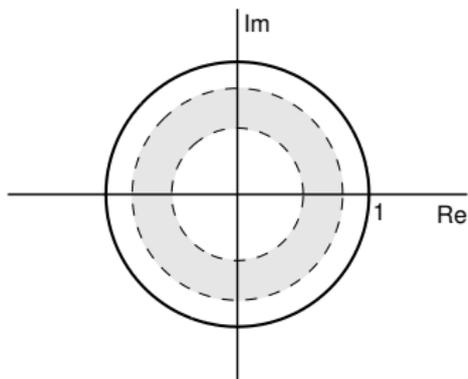
$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |x[n]| |z|^{-n} < \infty,$$

para cierto $z = z_1$, también se cumple para todo z definido en la circunferencia $|z| = |z_1|$.

- ▶ Esto significa que si $z = z_1$ pertenece a la ROC, toda la circunferencia $|z| = |z_1|$ pertenece a la ROC.
- ▶ Como consecuencia de lo anterior, **la ROC consiste en un anillo centrado en el origen**
 - ▶ la frontera exterior es una circunferencia o la ROC se extiende al infinito.
 - ▶ la frontera interior también es una circunferencia o se extiende hasta el origen.
- ▶ Si **la ROC incluye la circunferencia unidad**, significa que la transformada Z converge en $z = e^{j\omega}$ ($|z| = 1$), y por lo tanto, **la transformada de Fourier converge**.

Convergencia de la transformada Z

Ejemplos de regiones de convergencia en el plano complejo



Convergencia de la transformada Z

Transformada Z de la secuencia escalón

- ▶ La secuencia $x[n] = u[n]$ no es absolutamente sumable, y por lo tanto su transformada de Fourier no converge.
- ▶ Sin embargo, $r^{-n}u[n]$ es absolutamente sumable si $r > 1$.
- ▶ Esto significa que la transformada Z del escalón existe en la región de convergencia $|z| > 1$.

$$\begin{aligned} X(z) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} u[n]z^{-n} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} z^{-n} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} (z^{-1})^n \end{aligned}$$

$$\stackrel{(a)}{=} \begin{cases} \frac{1}{1 - z^{-1}}, & |z^{-1}| < 1 \\ \infty, & |z^{-1}| \geq 1 \end{cases}$$

(a) Serie geométrica:

$$\sum_{n=0}^{M-1} r^n = \frac{1 - r^M}{1 - r}. \quad (1)$$

En este caso

$$r = z^{-1} \quad \text{y} \quad M = \infty.$$

$$X(z) = \begin{cases} \frac{z}{z - 1}, & |z| > 1 \\ \infty, & |z| \leq 1 \end{cases}$$

Transformadas Z racionales

- ▶ La transformada Z es útil cuando la sumatoria se puede expresar en forma cerrada, es decir, como una ecuación matemática simple en función de z .
- ▶ Transformadas de particular importancia y utilidad son aquellas que consisten en una función racional dentro de la ROC, es decir,

$$X(z) = \frac{P(z)}{Q(z)},$$

donde $P(z)$ y $Q(z)$ son polinomios en z .

- ▶ **Observación:** en ese caso, las raíces del numerador son los ceros de $X(z)$ y las raíces del denominador son los polos de $X(z)$.
- ▶ En el caso de transformadas racionales, existe un vínculo fuerte entre la ubicación de los polos de $X(z)$ y la ROC.
- ▶ Los sistemas recursivos definidos por ecuaciones en diferencias tienen respuesta al impulso cuya transformada Z es racional.
 - ▶ La transformada Z es especialmente útil para analizar, diseñar, calcular la respuesta al impulso de sistemas recursivos.

Ejemplos

Secuencia exponencial hacia adelante

- ▶ Se considera la secuencia hacia adelante $x[n] = a^n u[n]$.
- ▶ La transformada Z es,

$$\begin{aligned} X(z) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]z^{-n} \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} a^n u[n]z^{-n} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} a^n z^{-n} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} (az^{-1})^n \end{aligned}$$

- ▶ Para convergencia, se requiere que

$$\sum_{n=0}^{\infty} |az^{-1}|^n < \infty.$$

- ▶ La serie geométrica converge si

$$|az^{-1}| < 1$$

- ▶ o equivalentemente, si

$$|z| > |a| \quad (\text{ROC})$$

- ▶ En la ROC, la transformada Z converge a (serie geométrica)

$$X(z) = \sum_{n=0}^{\infty} (az^{-1})^n = \frac{1}{1 - az^{-1}} = \frac{z}{z - a}, \quad |z| > |a|$$

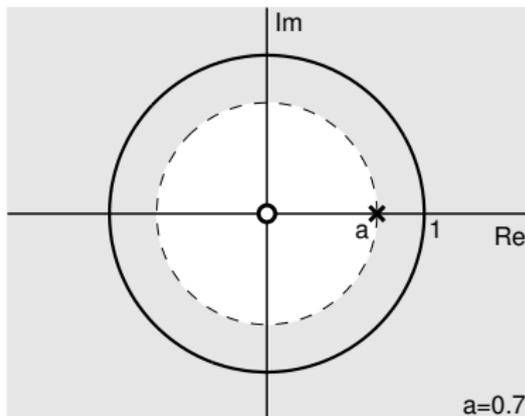
Ejemplos

Secuencia exponencial hacia adelante

$$x[n] = a^n u[n] \xleftrightarrow{Z} X(z) = \frac{z}{z-a}, \quad \text{ROC: } |z| > |a| \quad (2)$$

Ceros y Polos:

- ▶ En el caso de transformadas racionales, la transformada Z queda determinada (salvo una constante) por los polos y ceros.
- ▶ La transformada Z se puede representar mediante el **diagrama de polos y ceros**.
- ▶ La transformada Z tiene un **cero en $z = 0$** y un **polo en $z = a$** .
- ▶ La frontera exterior de la ROC se extiende al infinito. Esto es consecuencia de tratarse de la transformada Z de una secuencia hacia adelante.



Ejemplos

Secuencia exponencial hacia adelante

Transformada de Fourier:

- ▶ La circunferencia unidad está incluida en la ROC si $|a| < 1$
 - ▶ Esto implica que la transformada de Fourier de $x[n]$ converge solo si $|a| < 1$.
- ▶ En el caso en que $|a| < 1$, la transformada de Fourier de la secuencia puede obtenerse evaluando $X(z)$ en $z = e^{j\omega}$,

$$X(e^{j\omega}) = \frac{1}{1 - az^{-1}} \Big|_{z=e^{j\omega}} = \frac{1}{1 - ae^{-j\omega}} = \frac{1}{1 - a \cos(-\omega) - ja \sin(-\omega)}$$

Transformada de Fourier

$$X(e^{j\omega}) = \frac{1}{1 - a \cos \omega + ja \sin \omega}$$

Magnitud y fase

$$|X(e^{j\omega})| = \frac{1}{\sqrt{1 - 2a \cos(\omega) + a^2}}$$
$$\angle X(e^{j\omega}) = -\arctan\left(\frac{a \sin \omega}{1 - a \cos \omega}\right)$$

Ejemplos

Secuencia exponencial hacia adelante

Transformada de Fourier:

- Asumiendo que la secuencia es la respuesta al impulso de un sistema.

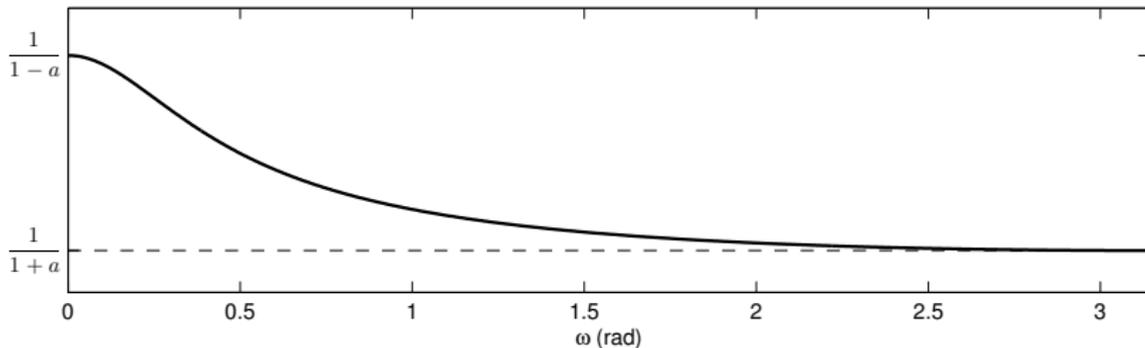
Ganancia en continua ($\omega = 0$):

$$\begin{aligned}|X(e^{j0})| &= \frac{1}{\sqrt{1 - 2a + a^2}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{(1 - a)^2}} = \frac{1}{1 - a}\end{aligned}$$

Ganancia en la frecuencia de Nyquist ($\omega = \pi$):

$$\begin{aligned}|X(e^{j\pi})| &= \frac{1}{\sqrt{1 + 2a + a^2}} \\ &= \frac{1}{1 + a}\end{aligned}$$

Magnitud de la transformada de Fourier



Ejemplos

Secuencia exponencial hacia adelante

Transformada de Fourier:

- ▶ Lo mismo se podría calcular con la transformada Z .
- ▶ $\omega = 0$ corresponde a $z = 1$ ($z = e^{j0} = 1$).
 - ▶ Por lo tanto, la ganancia en continua es la transformada Z evaluada en 1,

$$X(1) = \left. \frac{z}{z-a} \right|_{z=1} = \frac{1}{1-a}$$

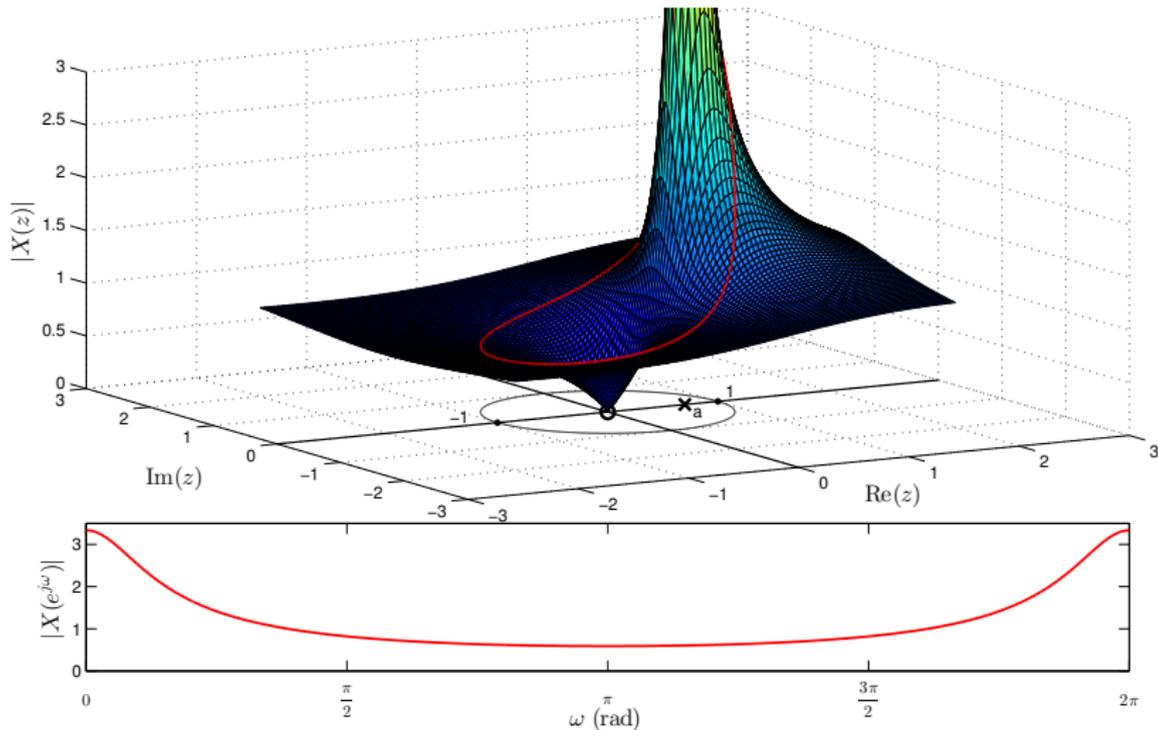
- ▶ $\omega = \pi$ corresponde a $z = -1$ ($z = e^{j\pi} = -1$).
 - ▶ Por lo tanto, la ganancia en la frecuencia de Nyquist es la transformada Z evaluada en -1,

$$X(-1) = \left. \frac{z}{z-a} \right|_{z=-1} = \frac{-1}{-1-a} = \frac{1}{1+a}$$

