Modulación y procesamiento de señales

Práctico 3
Transformada de Fourier

Cada ejercicio comienza con un símbolo el cual indica su dificultad de acuerdo a la siguiente escala: ✦ básico, ★ medio, ✷ avanzado, y ✹ difícil. Además puede tener un número, como (3.14) que indica el número de ejercicio del libro *Discrete-time signal processing*, Oppenheim/Schafer, 2nd edition, o (2.13, Hayes) que indica el número de ejercicio del libro *Schaum's Outline of Theory and Problems of Digital Signal Processing*, Monson H. Hayes.

✦Ejercicio 1 **(2.6)**

(a) Calcule la respuesta en frecuencia $H(e^{j\omega})$ del sistema lineal e invariante con el tiempo cuya entrada y salida satisfacen la ecuación en diferencias

$$y[n] - \frac{1}{2}y[n-1] = x[n] + 2x[n-1] + x[n-2]$$

(b) Escriba la ecuación en diferencias que caracteriza un sistema cuya respuesta en frecuencia es

$$H(e^{j\omega}) = \frac{1 - \frac{1}{2}e^{-j\omega} + e^{-j3\omega}}{1 + \frac{1}{2}e^{-j\omega} + \frac{3}{4}e^{-j2\omega}}$$

.

✦Ejercicio 2

Considerar un sistema lineal invariante en el tiempo cuya respuesta en frecuencia es

$$H(e^{j\omega}) = \frac{1 - e^{-j2\omega}}{1 + \frac{1}{2}e^{-j4\omega}}, \quad -\pi < \omega \leq \pi.$$

(a) Determinar la salida del sistema si la entrada es $x[n] = \sin\left(\frac{\pi n}{4}\right)$

.

✷Ejercicio 3 **(2.9)**

Considere la siguiente respuesta al impulso

$$h[n] = 2\left[\left(\frac{1}{2}\right)^n - \left(\frac{1}{3}\right)^n\right]u[n]$$

(a) Encuentre la respuesta del sistema a una entrada escalón.

(b) Escriba la respuesta en frecuencia.

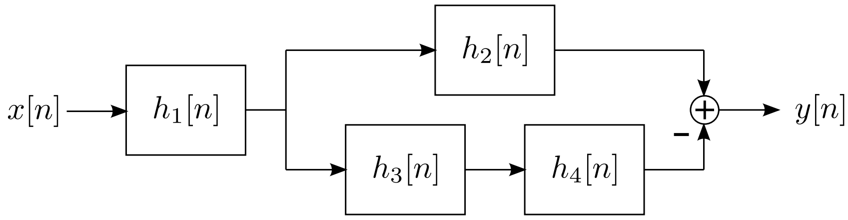
(c) Encuentre la respuesta del sistema a una entrada $x[n] = A\sin(\omega_o n + \phi)$.

(d) Escriba la ecuación en diferencias que caracteriza al sistema.

(e) Indique un diagrama de bloques para el sistema.

⋆Ejercicio 4 **(2.13, Hayes)**

Considerar la interconexión de los sistemas lineales invariantes en el tiempo que se muestran el la siguiente figura:



(a) Expresar la respuesta en frecuencia del sistema total en términos de $H_1(e^{j\omega})$, $H_2(e^{j\omega})$, $H_3(e^{j\omega})$ y $H_4(e^{j\omega})$.

(b) Encontrar la respuesta en frecuencia si

$$\begin{aligned} h_1[n] &= \delta[n] + 2\delta[n-2] + \delta[n-4] \\ h_2[n] &= h_3[n] = (0,2)^n u[n] \\ h_4[n] &= \delta[n-2] \end{aligned}$$

⋆Ejercicio 5

Hallar la transformada de Fourier en tiempo discreto (DTFT) de las siguientes secuencias utilizando la ecuación de análisis. Graficar su módulo y fase.

(a) $\delta[n-n_0]$

(b) $\delta[n] + 6\delta[n-1] + 3\delta[n-2]$

(c) $a^n u[n]$, donde $|a| < 1$

(d) $\frac{A}{2} e^{j\omega_0 n}$

(e) $A\cos(\omega_0 n + \phi)$

(f) $a^{n-1}u[n-1]$, donde $|a| < 1$

(g) $a^{|n-1|}$, donde $|a| < 1$

(h) $\frac{1}{M_1+M_2+1}\sum_{k=-M_1}^{M_2} \delta[n-k]$

⋆Ejercicio 6 **(2.5, 2.26, Hayes)**

Encontrar las respuestas al impulso $h[n]$ de las siguientes respuestas en frecuencia.