Ejemplos

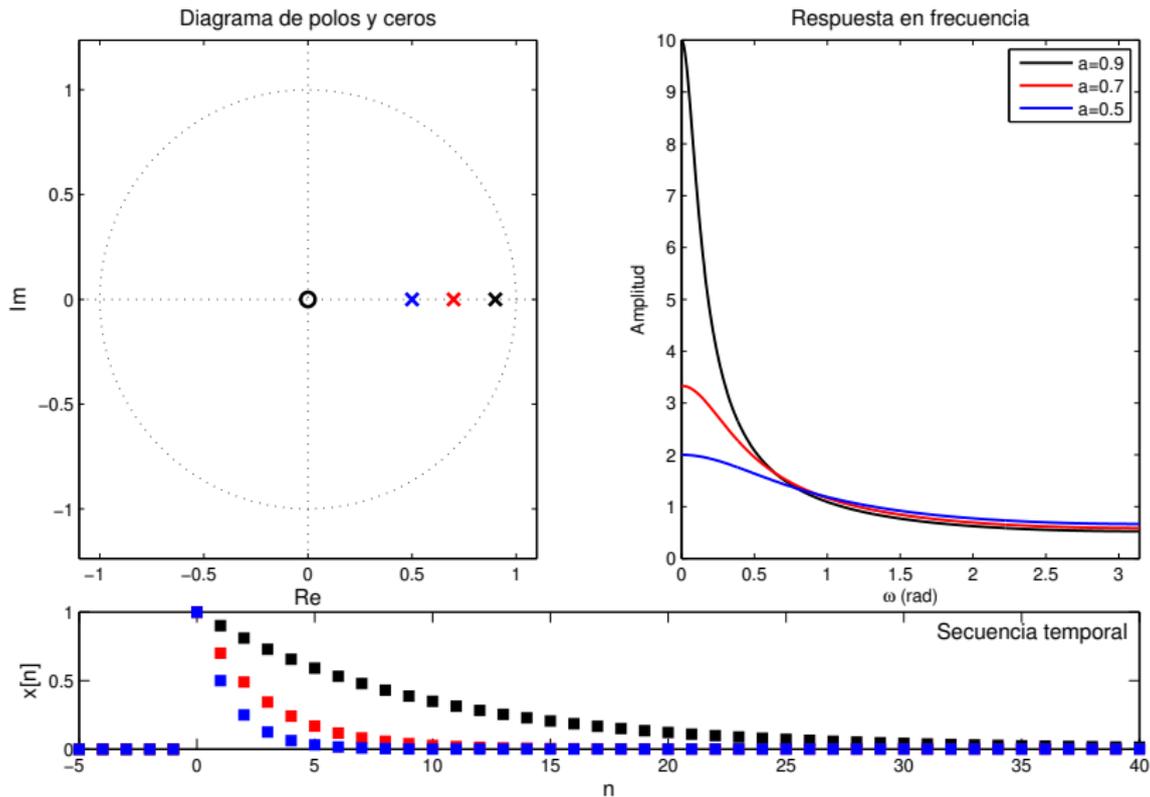
Magnitud de la transformada Z y su evaluación en la circunferencia unidad

$$X(z) = z/(z-a) \text{ con } a = 0.7$$



Ejemplos

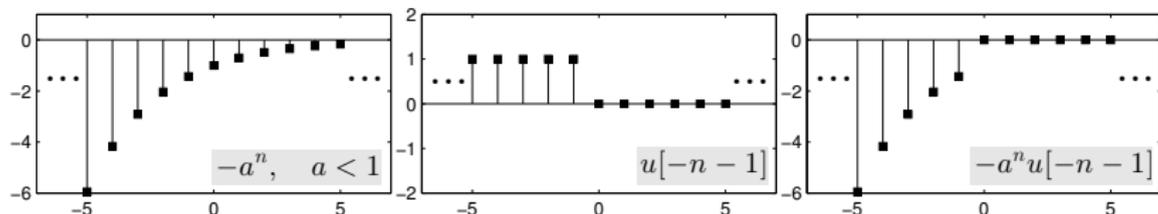
Análisis al variar el parámetro a



Ejemplos

Secuencia exponencial hacia atrás

- ▶ Se considera ahora la secuencia hacia atrás $x[n] = -a^n u[-n - 1]$.



- ▶ La transformada Z es,

$$X(z) = - \sum_{n=-\infty}^{\infty} a^n u[-n-1] z^{-n} = - \sum_{n=-\infty}^{-1} a^n z^{-n}$$

$$\stackrel{(a)}{=} - \sum_{m=1}^{\infty} a^{-m} z^m \stackrel{(b)}{=} 1 - \sum_{m=0}^{\infty} (a^{-1} z)^m$$

- (a) Cambio de variable:

$$m = -n$$

- (b) Se suma y se resta

$$(a^{-1} z)^0 = 1$$

- ▶ La sumatoria de la serie geométrica converge si

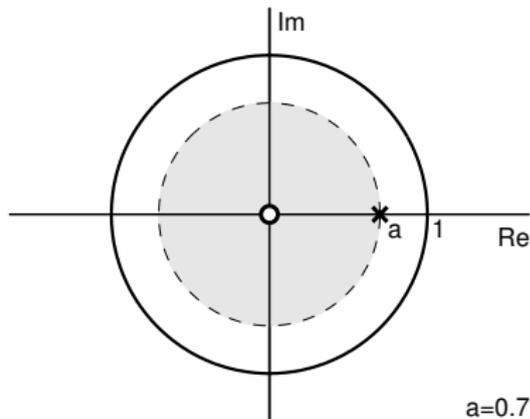
$$|a^{-1} z| < 1 \quad \Leftrightarrow \quad |z| < |a|$$

Ejemplos

Secuencia exponencial hacia atrás

- ▶ Empleando el resultado de la suma de una serie geométrica (ecuación 1) se tiene que en la región de convergencia,

$$\begin{aligned} X(z) &= 1 - \frac{1}{1 - a^{-1}z} \\ &= \frac{-a^{-1}z}{1 - a^{-1}z} \\ &= \frac{z}{z - a}, \quad |z| < |a| \end{aligned}$$



- ▶ Si $a < 1$, la secuencia crece exponencialmente con $n \rightarrow -\infty$, por lo que no es absolutamente sumable y la transformada de Fourier no converge.
- ▶ La transformada Z coincide con la transformada del ejemplo anterior. Esto enfatiza la necesidad de especificar $X(z)$ y la ROC al indicar la transformada Z de una secuencia.

Ejemplos

Secuencia exponencial hacia atrás

- ▶ Para la exponencial real hacia atrás se obtuvo que

$$x[n] = -a^n u[-n-1] \xleftrightarrow{Z} X(z) = \frac{z}{z-a}, \quad \text{ROC: } |z| < |a| \quad (3)$$

- ▶ La frontera interior de la ROC se extiende hasta el origen. Esto es consecuencia de tratarse de una secuencia hacia atrás.

Ejemplos

Suma de dos secuencias exponenciales

- Se considera una señal que es la suma de dos exponenciales reales,

$$x[n] = \left(\frac{1}{2}\right)^n u[n] + \left(-\frac{1}{3}\right)^n u[n]$$

- La transformada Z es,

$$\begin{aligned} X(z) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left\{ \left(\frac{1}{2}\right)^n u[n] + \left(-\frac{1}{3}\right)^n u[n] \right\} z^{-n} \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n u[n] z^{-n} + \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left(-\frac{1}{3}\right)^n u[n] z^{-n} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2} z^{-1}\right)^n + \sum_{n=0}^{\infty} \left(-\frac{1}{3} z^{-1}\right)^n \end{aligned}$$

Ejemplos

Suma de dos secuencias exponenciales

► Convergencia

- Para la convergencia de $X(z)$ se requiere que ambas sumas converjan, es decir, que

$$\left| \frac{1}{2}z^{-1} \right| < 1 \quad \text{y} \quad \left| -\frac{1}{3}z^{-1} \right| < 1 \quad \Leftrightarrow \quad |z| > \left| \frac{1}{2} \right| \quad \text{y} \quad |z| > \left| \frac{1}{3} \right|$$

- La ROC corresponde a la condición mas restrictiva, que es $|z| > \left| \frac{1}{2} \right|$.
 - Equivalentemente, la ROC es la intersección de las regiones de convergencia de cada sumatoria.
- Continuando con el cálculo de $X(z)$, en la ROC vale,

$$X(z) = \frac{1}{1 - \frac{1}{2}z^{-1}} + \frac{1}{1 + \frac{1}{3}z^{-1}}$$

y operando se llega a que

$$X(z) = \frac{2z \left(z - \frac{1}{12} \right)}{\left(z - \frac{1}{2} \right) \left(z + \frac{1}{3} \right)}, \quad |z| > \left| \frac{1}{2} \right|$$

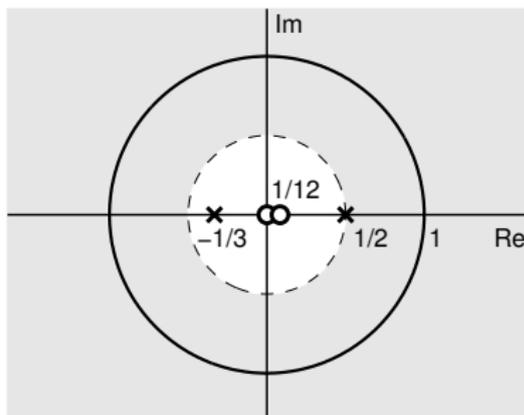
Ejemplos

Suma de dos secuencias exponenciales

► Diagrama de polos y ceros

- Ceros: $z = 0$ y $z = \frac{1}{12}$
- Polos: $z = \frac{1}{2}$ y $z = -\frac{1}{3}$

- Las secuencias son exponenciales reales decrecientes y la transformada de Fourier converge.



► Aplicación de la linealidad de la transformada Z

- En este caso, $x[n]$ se compone de la suma de dos secuencias.
- Se verá que la transformada Z es lineal.
- Por lo tanto, $X(z)$ será la suma de la transformada de cada secuencia que compone $x[n]$.
- Además, la ROC de $X(z)$ es la intersección de la ROC de cada secuencia que compone $x[n]$.