(a) $H_1(e^{j\omega}) = \begin{cases} j & 0 < |\omega| \leq \omega_c \\ -j & \omega_c < |\omega| \leq \pi \end{cases}$

(b) $H_2(e^{j\omega}) = \begin{cases} j & 0 < \omega \leq \pi \\ -j & -\pi < \omega \leq 0 \end{cases}$

(c) $H_3(e^{j\omega}) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} [2\pi\delta(\omega - 2\pi k) + \pi\delta(\omega - \pi/2 - 2\pi k) + \pi\delta(\omega + \pi/2 - 2\pi k))]$

(d) $H_3(e^{j\omega}) = cos^2\omega$

✦Ejercicio 7 **(2.33, 2.66, Hayes)**

Sea $x[n]$ una secuencia con DTFT $X(e^{j\omega})$, expresar las DTFT de las siguientes secuencias en función de $X(e^{j\omega})$.

(a) $x^*[-n]$

(b) $x[n] - x[n-2]$

(c) $x[2n]$

(d) $x[n] * x^*[-n]$

⋆Ejercicio 8 **(2.35, Hayes)**

Sea $x[n]$ la secuencia

$$x[n] = 2\delta[n+2] - \delta[n+1] + 3\delta[n] - \delta[n-1] + 2\delta[n-2]$$

Evaluar las siguientes cantidades sin hallar explícitamente $X(e^{j\omega})$:

(a) $X(e^{j\omega})\big|_{\omega=0}$

(b) $\int\limits_{-\pi}^{+\pi} X(e^{j\omega}) d\omega$

(c) $X(e^{j\omega})\big|_{\omega=\pi}$

(d) $\int\limits_{-\pi}^{+\pi} \left|X(e^{j\omega})\right|^2 d\omega$

✦Ejercicio 9 **(2.17)**

Para la secuencia

$$r[n] = \begin{cases} 1 & 0 \leq n \leq M \\ 0 & \text{de otro modo} \end{cases}$$

(a) Determinar la transformada de Fourier.

Considerar ahora la secuencia

$$w[n] = \begin{cases} \frac{1}{2}\left[1 - \cos\left(\frac{2\pi n}{M}\right)\right] & 0 \leq n \leq M \\ 0 & \text{de otro modo} \end{cases}$$

(b) Bosquejar $w[n]$ y expresar la transformada de Fourier de $w[n]$ en función de la transformada de Fourier de $r[n]$.
Sugerencia: expresar $w[n]$ en función de $r[n]$ y las exponenciales complejas $e^{j2\pi n/M}$ y $e^{-j2\pi n/M}$.

(c) Bosquejar el módulo de $R(e^{j\theta})$ y $W(e^{j\theta})$ cuando $M = 4$.

✦Ejercicio 10 **(2.26)**

Una secuencia $x[n]$ es *secuencia propia* de un sistema si $T\{x[n]\} = k \cdot x[n]$ para algún k constante. Para cada una de las secuencias indicadas encontrar el sistema SLIT estable *más genérico* para el cual la secuencia es una secuencia propia.

(a) $\frac{1}{2}^n u[n]$

(b) $e^{j2\theta_o n}$

(c) $e^{j\theta_o n} + e^{j2\theta_o n}$

(d) 5^n

⋆Ejercicio 11 **(2.70)**

Un operador numérico comúnmente usado, llamado *diferencia hacia atrás*, se define como:

$$y[n] = \nabla(x[n]) = x[n] - x[n-1],$$

donde $x[n]$ es la entrada e $y[n]$ la salida del sistema *diferencia hacia atrás*.

(a) Mostrar que el sistema es lineal e invariante en el tiempo.

(b) Encontrar la respuesta al impulso del sistema.

(c) Encontrar y bosqueje la respuesta en frecuencia (magnitud y fase).

(d) Mostrar que si

$$x[n] = f[n] * g[n]$$

entonces

$$\nabla(x[n]) = \nabla(f[n]) * g[n] = f[n] * \nabla(g[n])$$

donde $*$ denota convolución discreta.

(e) Encontrar la respuesta al impulso de un sistema tal, que puesto en cascada con el sistema *diferencia hacia atrás* es capaz de recuperar la entrada. En otras palabras, encontrar $h_i[n]$ tal que

$$h_i[n] * \nabla(x[n]) = x[n]$$

Solución

Ejercicio 1

(a) Dado que el sistema es lineal invariante en el tiempo, para una entrada exponencial $x[n] = e^{j\omega n}$ se tiene una salida $y[n] = e^{j\omega n}H(e^{j\omega})$. Ingresando una entrada exponencial, la ecuación en diferencias resulta:

$$H(e^{j\omega})e^{j\omega n} - \frac{1}{2}H(e^{j\omega})e^{j\omega(n-1)} = e^{j\omega n} + 2e^{j\omega(n-1)} + e^{j\omega(n-2)}$$

Despejando $H(e^{j\omega})$resulta,

$$H(e^{j\omega}) = \frac{1 + 2e^{-j\omega} + e^{-j2\omega}}{1 - \frac{1}{2}e^{-j\omega}}$$

(b) Haciendo el camino inverso de la parte anterior resulta,

$$y[n] + \frac{1}{2}y[n-1] + \frac{3}{4}y[n-2] = x[n] - \frac{1}{2}x[n-1] + x[n-3]$$

Ejercicio 2

Como el sistema es lineal invariante en el tiempo la salida es

$$y[n] = |H(e^{j\frac{\pi}{4}})| \sin\left(\frac{\pi n}{4} + \angle H(e^{j\frac{\pi}{4}})\right)$$

Ejercicio 3

(a)

$$\begin{aligned}
h[n] * u[n] &= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} h[k]u[n-k] \\
&= 2\sum_{k=0}^{+\infty} \left[\left(\tfrac{1}{2}\right)^k - \left(\tfrac{1}{3}\right)^k\right] u[n-k] \\
&= 2\sum_{k=0}^{n} \left[\left(\tfrac{1}{2}\right)^k - \left(\tfrac{1}{3}\right)^k\right] \\
&= 2\left\{\sum_{k=0}^{n} \left(\tfrac{1}{2}\right)^k - \sum_{k=0}^{n} \left(\tfrac{1}{3}\right)^k\right\} \\
&= 2\left\{\frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}}{1-\left(\frac{1}{2}\right)} - \frac{1-\left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}}{1-\left(\frac{1}{3}\right)}\right\} u[n] \\
&= \left\{3 - \left(\tfrac{1}{2}\right)^{n-1} + \left(\tfrac{1}{3}\right)^n\right\} u[n]
\end{aligned}$$

(b)

$$\begin{aligned}
H(e^{j\omega}) &= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} h[k]e^{-jk\omega} \\
&= 2\sum_{k=0}^{+\infty} \left[\left(\tfrac{1}{2}\right)^k - \left(\tfrac{1}{3}\right)^k\right] e^{-jk\omega} \\
&= 2\left(\frac{1}{1-\frac{e^{-j\omega}}{2}} - \frac{1}{1-\frac{e^{-j\omega}}{3}}\right) \\
&= \frac{e^{-j\omega}/3}{1-\frac{5e^{-j\omega}}{6}+\frac{e^{-2j\omega}}{6}}
\end{aligned}$$

(c) Dado que el sistema es lineal e invariante en el tiempo,

$$y[n] = h[n] * x[n] = |H(e^{j\omega_0})| \sin\left(\omega_0 + \phi + \angle H(e^{j\omega_0})\right)$$

(d) A partir de la respuesta en frecuencia encontrada se puede concluir que la ecuación en recurrencias es,

$$y[n] - \frac{5}{6}y[n-1] + \frac{1}{6}y[n-2] = \frac{1}{3}x[n-1]$$

Ejercicio 5

(a) $X_a(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta[n-n_0]e^{-j\omega n} = e^{-j\omega n_0}$

(b) $X_b(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \left(\delta[n] + 6\delta[n-1] + 3\delta[n-2]\right) e^{-j\omega n} = 1 + 6e^{-j\omega} + 3e^{-j2\omega}$
También se pudo haber obtenido utilizando el caso anterior y la propiedad de linealidad.