Ejemplos

Suma de dos secuencias aplicando linealidad

- Se vio que la transformada Z de una exponencial real hacia adelante es (ecuación 2)

$$a^n u[n] \xleftrightarrow{\mathcal{Z}} \frac{z}{z-a}, \quad \text{ROC: } |z| > |a|$$

- Sea la secuencia

$$x[n] = \left(\frac{1}{2}\right)^n u[n] + \left(-\frac{1}{3}\right)^n u[n]$$

- Para calcular $X(z)$, se calcula primero la transformada de cada término de $x[n]$, que por tratarse de exponenciales reales hacia adelante son

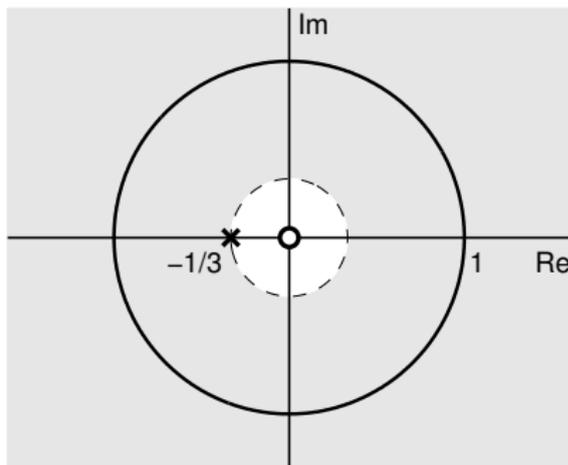
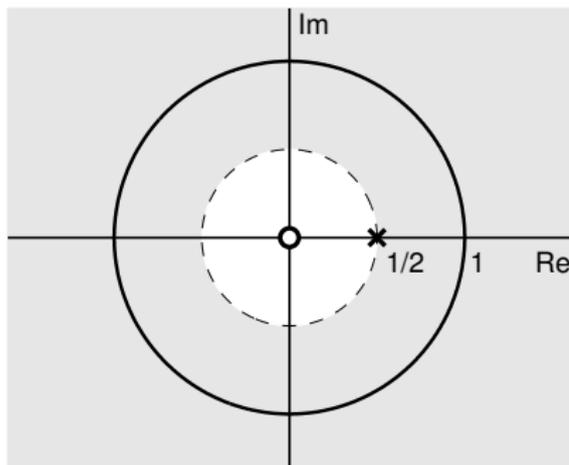
$$\begin{aligned} \left(\frac{1}{2}\right)^n u[n] &\xleftrightarrow{\mathcal{Z}} \frac{z}{z-\frac{1}{2}}, & |z| > \frac{1}{2} \\ \left(-\frac{1}{3}\right)^n u[n] &\xleftrightarrow{\mathcal{Z}} \frac{z}{z+\frac{1}{3}}, & |z| > \frac{1}{3} \end{aligned}$$

Ejemplos

Suma de dos secuencias aplicando linealidad

- Empleando la propiedad de linealidad de la transformada Z , se llega a que

$$\left(\frac{1}{2}\right)^n u[n] + \left(-\frac{1}{3}\right)^n u[n] \xleftrightarrow{Z} \frac{z}{z - \frac{1}{2}} + \frac{z}{z + \frac{1}{3}}, \quad |z| > \frac{1}{2} \quad (4)$$



Ejemplos

Secuencia exponencial hacia ambos lados

- ▶ Sea considera la secuencia

$$x[n] = \left(-\frac{1}{3}\right)^n u[n] - \left(\frac{1}{2}\right)^n u[-n - 1]$$

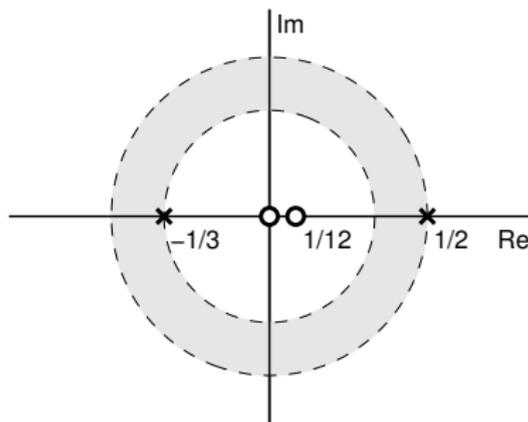
- ▶ $x[n]$ es la suma de una secuencia exponencial real hacia adelante y otra hacia atrás.
- ▶ La secuencia crece exponencialmente cuando $n \rightarrow -\infty$
- ▶ Usando los resultados generales de la transformadas de las secuencias exponenciales reales (ecuaciones 2 y 3), se tiene que

$$\begin{aligned} \left(-\frac{1}{3}\right)^n u[n] &\xleftrightarrow{\mathcal{Z}} \frac{z}{z + \frac{1}{3}}, & |z| > \frac{1}{3} \\ -\left(\frac{1}{2}\right)^n u[-n - 1] &\xleftrightarrow{\mathcal{Z}} \frac{z}{z - \frac{1}{2}}, & |z| < \frac{1}{2} \end{aligned}$$

Ejemplos

Secuencia exponencial hacia ambos lados

- ▶ Por linealidad de la transformada Z , $X(z)$ es la suma de las transformadas y la ROC es la intersección de las ROC.
- ▶ Por lo tanto, la ROC en este caso es el anillo $\frac{1}{3} < |z| < \frac{1}{2}$.



- ▶ Además, $X(z)$ en la región de convergencia es

$$X(z) = \frac{z}{z + \frac{1}{3}} + \frac{z}{z - \frac{1}{2}}, \quad \frac{1}{3} < |z| < \frac{1}{2}$$

o de forma equivalente

$$X(z) = \frac{2z \left(z - \frac{1}{12} \right)}{\left(z - \frac{1}{2} \right) \left(z + \frac{1}{3} \right)}, \quad \frac{1}{3} < |z| < \frac{1}{2}$$

Ejemplos

Secuencia exponencial hacia ambos lados

Observaciones:

- ▶ La expresión analítica de la transformada Z es idéntica a la del ejemplo anterior (ecuación 4), pero la ROC es distinta.
- ▶ La ROC no contiene a la circunferencia unidad, y por lo tanto, la transformada de Fourier no converge. Esto es acorde al hecho de que se trata de una exponencial creciente cuando $n \rightarrow -\infty$.
- ▶ El hecho de que la ROC sea un anillo es consecuencia de que la señal es hacia ambos lados.

Observaciones generales

- ▶ La transformada Z de las secuencias en todos los ejemplos anteriores es una **función racional**, es decir, un cociente de polinomios.
- ▶ El resultado es general: la transformada Z de secuencias que consisten en una combinación lineal de secuencias exponenciales es un cociente de polinomios.

Secuencias de duración finita

- ▶ Para secuencias de duración finita, la transformada Z también es una función racional:
 - ▶ Si una secuencia es no nula en el intervalo $N_1 \leq n \leq N_2$, la transformada Z es

$$X(z) = \sum_{n=N_1}^{N_2} x[n]z^{-n}$$

- ▶ Por ejemplo,

$$x[n] = 3\delta[n+1] + \delta[n] + 2\delta[n-5] \xleftrightarrow{Z} X(z) = 3z + 1 + 2z^{-5}$$

- ▶ La ROC es todo el plano complejo excepto tal vez $z = 0$ y/o $z = \infty$.

Propiedades de la región de convergencia

1. La ROC es un anillo o un disco centrado en el origen, es decir,

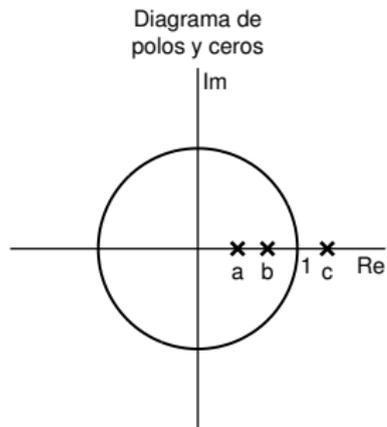
$$0 \leq r_R \leq |z| \leq r_L \leq \infty.$$

2. La transformada de Fourier converge absolutamente si y solo si la ROC incluye la circunferencia unidad.
3. La ROC no puede contener ningún polo.
4. Si $x[n]$ es una **secuencia de duración finita** la ROC es todo el plano complejo excepto tal vez $z = 0$ o $z = \infty$.
5. Si $x[n]$ es una **secuencia hacia adelante**, la ROC se extiende desde el polo de mayor magnitud hasta infinito.
6. Si $x[n]$ es una **secuencia hacia atrás**, la ROC se extiende desde el polo de menor magnitud hasta el origen del plano complejo.
7. Si $x[n]$ es una **secuencia hacia ambos lados**, la ROC consiste en un anillo, cuyas fronteras interior y exterior están acotadas por polos.

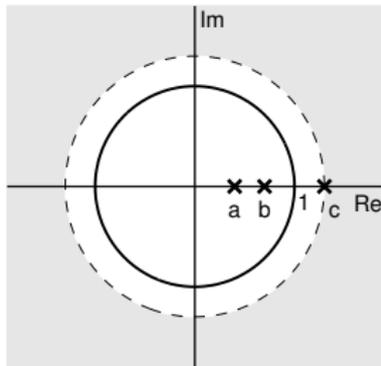
Propiedades de la región de convergencia

- ▶ Se vio que secuencias distintas pueden conducir a funciones transformada Z idénticas que únicamente difieren en la ROC.
 - ▶ Funciones transformada Z iguales implican un diagrama de polos y ceros igual.
- ▶ Las propiedades de la ROC limitan las posibles ROC asignadas a cierto patrón de polos y ceros.

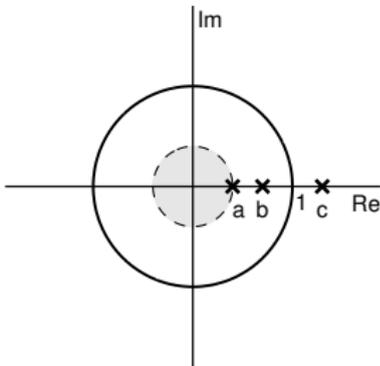
Propiedades de la región de convergencia



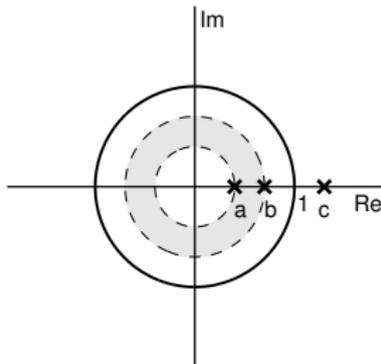
Secuencia hacia adelante



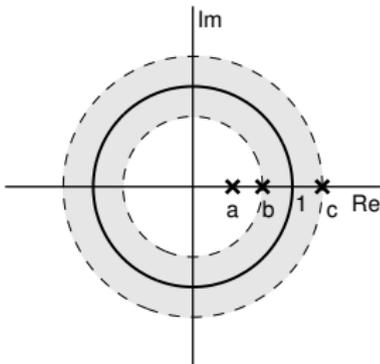
Secuencia hacia atrás



Secuencia hacia ambos lados



Secuencia hacia ambos lados



Propiedades de la región de convergencia

Causalidad y estabilidad de sistemas y vínculo con la ROC

Sea un sistema con respuesta al impulso $h[n]$ cuya transformada Z es $H(z)$.

► Sistema causal:

- Si el sistema causal, la respuesta al impulso cumple que $h[n] = 0$ para $n < 0$.
- Esto significa que $h[n]$ es una **secuencia hacia adelante**.
- La ROC de $H(z)$ abarca desde la circunferencia determinada por el polo de mayor magnitud hasta el infinito (propiedad 5).

► Sistema estable:

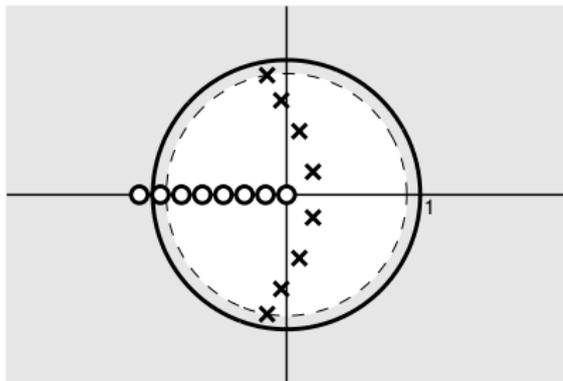
- Si el sistema es estable, la respuesta al impulso $h[n]$ es absolutamente sumable.
- Esto implica que existe la transformada de Fourier de $h[n]$ y por lo tanto, la circunferencia unidad está incluida en la ROC (propiedad 2).
- **La ROC de un sistema estable incluye la circunferencia unidad.**

► Sistema causal y estable

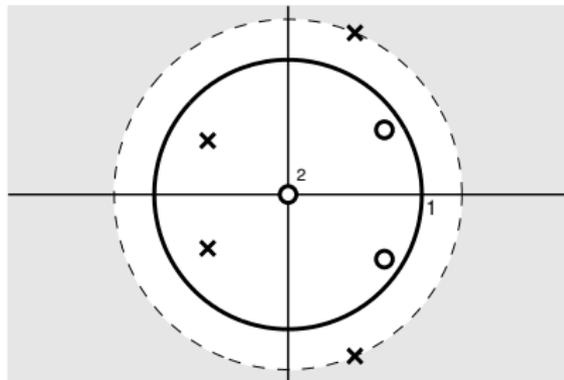
- Si el sistema es causal y estable, la ROC de $H(z)$ abarca desde la circunferencia definida por el polo de mayor magnitud hasta infinito (causalidad), e incluye el círculo unidad (estabilidad).
- Como consecuencia, **los polos de un sistema causal y estable están contenidos dentro del círculo unidad** (todos tienen módulo menor que uno).

Propiedades de la región de convergencia

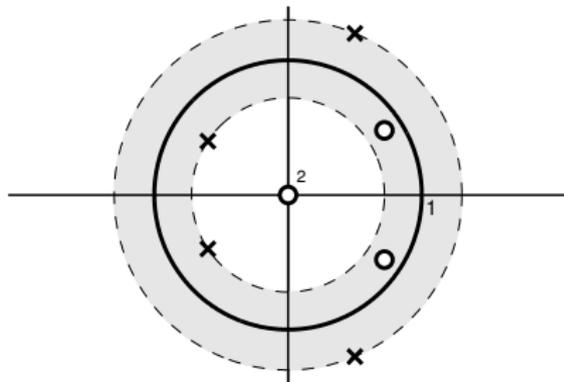
Causal y estable



Causal e inestable



No causal y estable



Inversión de la transformada Z

- ▶ Una aplicación de la transformada Z es en el análisis y diseño de sistemas en tiempo discreto.
 - ▶ Muchas veces el análisis implica calcular la transformada Z de un sistema, manipular la expresión matemática y encontrar la transformada inversa.
- ▶ La teoría de las funciones de variable compleja brinda métodos formales para invertir la transformada Z , por ejemplo, el teorema integral de Cauchy.
- ▶ Debido al tipo de secuencias y transformadas Z que se encuentran en el análisis de sistemas de tiempo discreto, son preferibles métodos menos formales.
 - ▶ Método de inspección
 - ▶ Descomposición en fracciones simples
 - ▶ Aplicación de las propiedades de la transformada Z

Inversión de la transformada Z

Método de inspección

- ▶ El método de inspección consiste en reconocer por inspección (es decir, mirando), ciertos pares de transformadas Z .

Ejemplo: transformada Z de primer orden

- ▶ Las secuencias exponenciales son muy frecuentes en la práctica, y se vio que

$$a^n u[n] \xleftrightarrow{Z} \frac{z}{z-a} = \frac{1}{1-az^{-1}}, \quad |z| > |a|$$

- ▶ Si se necesita encontrar la transformada inversa de

$$X(z) = \frac{1}{1-\frac{1}{2}z^{-1}}, \quad |z| > \frac{1}{2},$$

- ▶ por inspección es inmediato reconocer que la secuencia asociada es

$$x[n] = \left(\frac{1}{2}\right)^n u[n].$$

Inversión de la transformada Z

Ejemplo: transformada Z de primer orden

- ▶ Si la región de convergencia asociada a $X(z)$ fuera $|z| < \frac{1}{2}$, la secuencia asociada, de acuerdo a la ecuación 3, sería

$$x[n] = - \left(\frac{1}{2} \right)^n u[-n - 1].$$

Método de inspección

- ▶ Para aplicar el método de inspección es necesario una tabla de transformadas Z de secuencias básicas.

Inversión de la transformada Z

Tabla de pares de transformadas

Secuencia, $x[n]$	Transformada Z , $X(z)$	ROC
$\delta[n]$	1	$\forall z$
$\delta[n - n_0]$	z^{-n_0}	$z \neq 0 \text{ o } z \neq \infty$
$a^n u[n]$	$\frac{1}{1 - az^{-1}}$	$ z > a $
$-a^n u[-n - 1]$	$\frac{1}{1 - az^{-1}}$	$ z < a $
$nu[n]$	$\frac{z^{-1}}{(1 - z^{-1})^2}$	$ z > 1$
$-nu[-n - 1]$	$\frac{z^{-1}}{(1 - z^{-1})^2}$	$ z < 1$
$n^2 u[n]$	$\frac{z^{-1}(1 + z^{-1})}{(1 - z^{-1})^3}$	$ z > 1$
$-n^2 u[-n - 1]$	$\frac{z^{-1}(1 + z^{-1})}{(1 - z^{-1})^3}$	$ z < 1$
$\cos(\omega_0 n) u[n]$	$\frac{1 - z^{-1} \cos(\omega_0)}{1 - 2z^{-1} \cos(\omega_0) + z^{-2}}$	$ z > 1$
$\sin(\omega_0 n) u[n]$	$\frac{z^{-1} \sin(\omega_0)}{1 - 2z^{-1} \cos(\omega_0) + z^{-2}}$	$ z > 1$
$a^n \cos(\omega_0 n) u[n]$	$\frac{1 - az^{-1} \cos(\omega_0)}{1 - 2az^{-1} \cos(\omega_0) + a^2 z^{-2}}$	$ z > a $
$a^n \sin(\omega_0 n) u[n]$	$\frac{az^{-1} \sin(\omega_0)}{1 - 2az^{-1} \cos(\omega_0) + a^2 z^{-2}}$	$ z > a $

Inversión de la transformada Z

- ▶ La transformada Z de la respuesta al impulso de un sistema de tiempo discreto es una función racional.
- ▶ Una función racional puede descomponerse en la suma de términos mas simples, y cada término simple es fácil de invertir, por ejemplo, por inspección recurriendo a una tabla de transformadas.

Descomposición en fracciones simples

- ▶ Se asume que $X(z)$ se puede expresar como un cociente de polinomios en z^{-1} de la siguiente forma:

$$X(z) = \frac{\sum_{k=0}^M b_k z^{-k}}{\sum_{k=0}^N a_k z^{-k}} = \frac{b_0 + b_1 z^{-1} + \dots + b_M z^{-M}}{a_0 + a_1 z^{-1} + \dots + a_N z^{-N}} \quad (5)$$

- ▶ El numerador es de grado M en z^{-1}
- ▶ El denominador es de grado N en z^{-1}

Inversión de la transformada Z

Descomposición en fracciones simples

- ▶ Multiplicando el numerador y el denominador por z^M y por z^N , se obtiene una expresión alternativa como cociente de polinomios en z

$$X(z) = \frac{z^N \sum_{k=0}^M b_k z^{M-k}}{z^M \sum_{k=0}^N a_k z^{N-k}} = \frac{z^N b_0 z^M + b_1 z^{M-1} + \dots + b_M}{z^M a_0 z^N + a_1 z^{N-1} + \dots + a_N}$$

- ▶ Notar que:
 - ▶ Hay M ceros y N polos distintos de cero
 - ▶ Hay $M - N$ polos en cero si $M > N$ o $N - M$ ceros en cero si $N > M$.
- ▶ En cualquier caso, la ecuación 5 tiene la misma cantidad de polos y ceros.

Inversión de la transformada Z

Descomposición en fracciones simples

- ▶ El numerador y el denominador se pueden factorizar en monomios como

$$X(z) = \frac{z^N b_0 \prod_{k=1}^M (z - c_k)}{z^M a_0 \prod_{k=1}^N (z - d_k)} = \frac{b_0 \prod_{k=1}^M (1 - c_k z^{-1})}{a_0 \prod_{k=1}^N (1 - d_k z^{-1})},$$

donde c_k y d_k son las raíces no nulas del numerador y el denominador respectivamente.

- ▶ Si $M < N$ y los polos son de primer orden, $X(z)$ puede expresarse como,

$$X(z) = \sum_{k=1}^N \frac{A_k}{1 - d_k z^{-1}} \quad (6)$$

- ▶ El denominador común es el mismo que el de la ecuación original.
- ▶ Los valores A_k se pueden calcular sacando denominador común e igualando los coeficientes del polinomio obtenido con los del polinomio en el numerador de la función original.

Inversión de la transformada Z

Ejemplo: transformada Z de segundo orden

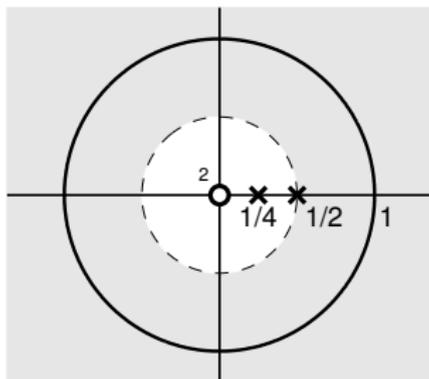
- ▶ Se considera la **secuencia causal** con transformada Z dada por
- ▶ Equivalentemente, $X(z)$ se puede expresar en polinomios en z como
- ▶ Las raíces del denominador son $\frac{1}{4}$ y $\frac{1}{2}$, y por lo tanto

$$\begin{aligned} X(z) &= \frac{z^2}{(z - \frac{1}{4})(z - \frac{1}{2})} \\ &= \frac{1}{(1 - \frac{1}{4}z^{-1})(1 - \frac{1}{2}z^{-1})} \end{aligned}$$

- ▶ Como la secuencia es hacia la derecha, la ROC es $|z| > \frac{1}{2}$.

$$X(z) = \frac{1}{1 - \frac{3}{4}z^{-1} + \frac{1}{8}z^{-2}}.$$

$$X(z) = \frac{z^2}{z^2 - \frac{3}{4}z^1 + \frac{1}{8}}$$



Inversión de la transformada Z

Ejemplo: transformada Z de segundo orden

- ▶ Aplicando la descomposición en fracciones simples (ecuación 6), $X(z)$ se puede escribir como,

$$X(z) = \frac{A_1}{1 - \frac{1}{4}z^{-1}} + \frac{A_2}{1 - \frac{1}{2}z^{-1}}$$

- ▶ Hay que calcular A_1 y A_2 . Para eso, se saca denominador común,

$$\begin{aligned} X(z) &= \frac{A_1 \left(1 - \frac{1}{2}z^{-1}\right) + A_2 \left(1 - \frac{1}{4}z^{-1}\right)}{\left(1 - \frac{1}{4}z^{-1}\right) \left(1 - \frac{1}{2}z^{-1}\right)} \\ &= \frac{A_1 + A_2 - \left(\frac{1}{2}A_1 + \frac{1}{4}A_2\right)z^{-1}}{\left(1 - \frac{1}{4}z^{-1}\right) \left(1 - \frac{1}{2}z^{-1}\right)} \end{aligned}$$

Notar que el numerador queda de primer grado (grado $N - 1$ en general) en z^{-1} .