(c) $X_c(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a^n u[n]e^{-j\omega n} = \sum_{n=0}^{+\infty} a^n e^{-j\omega n} = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(ae^{-j\omega}\right)^n$
Para $|a| < 1$ tenemos una serie geométrica convergente, resultando

$$X_c(e^{j\omega}) = \frac{1}{1-ae^{-j\omega}}; \ \ |a| < 1$$

(d) $X_d(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{A}{2}e^{-j\omega_0 n}e^{-j\omega n} = \frac{A}{2}\sum_{n=-\infty}^{+\infty} e^{-j(\omega-\omega_0)n}$
Observar que $|e^{-j(\omega-\omega_0)}| = 1$, por lo que la fórmula de la serie geométrica no nos es útil. Utilizando la fórmula de Poisson de la hoja de fórmulas del curso, con $\alpha = 1$ y $t = \omega - \omega_0$ podemos afirmar que

$$X_d(e^{j\omega}) = A\pi \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta(\omega - \omega_0 - 2\pi k)$$

O sea que en el intervalo de ω igual a $[-\pi, \pi]$ se tiene $X_d(e^{j\omega}) = A\pi\delta(\omega - \omega_0)$

(e) $X_e(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} A\cos(\omega_0 n + \phi)e^{-j\omega n} = A\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \left(\frac{e^{j(\omega_0 n+\phi)} + e^{-j(\omega_0 n+\phi)}}{2}\right) e^{-j\omega n}$

$X_e(e^{j\omega}) = \frac{A}{2}\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \left(e^{j\omega_0 n}e^{j\phi} + e^{-j\omega_0 n}e^{-j\phi}\right) e^{-j\omega n}$

$X_e(e^{j\omega}) = \frac{A}{2}\sum_{n=-\infty}^{+\infty} e^{-j(\omega-\omega_0)n}e^{j\phi} + \frac{A}{2}\sum_{n=-\infty}^{+\infty} e^{-j(\omega+\omega_0)n}e^{-j\phi}$

$X_e(e^{j\omega}) = \frac{Ae^{j\phi}}{2}\sum_{n=-\infty}^{+\infty} e^{-j(\omega-\omega_0)n} + \frac{Ae^{-j\phi}}{2}\sum_{n=-\infty}^{+\infty} e^{-j(\omega+\omega_0)n}$

Utilizando el resultado de la parte (d) se obtiene en el intervalo de frecuencias $[-\pi, \pi]$,
$X_e(e^{j\omega}) = A\pi\left(\delta(\omega-\omega_0)e^{j\phi} + \delta(\omega+\omega_0)e^{-j\phi}\right)$

(f) $X_f(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a^{n-1}u[n-1]e^{-j\omega n} = \sum_{n=1}^{+\infty} a^{n-1}e^{-j\omega n} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a^n}{a}e^{-j\omega n} = \frac{1}{a}\sum_{n=1}^{+\infty} \left(ae^{-j\omega}\right)^n$

Para $|a| < 1$ tenemos una serie geométrica convergente, resultando

$$X_f(e^{j\omega}) = \frac{1}{a}\left(\frac{ae^{-j\omega}}{1-ae^{-j\omega}}\right) = \left(\frac{e^{-j\omega}}{1-ae^{-j\omega}}\right); \ \ |a| < 1$$

(g) $X_g(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a^{|n-1|}e^{-j\omega n} = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} a^{|m|}e^{-j\omega(m+1)}$

$X_g(e^{j\omega}) = e^{-j\omega}\sum_{m=-\infty}^{+\infty} a^{|m|}e^{-j\omega m} = e^{-j\omega}\left[\sum_{m=-\infty}^{0} a^{-m}e^{-j\omega m} + \sum_{m=1}^{\infty} a^m e^{-j\omega m}\right]$

$X_g(e^{j\omega}) = e^{-j\omega}\left[\sum_{k=0}^{+\infty} a^k e^{j\omega k} + \sum_{m=1}^{\infty} a^m e^{-j\omega m}\right] = e^{-j\omega}\left[\sum_{k=0}^{+\infty} \left(ae^{j\omega}\right)^k + \sum_{m=1}^{\infty} \left(ae^{-j\omega}\right)^m\right]$