- ▶ Como el numerador de la función original es 1, se tiene que cumplir que

$$\begin{cases} A_1 + A_2 = 1 \\ \frac{1}{2}A_1 + \frac{1}{4}A_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A_1 = -1 \\ A_2 = 2 \end{cases}$$

Inversión de la transformada Z

Ejemplo: transformada Z de segundo orden

- ▶ Por lo tanto, $X(z)$ queda

$$X(z) = \frac{-1}{1 - \frac{1}{4}z^{-1}} + \frac{2}{1 - \frac{1}{2}z^{-1}}, \quad |z| > \frac{1}{2}$$

- ▶ Por inspección y usando la propiedad de linealidad de la transformada Z , se reconoce que la secuencia es

$$x[n] = 2 \left(\frac{1}{2}\right)^n u[n] - \left(\frac{1}{4}\right)^n u[n]$$

Inversión de la transformada Z

Descomposición en fracciones simples

- ▶ Se vió que $X(z)$ puede expresarse como

$$X(z) = \sum_{k=1}^N \frac{A_k}{1 - d_k z^{-1}}$$

- ▶ Método de la “tapadita” para el cálculo de los coeficientes A_k :
 - ▶ Multiplicando ambos lados de la ecuación por $(1 - d_k z^{-1})$ y evaluando en $z = d_k$ se tiene que A_k vale

$$A_k = (1 - d_k z^{-1})X(z) \Big|_{z=d_k}$$

Inversión de la transformada Z

Ejemplo: transformada Z de segundo orden (otra vez)

- ▶ En el ejemplo, se había llegado a que

$$X(z) = \frac{1}{\left(1 - \frac{1}{4}z^{-1}\right)\left(1 - \frac{1}{2}z^{-1}\right)} = \frac{A_1}{1 - \frac{1}{4}z^{-1}} + \frac{A_2}{1 - \frac{1}{2}z^{-1}}$$

- ▶ Para calcular A_1 :

1. se multiplican ambos lados de la igualdad por $\left(1 - \frac{1}{4}z^{-1}\right)$,

$$\left(1 - \frac{1}{4}z^{-1}\right) X(z) = \frac{1}{\left(1 - \frac{1}{2}z^{-1}\right)} = A_1 + \frac{\left(1 - \frac{1}{4}z^{-1}\right) A_2}{1 - \frac{1}{2}z^{-1}}$$

2. se evalúa en $z = \frac{1}{4}$, resultando en

$$\left(1 - \frac{1}{4}z^{-1}\right) X(z) \Big|_{z=\frac{1}{4}} = \frac{1}{\left(1 - \frac{1}{2}z^{-1}\right)} \Big|_{z=\frac{1}{4}} = A_1$$

Inversión de la transformada Z

Descomposición en fracciones simples

- ▶ Se vio como un cociente de polinomios puede descomponerse en fracciones simples si el grado del numerador es menor que el grado del denominador, es decir, si $M < N$.
- ▶ En el caso en que $M \geq N$, hay que sumar además un polinomio de grado $M - N$ en z^{-1} para hacer la descomposición,

$$X(z) = \sum_{r=0}^{M-N} B_r z^{-r} + \sum_{k=1}^N \frac{A_k}{1 - d_k z^{-1}} \quad (7)$$

- ▶ De esta forma, al sacar denominador común, el grado del numerador del primer término de la ecuación anterior queda M , igual al grado del numerador de la transformada original.
- ▶ Para calcular los coeficientes A_k y B_r se procede igual que en el caso anterior
 - ▶ Se saca denominador común.
 - ▶ Se iguala el polinomio obtenido en el numerador con el polinomio del numerador en la transformada original.
 - ▶ Esto conduce a un sistema de $M + 1$ ecuaciones y $M + 1$ incógnitas.

Inversión de la transformada Z

Ejemplo: otra transformada Z de segundo orden

- ▶ Se considera la secuencia causal con transformada Z dada por

$$X(z) = \frac{1 + 2z^{-1} + z^{-2}}{1 - \frac{3}{2}z^{-1} + \frac{1}{2}z^{-2}}$$

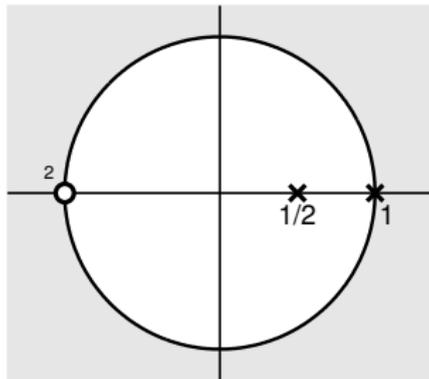
- ▶ Equivalentemente, $X(z)$ se puede expresar en polinomios en z como

$$X(z) = \frac{z^2 + 2z + 1}{z^2 - \frac{3}{2}z + \frac{1}{2}}$$

- ▶ El numerador tiene raíz doble -1 y el denominador tiene raíces $\frac{1}{2}$ y 1 , y por lo tanto

$$\begin{aligned} X(z) &= \frac{(z + 1)^2}{(z - \frac{1}{2})(z - 1)} \\ &= \frac{(1 + z^{-1})^2}{(1 - \frac{1}{2}z^{-1})(1 - z^{-1})} \end{aligned}$$

- ▶ Como la secuencia es hacia la derecha, la ROC es $|z| > 1$.



Inversión de la transformada Z

Ejemplo: otra transformada Z de segundo orden

- ▶ En este caso $M = N = 2$ y no hay polos múltiples, por lo que para descomponer en fracciones simples hay que aplicar la ecuación 7,

$$X(z) = B_0 + \frac{A_1}{1 - \frac{1}{2}z^{-1}} + \frac{A_2}{1 - z^{-1}} \quad (8)$$

- ▶ Hay que calcular B_0 , A_1 y A_2 . Para eso, se saca denominador común,

$$X(z) = \frac{B_0 (1 - \frac{1}{2}z^{-1}) (1 - z^{-1}) + A_1 (1 - z^{-1}) + A_2 (1 - \frac{1}{2}z^{-1})}{(1 - \frac{1}{2}z^{-1}) (1 - z^{-1})}$$

- ▶ Operando e igualando el numerador con el numerador de la transformada original, se tiene que

$$(B_0 + A_1 + A_2) - \left(\frac{3}{2}B_0 + A_1 + \frac{1}{2}A_2 \right) z^{-1} + \frac{1}{2}B_0 z^{-2} = 1 + 2z^{-1} + z^{-2}$$

Inversión de la transformada Z

Ejemplo: transformada Z de segundo orden

- ▶ lo que conduce a un sistema de tres ecuaciones ($M + 1$) y tres incógnitas

$$\begin{cases} B_0 + A_1 + A_2 = 1 \\ \frac{3}{2}B_0 + A_1 + \frac{1}{2}A_2 = -2 \\ \frac{1}{2}B_0 = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} B_0 = 2 \\ A_1 = -9 \\ A_2 = 8 \end{cases}$$

- ▶ Sustituyendo en la ecuación de la descomposición (ecuación 8), $X(z)$ queda

$$X(z) = 2 - \frac{9}{1 - \frac{1}{2}z^{-1}} + \frac{8}{1 - z^{-1}}, \quad |z| > 1$$

- ▶ Invirtiendo cada término, se obtiene la secuencia,

$$x[n] = 2\delta[n] - 9\left(\frac{1}{2}\right)^n u[n] + 8u[n].$$

Inversión de la transformada Z

Descomposición en fracciones simples

- ▶ En el caso en los polos son de primer orden
 - ▶ Si el grado del numerador es menor que el grado del denominador en z^{-1} , es decir, $M < N$, $X(z)$ se puede expresar en la forma de la ecuación 6.
 - ▶ Si el grado del numerador es mayor o igual que el grado del denominador, es decir $M \geq N$, $X(z)$ se puede expresar en la forma de la ecuación 7.
- ▶ Si $X(z)$ tiene polos de multiplicidad mayor que 1, existe una expresión alternativa mas complicada para descomponer $X(z)$ en fracciones simples.
 - ▶ En muchas ocasiones es posible encontrar la antitransformada usando una tabla de antitransformadas combinada con la aplicación de propiedades de la transformada Z .

Inversión de la transformada Z

Secuencias de duración finita

- ▶ En el caso de secuencias de duración finita, $X(z)$ es una función racional pero solo tiene polos en $z = 0$.
- ▶ Para ver esto, considérese la secuencia $x[n]$ no nula en $-M_1 \leq n \leq M_2$.
- ▶ La secuencia puede expresarse a partir de impulsos como

$$\begin{aligned}x[n] &= \sum_{k=-M_1}^{M_2} x[k]\delta[n-k] \\ &= x[-M_1]\delta[n+M_1] + \cdots + x[-1]\delta[n+1] + x[0] + \\ &\quad x[1]\delta[n-1] + \cdots + x[M_2]\delta[n-M_2]\end{aligned}$$

- ▶ Teniendo en cuenta que

$$\begin{aligned}\mathcal{Z}\{\delta[n-k]\} &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta[n-k]z^{-n} \\ &= z^{-k}\end{aligned}\tag{9}$$

Inversión de la transformada Z

Secuencias de duración finita

- ▶ Por la linealidad de la transformada Z , se tiene que

$$\begin{aligned} X(z) &= \sum_{k=-M_1}^{M_2} x[k]z^{-k} \\ &= x[-M_1]z^{M_1} + \dots + x[-1]z + x[0] + x[1]z^{-1} + \dots + x[M_2]z^{-M_2} \\ &= \frac{x[-M_1]z^{M_1+M_2} + \dots + x[-1]z^{M_2+1} + x[0]z^{M_2} + x[1]z^{M_2-1} + \dots + x[M_2]}{z^{M_2}} \end{aligned}$$

- ▶ $X(z)$ tiene $M_1 + M_2$ ceros distintos de cero y M_2 polos en cero.
- ▶ La ROC es todo el plano complejo excepto $z = 0$ y $z = \infty$.
- ▶ Si la secuencia fuera causal, es decir $M_1 = 0$,

$$X(z) = \frac{x[0]z^{M_2} + x[1]z^{M_2-1} + \dots + x[M_2]}{z^{M_2}} \quad \text{ROC: } \forall z, z \neq 0$$

- ▶ Si la secuencia fuera anticausal, es decir $M_2 = 0$,

$$X(z) = x[-M_1]z^{M_1} + \dots + x[-1]z + x[0] \quad \text{ROC: } \forall z, z < \infty$$

Inversión de la transformada Z

Ejemplo: secuencia de largo finito

- ▶ Se quiere encontrar la secuencia cuya transformada Z es

$$X(z) = z^2 - \frac{1}{2}z - 1 + \frac{1}{2}z^{-1}.$$

- ▶ Teniendo en cuenta que (ecuación 9)

$$\delta[n - k] \xleftrightarrow{Z} z^{-k}, \quad \begin{array}{ll} \forall z, z \neq 0 & \text{si } k > 0 \\ \forall z, z < \infty & \text{si } k < 0 \end{array}$$

- ▶ por inspección, se llega a que la secuencia es

$$x[n] = \delta[n + 2] - \frac{1}{2}\delta[n + 1] - \delta[n] + \frac{1}{2}\delta[n - 1].$$

Propiedades de la transformada Z

- ▶ Combinando propiedades de la transformada Z con técnicas de inversión, es posible calcular transformadas inversas de expresiones complejas.
- ▶ La notación usada será la siguiente:
 - ▶ $X(z)$ denota la transformada Z de $x[n]$
 - ▶ La ROC de $X(z)$ es indicada por R_x

$$x[n] \xleftrightarrow{Z} X(z), \quad \text{ROC} = R_x$$

Propiedades de la transformada Z

Linealidad

- ▶ La linealidad de la transformada se deduce directamente de la definición, e indica que

$$ax_1[n] + bx_2[n] \xleftrightarrow{Z} aX_1(z) + bX_2(z), \quad \text{ROC contiene } R_{x_1} \cap R_{x_2}$$

- ▶ Los polos de la combinación lineal consisten todos los polos de $X_1(z)$ y $X_2(z)$, excepto que puede haber cancelación de polos con ceros.
 - ▶ Por lo tanto, la ROC de la combinación lineal puede ser mayor.
- ▶ La propiedad de linealidad ya se usó previamente en en la descomposición en fracciones simples para el cómputo de la transformada inversa.
- ▶ **Demostración:** ejercicio.

Propiedades de la transformada Z

Desplazamiento temporal

- ▶ La propiedad de desplazamiento temporal indica que

$$x[n - n_0] \xleftrightarrow{Z} z^{-n_0} X(z), \quad \text{ROC} = R_x \quad \begin{array}{l} \text{(excepto por la adición} \\ \text{o eliminación de} \\ z = 0 \text{ o } z = \infty) \end{array}$$

- ▶ **Demostración:** Sea $y[n] = x[n - n_0]$. La transformada Z de $y[n]$ es

$$\begin{aligned} Y(z) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n - n_0] z^{-n} \\ &\stackrel{(a)}{=} \sum_{m=-\infty}^{\infty} x[m] z^{-(m+n_0)} && \text{(a) Cambio de variable} \\ &= z^{-n_0} \sum_{m=-\infty}^{\infty} x[m] z^{-m} && m = n - n_0 \\ &= z^{-n_0} X(z) \end{aligned}$$

Propiedades de la transformada Z

Ejemplo: aplicación del desplazamiento temporal

- ▶ Se considera la transformada Z dada por

$$X(z) = \frac{1}{z - \frac{1}{4}}, \quad |z| > \frac{1}{4}$$

- ▶ Equivalentemente, $X(z)$ se puede expresar en polinomios en z^{-1} como

$$X(z) = \frac{z^{-1}}{1 - \frac{1}{4}z^{-1}}$$

- ▶ $X(z)$ tiene solo un polo en $z = \frac{1}{4}$ y no tiene ceros. Además, el grado del numerador es igual al grado del denominador en z^{-1} , con $M = N = 1$.
- ▶ Por lo tanto, según la ecuación 7, $X(z)$ se puede expresar como

$$X(z) = B_0 + \frac{A_1}{1 - \frac{1}{4}z^{-1}} = \frac{B_0 + A_1 - \frac{1}{4}B_0z^{-1}}{1 - \frac{1}{4}z^{-1}} \Rightarrow \begin{cases} B_0 & = & -4 \\ A_1 & = & 4 \end{cases}$$

- ▶ concluyendo que

$$X(z) = -4 + \frac{4}{1 - \frac{1}{4}z^{-1}}$$

- ▶ Finalmente, mediante inspección, la secuencia es

$$x[n] = -4\delta[n] + 4 \left(\frac{1}{4}\right)^n u[n]$$

Propiedades de la transformada Z

Ejemplo: aplicación del desplazamiento temporal

- ▶ Notar que $x[n]$ puede escribirse de forma más concisa como

$$x[n] = \left(\frac{1}{4}\right)^{n-1} u[n-1].$$

Lo mismo aplicando la propiedad de desplazamiento temporal

- ▶ Partiendo de la transformada original, se ve que

$$X(z) = \frac{z^{-1}}{1 - \frac{1}{4}z^{-1}} = z^{-1} \underbrace{\left(\frac{1}{1 - \frac{1}{4}z^{-1}}\right)}_{Y(z)} = z^{-1}Y(z)$$

- ▶ Por la propiedad de desplazamiento temporal se cumple que

$$x[n] = y[n-1].$$

Propiedades de la transformada Z

Ejemplo: aplicación del desplazamiento temporal

- ▶ Además, $Y(z)$ es una transformada conocida (ecuación 2),

$$y[n] = \left(\frac{1}{4}\right)^n u[n] \xleftrightarrow{Z} Y(z) = \frac{1}{1 - \frac{1}{4}z^{-1}}, \quad \text{ROC: } |z| > \frac{1}{4}$$

- ▶ Por lo tanto, se concluye que

$$x[n] = \left(\frac{1}{4}\right)^{n-1} u[n-1].$$

Propiedades de la transformada Z

Multiplicación por una secuencia exponencial

$$z_0^n x[n] \xleftrightarrow{Z} X(z/z_0), \quad \text{ROC} = |z_0|R_x$$

► Observaciones:

- En el caso en que z_0 es real positivo, el escalado corresponde a una contracción o expansión del plano complejo en direcciones radiales.
- Si z_0 es complejo de magnitud unidad, $z_0 = e^{j\omega_0}$, el escalado corresponde a una rotación de ángulo ω_0 del plano complejo.
- Corresponde a la propiedad de **desplazamiento en frecuencia** de la transformada de Fourier. Si la transformada de Fourier existe (la ROC contiene la circunferencia unidad), se cumple que

$$e^{j\omega_0 n} x[n] \xleftrightarrow{\mathcal{F}} X(e^{j\omega}/e^{j\omega_0}) = X(e^{j(\omega-\omega_0)})$$

- **Demostración:** ejercicio.

Propiedades de la transformada Z

Ejemplo: multiplicación por secuencia exponencial

- ▶ Se quiere calcular la transformada Z de $x[n] = r^n \cos(\omega_0 n)u[n]$
- ▶ Para eso, se observa que $x[n]$ se puede expresar como

$$\begin{aligned}x[n] &= r^n \left(\frac{e^{j\omega_0 n} + e^{-j\omega_0 n}}{2} \right) u[n] \\ &= \frac{1}{2} (re^{j\omega_0})^n u[n] + \frac{1}{2} (re^{-j\omega_0})^n u[n]\end{aligned}$$

- ▶ Teniendo en cuenta que $u[n] \xrightarrow{Z} \frac{1}{1-z^{-1}}$, $|z| > 1$,
- ▶ y usando la propiedad de multiplicación exponencial, se ve que

$$(re^{j\omega_0})^n u[n] \xrightarrow{Z} \frac{1}{1 - \left(\frac{z}{re^{j\omega_0}}\right)^{-1}} = \frac{1}{1 - re^{j\omega_0} z^{-1}}, \quad |z| > r$$

$$(re^{-j\omega_0})^n u[n] \xrightarrow{Z} \frac{1}{1 - re^{-j\omega_0} z^{-1}}, \quad |z| > r$$

Propiedades de la transformada Z

Ejemplo: multiplicación por secuencia exponencial

- ▶ Usando la propiedad de linealidad se tiene que

$$X(z) = \frac{\frac{1}{2}}{1 - re^{j\omega_0}z^{-1}} + \frac{\frac{1}{2}}{1 - re^{-j\omega_0}z^{-1}}, \quad |z| > r$$

- ▶ Sacando denominador común y operando, se llega a que

$$X(z) = \frac{1 - r \cos \omega_0 z^{-1}}{1 - 2r \cos \omega_0 z^{-1} + r^2 z^{-2}}, \quad |z| > r$$

Propiedades de la transformada Z

Diferenciación de $X(z)$

- ▶ La propiedad de diferenciación indica lo siguiente:

$$nx[n] \xleftrightarrow{Z} -z \frac{dX(z)}{dz}, \quad \text{ROC} = R_x$$

Demostración

- ▶ La definición de la transformada Z es

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]z^{-n}.$$

- ▶ y la derivada,

$$\frac{dX(z)}{dz} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} (-n)x[n]z^{-n-1}$$

- ▶ Por lo tanto,

$$\begin{aligned} -z \frac{dX(z)}{dz} &= -z \sum_{n=-\infty}^{\infty} (-n)x[n]z^{-n-1} \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} nx[n]z^{-n} \\ &= \mathcal{Z}\{nx[n]\} \end{aligned}$$

Propiedades de la transformada Z

Ejemplo: polo de segundo orden

- ▶ Se quiere calcular la transformada Z de $x[n] = na^n u[n]$.
- ▶ La transformada Z es

$$\begin{aligned} X(z) &= -z \frac{d}{dz} \mathcal{Z}\{a^n u[n]\} \\ &= -z \frac{d}{dz} \left(\frac{1}{1 - az^{-1}} \right) & \frac{d}{dz} \left(\frac{1}{1 - az^{-1}} \right) &= \frac{-az^{-2}}{(1 - az^{-1})^2} \\ &= -z \frac{-az^{-2}}{(1 - az^{-1})^2} \\ &= \frac{az^{-1}}{(1 - az^{-1})^2}, \quad |z| > |a| \end{aligned}$$

- ▶ Por lo tanto,

$$na^n u[n] \xleftrightarrow{\mathcal{Z}} \frac{az^{-1}}{(1 - az^{-1})^2}, \quad |z| > |a|$$

Propiedades de la transformada Z

Conjugación de una secuencia compleja

- ▶ La transformada de una secuencia conjugada es,

$$x^*[n] \xleftrightarrow{\mathcal{Z}} X^*(z^*), \quad \text{ROC} = R_x$$

Observaciones:

- ▶ Considérese una secuencia $x[n]$ **real**. Se cumple que

$$\begin{array}{l} x[n] \xleftrightarrow{\mathcal{Z}} X(z) \\ x^*[n] \xleftrightarrow{\mathcal{Z}} X^*(z^*) \end{array} \quad \text{y} \quad x[n] = x^*[n] \quad \Rightarrow \quad X(z) = X^*(z^*)$$

- ▶ La transformada Z en el semiplano inferior es la conjugada del semiplano superior.
- ▶ Por lo tanto, una secuencia real tiene polos y ceros reales y pares complejos conjugados de polos y ceros complejos.

Propiedades de la transformada Z

Inversión temporal

$$x[-n] \xleftrightarrow{Z} X(1/z), \quad \text{ROC} = \frac{1}{R_x}$$

Convolución de secuencias

- ▶ La propiedad de convolución indica que

$$x_1[n] * x_2[n] \xleftrightarrow{Z} X_1(z)X_2(z), \quad \text{ROC contiene } R_{x_1} \cap R_{x_2}$$

Propiedades de la transformada Z

Convolución de secuencias

Demostración

- ▶ La convolución se define como

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x_1[k]x_2[n-k]$$

- ▶ La transformada Z de $y[n]$ es

$$Y(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left\{ \sum_{k=-\infty}^{\infty} x_1[k]x_2[n-k] \right\} z^{-n}$$

$$= \sum_{k=-\infty}^{\infty} x_1[k] \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_2[n-k]z^{-n}$$

$$= \sum_{k=-\infty}^{\infty} x_1[k] \mathcal{Z} \{x_2[n-k]\}$$

$$\stackrel{(a)}{=} X_2(z) \sum_{k=-\infty}^{\infty} x_1[k]z^{-k}$$

$$= X_1(z)X_2(z)$$

(a) Se cumple que

$$\mathcal{Z} \{x_2[n-k]\} = z^{-k} X_2(z)$$

Análisis de sistemas lineales invariantes en el tiempo con la transformada Z

Análisis de *SLIT* con la transformada Z

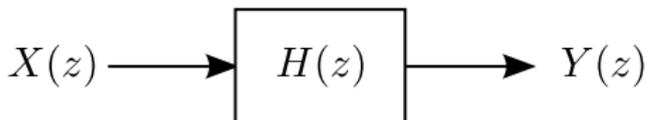
- ▶ Un *SLIT* queda completamente caracterizado con su respuesta al impulso $h[n]$, y la salida ante una entrada $x[n]$ está especificada por,

$$y[n] = h[n] * x[n].$$

- ▶ Como la transformada Z transforma la convolución en el producto, se cumple que

$$Y(z) = H(z)X(z).$$

- ▶ $H(z)$, la transformada Z de la respuesta al impulso de un *SLIT* se denomina **función de transferencia del sistema**.