Para $|a| < 1$ tenemos dos series geométricas convergentes, resultando

$$X_g(e^{j\omega}) = e^{-j\omega}\left[\frac{1}{1-ae^{j\omega}}+\frac{1}{1-ae^{-j\omega}}\right] = \frac{e^{-j\omega}\left(1-2acos(\omega)\right)}{|1-ae^{j\omega}|};\quad |a|<1$$

(h) $X_h(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty}\left(\frac{1}{M_1+M_2+1}\sum_{k=-M_1}^{M_2}\delta[n-k]\right)e^{-j\omega n}$

Notar que las sumatorias se pueden reordenar de la siguiente manera,

$X_h(e^{j\omega}) = \frac{1}{M_1+M_2+1}\sum_{k=-M_1}^{M_2}\left(\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\delta[n-k]e^{-j\omega n}\right)$

Luego operando dentro de la serie resulta,

$$X_h(e^{j\omega}) = \frac{1}{M_1+M_2+1}\sum_{k=-M_1}^{M_2}e^{-j\omega k}$$

Ejercicio 6

(b) La respuesta al impulso puede ser encontrada a partir de la ecuación de síntesis de la DTFT,

$$\begin{aligned} h[n] &= \tfrac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} H(e^{j\omega})e^{jn\omega}d\omega \\ &= \tfrac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{0} je^{jn\omega}d\omega \tfrac{1}{2\pi}\int_{0}^{\pi} je^{jn\omega}d\omega \\ &= \tfrac{1}{2\pi n}\left(1-e^{-jn\pi}\right) - \tfrac{1}{2\pi n}\left(e^{jn\pi}-1\right) \\ &= \tfrac{1}{\pi n}\left(1-e^{jn\pi}\right) \\ &= \tfrac{1}{\pi n}\left[1-(-1)^n\right] \end{aligned}$$

Por lo tanto se tiene que,

$$h[n] = \begin{cases} \frac{2}{n\pi} & n \quad \text{impar} \\ 0 & n \quad \text{par} \end{cases}$$

Lo cual puede ser expresado también como,

$$h[n] = \begin{cases} \frac{2}{n\pi}\sin^2(n\pi/2) & n \neq 0 \\ 0 & n = 0 \end{cases}$$

(d)

$$H_3(e^{j\omega}) = \left(\frac{1}{2}e^{j\omega}+\frac{1}{2}e^{-j\omega}\right)^2 = \frac{1}{2}+\frac{1}{4}e^{j2\omega}+\frac{1}{4}e^{-j2\omega}$$

Por lo tanto x[n] es,

$$x[n] = \frac{1}{2}\delta[n]+\frac{1}{4}\delta[n+2]+\frac{1}{4}\delta[n-2]$$

Ejercicio 7

(a)

$$\begin{aligned} DTFT\left\{x^*[-n]\right\} &= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x^*[-k]e^{-jk\omega} \\ &= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x^*[k]e^{jk\omega} \\ &= \left[\sum_{k=-\infty}^{+\infty} x^*[k]e^{jk\omega}\right]^* \\ &= X^*(e^{j\omega}) \end{aligned}$$

(b)

$$DTFT\left\{x[n]-x[n-2]\right\} = \left(1-e^{j2\omega}\right)X(e^{j\omega})$$

(c)

$$DTFT\left\{x[2n]\right\} = \frac{1}{2}X(e^{j\omega}) + \frac{1}{2}X\left(e^{j(\omega+\pi)}\right)$$

(d)

$$DTFT\left\{x[n]*x^*[-n]\right\} = X(e^{j\omega}).X^*(e^{j\omega}) = \left|X(e^{j\omega})\right|^2$$

Ejercicio 8

(a) Dado que la DTFT de $x[n]$ es

$$X(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]e^{-jn\omega}$$

notar que si evaluamos $X(e^{j\omega})$ en $\omega = 0$, se tiene

$$X(e^{j\omega})\Big|_{\omega=0} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]$$

donde al evaluar con la secuencia $x[n]$ se tiene

$$X(e^{j\omega})\Big|_{\omega=0} = 5$$

(b) Desde la ecuación de síntesis de la DTFT,

$$x[n] = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} X(e^{j\omega}e^{jn\omega})d\omega$$

notar que cuando $n = 0$:

$$x[0] = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} X(e^{j\omega})d\omega$$

Por lo tanto se tiene que

$$\int_{-\pi}^{\pi} X(e^{j\omega})d\omega = 2\pi x[0] = 6\pi$$

(c) Evaluando la ecuación de análisis de la DTFT de $x[n]$ en $\omega = \pi$, tenemos

$$X(e^{j\omega})\Big|_{\omega=\pi} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]e^{-jn\pi} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} (-1)^n x[n]$$

donde al evaluar con la secuencia $x[n]$ se tiene

$$X(e^{j\omega})\Big|_{\omega=\pi} = 9$$

(d) El teorema de Parseval nos dice que

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} \left|X(e^{j\omega})\right|^2 d\omega = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |x[n]|^2$$

por lo que

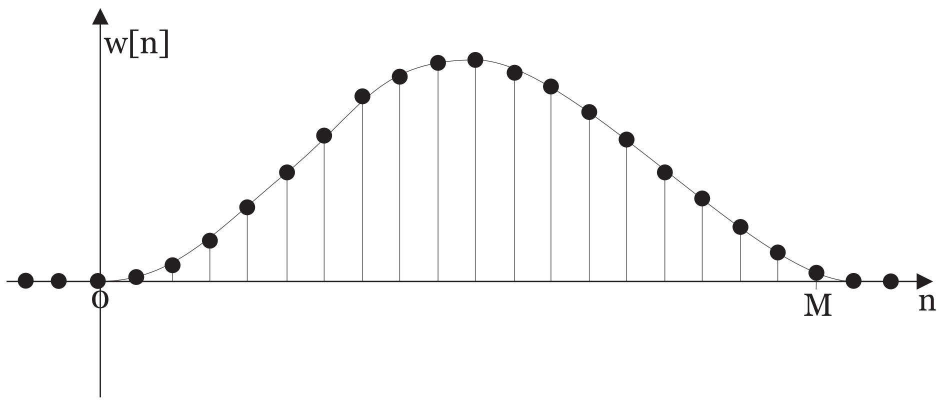
$$\int_{-\pi}^{+\pi} \left|X(e^{j\omega})\right|^2 d\omega = 2\pi \sum_{n=-\infty}^{\infty} |x[n]|^2 = 38\pi$$

Ejercicio 9

(a) La transformada de Fourier de la secuencia es:

$$R(e^{j\theta}) = \sum_{-\infty}^{\infty} r[k]e^{-j\theta k} = \sum_{0}^{M} r[k]e^{-j\theta k} = \frac{1-e^{-j\theta(M+1)}}{1-e^{-j\theta}}$$

(b)



$$w[n] = \frac{r[n]}{2} - \frac{e^{\frac{j2\pi n}{M}} + e^{\frac{-j2\pi n}{M}}}{4}$$

$$W(e^{j\theta}) = \frac{R(e^{j\theta})}{2} * \left(1 - \frac{\delta(\theta+\frac{2\pi}{M}) + \delta(\theta-\frac{2\pi}{M})}{4}\right)$$

$$W(e^{j\theta}) = \frac{R(e^{j\theta})}{2} - \frac{R(e^{j(\theta+\frac{2\pi}{M})})}{4} - \frac{R(e^{j(\theta-\frac{2\pi}{M})})}{4}$$

Ejercicio 10

(a) Observar que si x es una secuencia propia, para la cual existe la transformada de Fourier, se tiene que $Y(e^{j\theta}) = kX(e^{j\theta})$. Por otro lado como el sistema es un slit estable se tiene que $Y(e^{j\theta}) = H(e^{j\theta})X(e^{j\theta})$, por lo que se deduce que la respuesta en frecuencias del filtro debe ser constante para todas las frecuencias en las que X no es nula.
Puede verse que esta secuencia tiene componentes en todas las frecuencias, por lo que para que la secuencia sea propia se tiene que cumplir,

$$h[n] = \alpha\delta[n]$$

(b) Para cualquier sistema SLIT estable esta secuencia es propia.