$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)}.$$

- ▶ La transformada Z es particularmente útil en el análisis y diseño de sistema recursivos caracterizados por una ecuación en diferencias.

Función de transferencia de sistemas recursivos

- ▶ Los sistemas de respuesta al impulso infinita (IIR) se definen a través de una ecuación en recurrencia,

$$\sum_{k=0}^N a_k y[n-k] = \sum_{k=0}^M b_k x[n-k] \quad (10)$$

- ▶ La salida se puede determinar recursivamente como,

$$y[n] = b_0 x[n] + b_1 x[n-1] + b_2 x[n-2] + \dots + b_M x[n-M] \\ - a_1 y[n-1] - a_2 y[n-2] - \dots - a_N y[n-N]$$

- ▶ Se consideró $a_0 = 1$ (no se pierde generalidad)
- ▶ Se vio que si el sistema se encuentra inicialmente en reposo, es decir,

$$y[-1] = y[-2] = \dots = y[-N] = 0,$$

el sistema es lineal e invariante en el tiempo.

Función de transferencia de sistemas recursivos

- ▶ Se escribe la ecuación de recursión como

$$y[n] + a_1y[n - 1] + a_2y[n - 2] + \cdots + a_Ny[n - N] = \\ b_0x[n] + b_1x[n - 1] + b_2x[n - 2] + \cdots + b_Mx[n - M]$$

- ▶ Aplicando la transformada Z a ambos lados de la igualdad, y teniendo en cuenta las propiedades de linealidad y desplazamiento temporal, se tiene que

$$Y(z) + a_1z^{-1}Y(z) + a_2z^{-2}Y(z) + \cdots + a_Nz^{-N}Y(z) = \\ b_0X(z) + b_1z^{-1}X(z) + b_2z^{-2}X(z) + \cdots + b_Mz^{-M}X(z).$$

- ▶ Luego se sacan los factores comunes $Y(z)$ y $X(z)$

$$Y(z) (1 + a_1z^{-1} + a_2z^{-2} + \cdots + a_Nz^{-N}) = \\ X(z) (b_0 + b_1z^{-1} + b_2z^{-2} + \cdots + b_Mz^{-M})$$

- ▶ Dividiendo $Y(z)$ entre $X(z)$ se obtiene la función de transferencia:

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{b_0 + b_1z^{-1} + b_2z^{-2} + \cdots + b_Mz^{-M}}{1 + a_1z^{-1} + a_2z^{-2} + \cdots + a_Nz^{-N}}$$

Función de transferencia de sistemas recursivos

Observaciones

- ▶ La función de transferencia de un sistema recursivo es un cociente de polinomios en z^{-1} .
- ▶ Para funciones racionales es directo el cálculo de la respuesta al impulso $h[n]$ a partir de la transformada Z del sistema mediante la transformada inversa.
- ▶ La respuesta en frecuencia $H(e^{j\omega})$ se obtiene evaluando la función de transferencia $H(z)$ en la circunferencia unidad $z = e^{j\omega}$.
- ▶ Hay una relación directa entre la ecuación de recurrencia y la función de transferencia:
 - ▶ los coeficientes que multiplican a los términos $x[n - k]$ en la ecuación en recurrencia son los coeficientes del polinomio del denominador de la función de transferencia.
 - ▶ los coeficientes que multiplican a los términos $y[n - k]$ en la ecuación en recurrencia son los coeficientes del polinomio del numerador de la función de transferencia.

Función de transferencia de sistemas recursivos

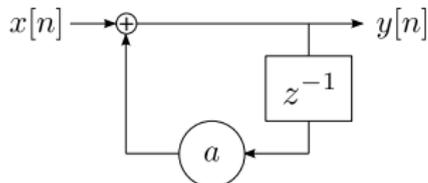
Ejemplo: sistema de primer orden

- ▶ Se considera el siguiente sistema IIR de primer orden:

Ecuación en recurrencia

$$y[n] = ay[n - 1] + x[n]$$

Diagrama de bloques



- ▶ Se vio previamente que la respuesta al impulso del sistema puede calcularse recursivamente.
- ▶ Para eso, se impone la condición inicial $y[-1] = 0$ y se establece la entrada en $x[n] = \delta[n]$.
- ▶ Resolviendo el sistema recursivamente en $n \geq 0$ se tiene que,

$$y[0] = ay[-1] + \delta[0] = 1$$

$$y[1] = ay[0] + \delta[1] = a$$

$$y[2] = ay[1] + \delta[2] = a^2$$

$$y[3] = ay[2] + \delta[3] = a^3$$

$$\vdots$$

$$y[n] = a^n, \quad \text{si } n \geq 0$$

Función de transferencia de sistemas recursivos

Ejemplo: sistema de primer orden

- ▶ Se concluye que la respuesta al impulso es $h[n] = a^n u[n]$.

Cálculo de $h[n]$ a partir de la función de transferencia

- ▶ Aplicando la transformada Z a la ecuación en recurrencia,

$$y[n] = ay[n - 1] + x[n] \qquad Y(z) = az^{-1}Y(z) + X(z)$$

- ▶ y operando, se obtiene la función de transferencia del sistema,

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{1}{1 - az^{-1}}$$

- ▶ Asumiendo que el sistema es causal, como tiene un único polo en a , la ROC es $|z| > |a|$.
- ▶ Por inspección, la transformada Z inversa es $h[n] = a^n u[n]$.
- ▶ En el caso de ecuaciones en recurrencia más complejas, en general es más fácil el cálculo de la respuesta al impulso a partir de la inversión de la función de transferencia.

Función de transferencia de sistemas recursivos

Ejemplo: sistema de segundo orden

- ▶ La función de transferencia de un sistema lineal e invariante en el tiempo es

$$H(z) = \frac{(1 + z^{-1})^2}{(1 - \frac{1}{2}z^{-1})(1 + \frac{3}{4}z^{-1})}.$$

Se quiere encontrar la ecuación en recurrencia del sistema y la respuesta al impulso $h[n]$.

Ecuación en recurrencia

- ▶ Expandiendo el numerador y el denominador para obtener un cociente de polinomios, se llega a que

$$H(z) = \frac{1 + 2z^{-1} + z^{-2}}{1 + \frac{1}{4}z^{-1} - \frac{3}{8}z^{-2}} = \frac{Y(z)}{X(z)} \quad (11)$$

- ▶ y despejando, se obtiene

$$\left(1 + \frac{1}{4}z^{-1} - \frac{3}{8}z^{-2}\right) Y(z) = (1 + 2z^{-1} + z^{-2}) X(z)$$

Función de transferencia de sistemas recursivos

Ejemplo: sistema de segundo orden

- ▶ Luego

$$Y(z) + \frac{1}{4}z^{-1}Y(z) - \frac{3}{8}z^{-2}Y(z) = X(z) + 2z^{-1}X(z) + z^{-2}X(z)$$

- ▶ Finalmente, aplicando la propiedad de desplazamiento temporal de la transformada Z , se llega a que,

$$y[n] + \frac{1}{4}y[n-1] - \frac{3}{8}y[n-2] = x[n] + 2x[n-1] + x[n-2]$$

Respuesta al impulso

- ▶ Para calcular la respuesta al impulso, hay que calcular la transformada inversa de $H(z)$.
- ▶ Para eso, se puede descomponer $H(z)$ en fracciones simples.
 - ▶ $H(z)$ tiene el grado del denominador igual al grado del denominador en z^{-1} . Concretamente, en este caso $N = M = 2$.

Función de transferencia de sistemas recursivos

Ejemplo: sistema de segundo orden

Respuesta al impulso

- ▶ Por lo tanto, aplicando la ecuación 7, $H(z)$ puede expresarse como

$$H(z) = B_0 + \frac{A_1}{1 - \frac{1}{2}z^{-1}} + \frac{A_2}{1 + \frac{3}{4}z^{-1}}$$

- ▶ Sacando denominador común e igualando el numerador al numerador de la transformada original (ecuación 11), se obtienen B_0 , A_1 y A_2 ,

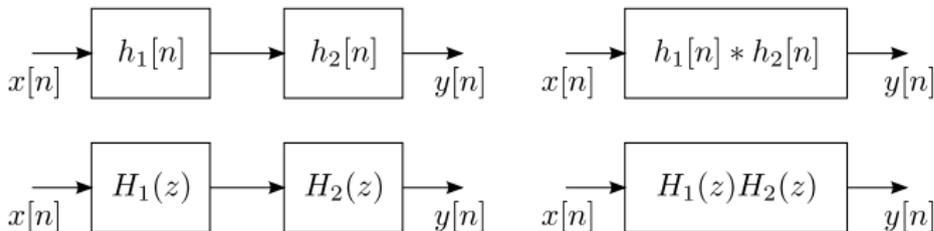
$$H(z) = -\frac{8}{3} + \frac{\frac{18}{5}}{1 - \frac{1}{2}z^{-1}} + \frac{\frac{1}{15}}{1 + \frac{3}{4}z^{-1}}$$

- ▶ y por inspección se llega a que,

$$h[n] = -\frac{8}{3}\delta[n] + \frac{18}{5}\left(\frac{1}{2}\right)^n u[n] + \frac{1}{15}\left(-\frac{3}{4}\right)^n u[n].$$

Representación en diagrama de bloques

- ▶ La respuesta al impulso de sistemas *LIT* en serie es la convolución de las respuestas al impulso de cada sistema en la serie.
- ▶ La transformada Z transforma la convolución en producto. Por lo tanto, la función de transferencia de sistemas en serie es el producto de las funciones de transferencia de cada sistema en la serie.



- ▶ Considérese un sistema recursivo genérico,

Ecuación en recurrencia

Función de transferencia

$$y[n] - \sum_{k=1}^N a_k y[n-k] = \sum_{k=0}^M b_k x[n-k]$$

$$H(z) = \frac{\sum_{k=0}^M b_k z^{-k}}{1 - \sum_{k=1}^N a_k z^{-k}}$$

(Por conveniencia, se cambió la forma de la ecuación 10)

Representación en diagrama de bloques

- ▶ La función de transferencia $H(z)$ se puede escribir como

$$H(z) = \underbrace{\left(\sum_{k=0}^M b_k z^{-k} \right)}_{H_1(z)} \underbrace{\left(\frac{1}{1 - \sum_{k=1}^N a_k z^{-k}} \right)}_{H_2(z)} = H_1(z)H_2(z)$$

- ▶ Esto indica que el sistema puede considerarse como la cascada de dos sistemas con funciones de transferencia $H_1(z)$ y $H_2(z)$.