(c) En este caso se debe cumplir que el valor propio asociado a estas dos exponenciales complejas sea el mismo, es decir:

$$H(e^{j\theta_o}) = H(e^{j2\theta_o})$$

(d) Esta secuencia tiene componentes en todas las frecuencias por lo tanto la respuesta para que sea propia es multiplicar a la entrada por una constante:

$$h[n] = \alpha\delta[n]$$

Ejercicio 11

(a) Para que el sistema sea lineal se debe cumplir que si:
$y_1[n] = \nabla\{x_1[n]\}$ y $y_2[n] = \nabla\{x_2[n]\}$
entonces:
$\alpha y_1[n] + \beta y_2[n] = y_3[n] = \nabla\{\alpha x_1[n] + \beta x_2[n]\}$
Y como:

$$\nabla\{\alpha x_1[n] + \beta x_2[n]\} = (\alpha x_1[n] + \beta x_2[n]) - (\alpha x_1[n-1] + \beta x_2[n-1])$$

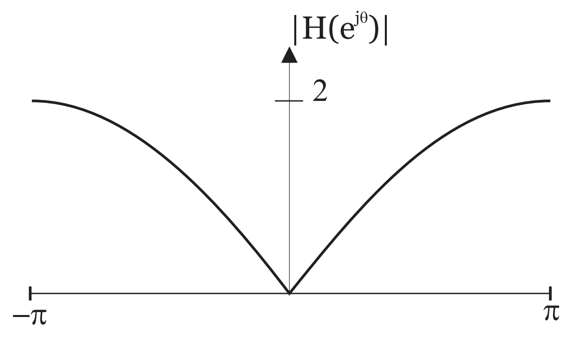
$$\nabla\{\alpha x_1[n] + \beta x_2[n]\} = \alpha(x_1[n] - x_1[n-1]) + \beta(x_2[n] - x_2[n-1]) = \alpha y_1[n] + \beta y_2[n]$$

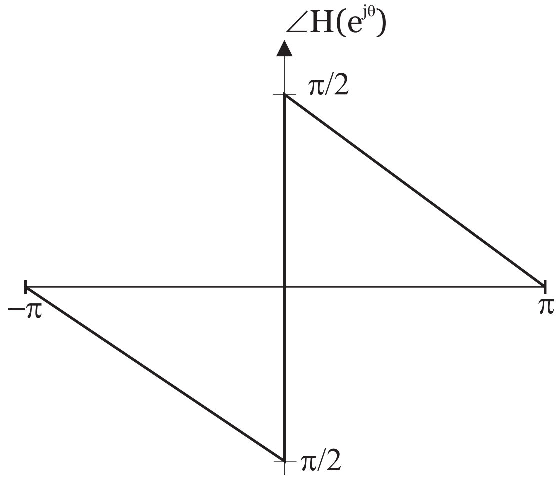
el sistema es lineal.
Para ver que es invariante temporal consideremos las entradas $x[n]$ y $x_r[n] = x[n-r]$. Si la respuesta del sistema a $x[n]$ es $y[n]$ entonces la respuesta a $x_r[n]$ será $y_r[n] = \nabla x_r[n] = x[n-r] - x[n-r-1] = y[n-r]$ por lo que el sistema es también invariante temporal.

(b) La respuesta al impulso del sistema es:

$$h[n] = \begin{cases} 0 & n < 0 \\ 1 & n = 0 \\ -1 & n = 1 \\ 0 & n > 1 \end{cases}$$

(c)





(d) Utilizando propiedades de la convolución tenemos que:

$$\nabla(x[n]) = (f[n] * g[n]) * h[n]$$

(e) Sea g[n] la respuesta al impulso del sistema buscado y h[n] la respuesta al impulso del operador diferencia hacia atrás. Si ambos sitemas son SLITS, la respuesta de los sistemas puestos en cascada es:

$$h[n] * g[n]$$

En este caso queremos que:

$$h[n] * g[n] = \delta[n]$$

Una forma de resolver el problema es considerar a g[n] como la entrada al sistema ∇ de manera que el problema se convierte en hallar la solución a la ecuación en diferencias:

$$g[n] - g[n-1] = \delta[n]$$

.

Donde la solución homogénea es: $A\lambda^n$ con $\lambda - 1 = 0$, es decir: $g_h[n] = A$. Es fácil verificar que una solución particular es $g_p[n] = u[n]$.

Tenemos entonces que la solución general de la ecuación en recurrencia es:

$$g[n] = A + u[n]$$

que es la forma general de la respuesta que debe tener el sistema buscado.