Representación en diagrama de bloques

- ▶ Considerando que el sistema $H_1(z)$ produce la salida $v[n]$ con la entrada $x[n]$, se cumple que,

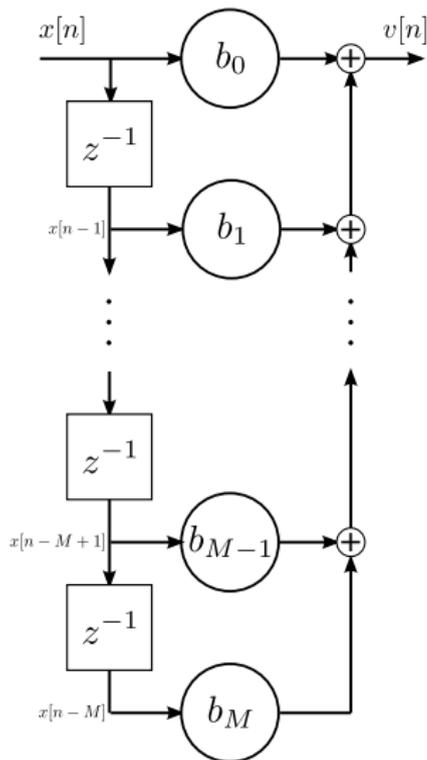
$$H_1(z) = \sum_{k=0}^M b_k z^{-k} = \frac{V(z)}{X(z)}$$

- ▶ y por lo tanto,

$$V(z) = \sum_{k=0}^M b_k z^{-k} X(z)$$

- ▶ Antitransformando, se obtiene la ecuación en recurrencia,

$$v[n] = \sum_{k=0}^M b_k x[n-k] = b_0 x[n] + b_1 x[n-1] + \dots + b_M x[n-M].$$



Representación en diagrama de bloques

- ▶ Considerando que el sistema $H_2(z)$ produce la salida $y[n]$ con la entrada $v[n]$, se tiene que,

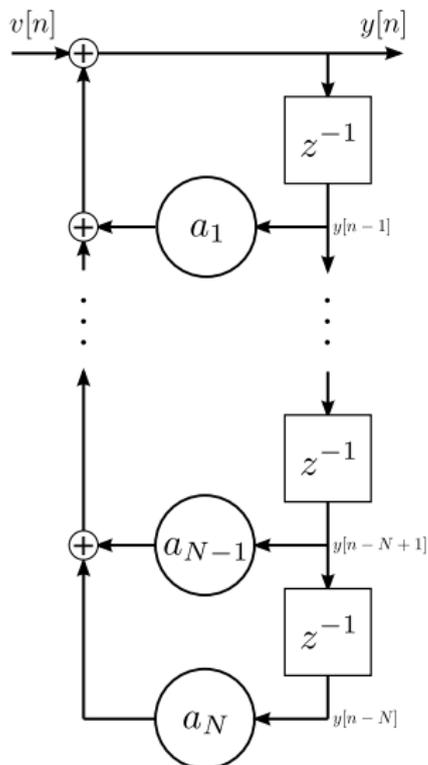
$$H_2(z) = \frac{1}{1 - \sum_{k=1}^N a_k z^{-k}} = \frac{Y(z)}{V(z)}$$

- ▶ y por lo tanto,

$$Y(z) - \sum_{k=1}^N a_k z^{-k} Y(z) = V(z)$$

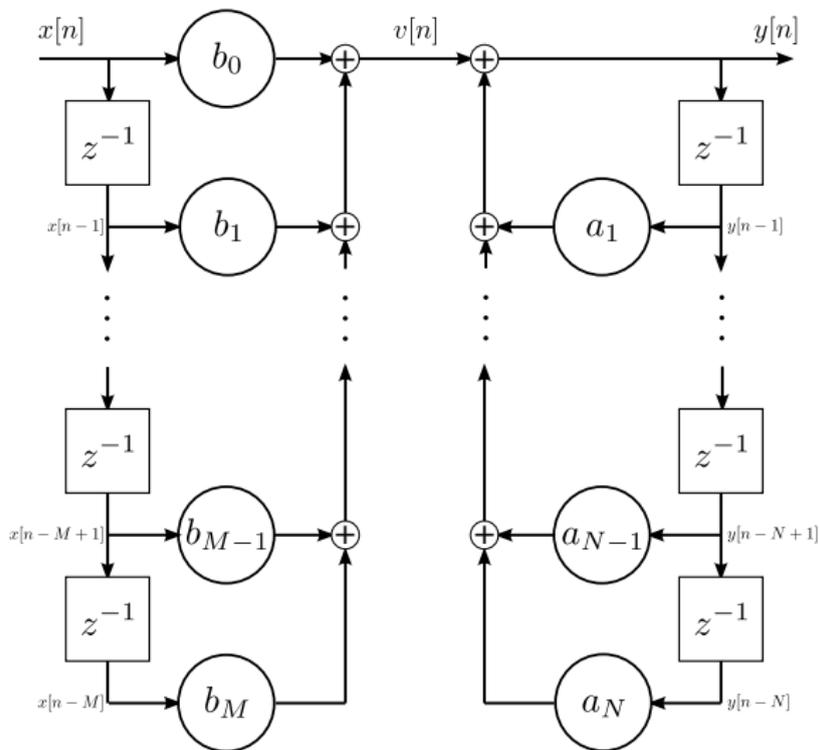
- ▶ Antitransformando, se obtiene la ecuación en recurrencia,

$$y[n] = \sum_{k=1}^N a_k y[n-k] + v[n] = a_1 y[n-1] + a_2 y[n-2] + \dots + a_N y[n-N] + v[n]$$



Representación en diagrama de bloques

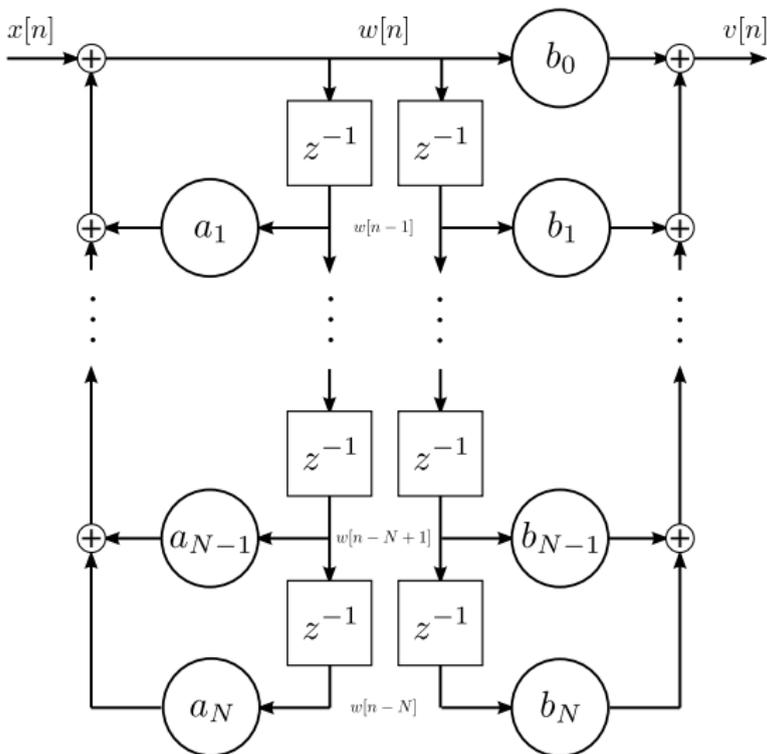
- El sistema completo consiste en ambos sistemas en cascada. El diagrama de bloques queda



Representación en diagrama de bloques

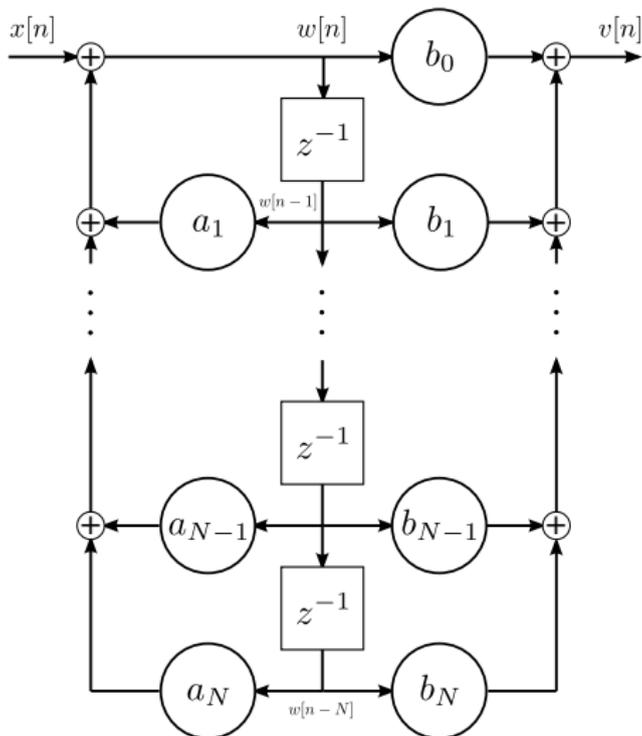
- ▶ Por tratarse de *SLIT*, puede cambiarse el orden de los sistemas en la cascada manteniendo la función de transferencia global.

- ▶ Se asume sin perder generalidad que $M = N$.
- ▶ Si lo anterior no fuera cierto, algunos coeficientes a_k o b_k serían nulos en la figura.
- ▶ La señal en las cadenas de retardos es la misma, por lo que puede usarse solo una cadena de retardos.



Representación en diagrama de bloques

- Implementación en forma canónica: usando la cantidad mínima de retardos.



Función de transferencia de sistemas recursivos

Ejemplo: diagrama de bloques

- ▶ Se considera el sistema LIT con función de transferencia

$$H(z) = \frac{1 + 2z^{-1}}{1 - 1.5z^{-1} + 0.9z^{-2}}.$$

- ▶ La ecuación en recurrencia se obtiene viendo que

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} \Rightarrow Y(z) - 1.5z^{-1}Y(z) + 0.9z^{-2}Y(z) = X(z) + 2z^{-1}X(z)$$

- ▶ y antitransformando,

$$y[n] - 1.5y[n-1] + 0.9y[n-2] = x[n] + 2x[n-1]$$

- ▶ Según la definición del sistema recursivo genérico, al despejar $y[n]$ quedan los coeficientes a_k y b_k con el signo correcto

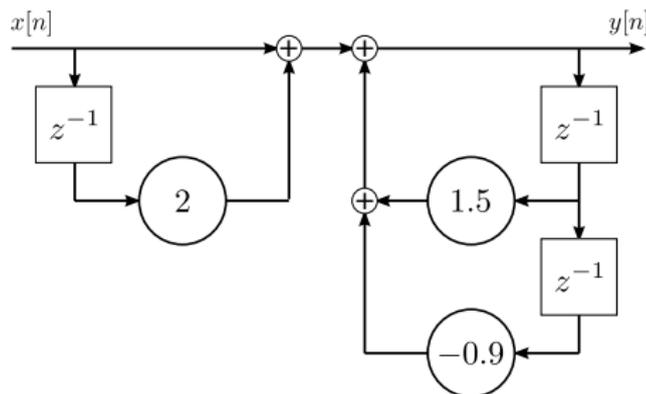
$$y[n] = 1.5y[n-1] - 0.9y[n-2] + x[n] + 2x[n-1]$$

- ▶ Por lo tanto, $b_0 = 1$, $b_1 = 2$, $a_1 = 1.5$ y $a_2 = -0.9$.

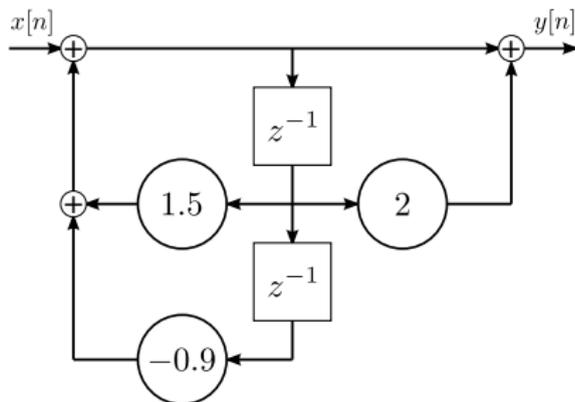
Función de transferencia de sistemas recursivos

Ejemplo: diagrama de bloques

- El diagrama de bloques es



- Y la implementación en forma canónica es



Referencias I



Oppenheim, A. V. and Schafer, R. W. (1999).

Discrete-Time Signal Processing, chapter 3, 5 and 6.

Prentice Hall, 2nd edition.



Smith, S. W. (1997).

The Scientist & Engineer's Guide to Digital Signal Processing,
chapter 33.

California Technical Pub., 1st edition.