Representación de señales y sistemas en el dominio de la frecuencia

Modulación y Procesamiento de Señales

Ernesto López
Pablo Zinemanas, Mauricio Ramos
{pzinemanas, mramos}@fing.edu.uy

Centro Universitario Regional Este
Sede Rocha
Tecnólogo en Telecomunicaciones

Curso 2016

Respuesta en frecuencia de sistemas

Introducción

- Previamente se vio que los sistemas lineales invariantes en el tiempo quedan completamente caracterizados por la respuesta al impulso.
  - Conociendo la respuesta al impulso $h[n]$ de un sistema, es posible conocer la salida $y[n]$ correspondiente a cualquier entrada $x[n]$,

$$y[n] = x[n] * h[n].$$

- Otra forma de caracterizar completamente a un *SLIT* es mediante la respuesta en frecuencia.
  - La respuesta de un *SLIT* a una secuencia sinusoidal (exponencial compleja) es otra secuencia sinusoidal (exponencial compleja) de la misma frecuencia, con magnitud y fase determinada por la respuesta en frecuencia del *SLIT*.
  - Por otro lado, mediante un análisis de Fourier, las señales en tiempo discreto pueden representarse como combinación lineal de sinusoides o exponenciales complejas.
- Si se conoce la respuesta en frecuencia del sistema, se conoce la salida a cualquier entrada. Alcanza con representar la entrada como combinación lineal de secuencias sinusoidales.

Respuesta en frecuencia de sistemas

Función propia de un sistema

Una secuencia $x[n]$ es función propia de un sistema $T\{\cdot\}$ si se cumple que

$$y[n] = T\{x[n]\} = \lambda x[n], \qquad \lambda \in \mathbb{C} \text{ constante}$$

$$x[n] \longrightarrow \boxed{T\{\cdot\}} \longrightarrow \lambda x[n]$$

Funciones propias de los *SLIT*

- Las secuencias exponenciales complejas son funciones propias de los *SLIT*.
- Se considera un *SLIT* con respuesta al impulso $h[n]$ y como entrada, una secuencia exponencial compleja de frecuencia ω radianes,

$$x[n] = e^{j\omega n}, \qquad -\infty < n < \infty.$$

Respuesta en frecuencia de sistemas

Funciones propias de los *SLIT*

- La salida del sistema es

$$\begin{aligned}
y[n] &= h[n] * x[n] \\
&= \sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k] e^{j\omega(n-k)} \\
&= \sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k] e^{j\omega n} e^{-j\omega k} \\
&= e^{j\omega n} \left(\sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k] e^{-j\omega k} \right)
\end{aligned}$$

- Definiendo

$$H(e^{j\omega}) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k] e^{-j\omega k},$$

la salida queda

$$y[n] = H(e^{j\omega}) e^{j\omega n}. \tag{1}$$

Respuesta en frecuencia de sistemas

Funciones propias de los *SLIT*

- $H(e^{j\omega})$ es una constante compleja (no depende de n).
- Por lo tanto, $e^{j\omega n}$ es una función propia del sistema y el valor propio asociado es $H(e^{j\omega})$.

$$e^{j\omega_0 n} \longrightarrow \boxed{\text{SLIT}} \longrightarrow H(e^{j\omega_0})e^{j\omega_0 n} \qquad e^{j\omega_1 n} \longrightarrow \boxed{\text{SLIT}} \longrightarrow H(e^{j\omega_1})e^{j\omega_1 n}$$

- Expresando el valor propio complejo en magnitud y fase,

$$H(e^{j\omega_0}) = G_0 e^{j\theta_0} \quad \Rightarrow \quad \text{Salida: } H(e^{j\omega_0})e^{j\omega_0 n} = G_0 e^{j\theta_0} e^{j\omega_0 n} = G_0 e^{j(\omega_0 n + \theta_0)}$$

$$e^{j\omega_0 n} \longrightarrow \boxed{\text{SLIT}} \longrightarrow G_0 e^{j(\omega_0 n + \theta_0)} \qquad e^{j\omega_1 n} \longrightarrow \boxed{\text{SLIT}} \longrightarrow G_1 e^{j(\omega_1 n + \theta_1)}$$

Respuesta en frecuencia de un *SLIT*

- El valor propio $H(e^{j\omega})$, definido como

$$H(e^{j\omega}) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k]e^{-j\omega k} \tag{2}$$

  se llama respuesta en frecuencia del sistema, y describe el cambio en la magnitud y la fase de la exponencial compleja de entrada en función de la frecuencia ω.

- En general, la respuesta en frecuencia es una función compleja, y puede ser expresada en términos de:

Parte real y parte imaginaria

$$H(e^{j\omega}) = H_R(e^{j\omega}) + jH_I(e^{j\omega})$$

Magnitud y fase

$$H(e^{j\omega}) = |H(e^{j\omega})|e^{j\angle H(e^{j\omega})}$$

Respuesta en frecuencia de sistemas

Respuesta en frecuencia del sistema de retardo

- Se quiere calcular la respuesta en frecuencia del sistema de retardo, definido como,
$$y[n] = x[n - n_d]$$
- Para calcular la respuesta en frecuencia, se toma como entrada la exponencial compleja de frecuencia ω,
$$x[n] = e^{j\omega n}.$$
- La salida es,
$$y[n] = e^{j\omega(n-n_d)} = e^{-j\omega n_d} e^{j\omega n}.$$
- La salida consiste en la entrada multiplicada por una constante que depende de la frecuencia ω de la secuencia de entrada y el retardo n_d del sistema.
- La respuesta en frecuencia del retardo ideal es
$$H(e^{j\omega}) = e^{-j\omega n_d}.$$

Respuesta en frecuencia de sistemas

Respuesta en frecuencia del sistema de retardo

- Cálculo de la forma usual: usando directamente la definición de la respuesta en frecuencia (ecuación 2),

$$
\begin{aligned}
H(e^{j\omega}) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} h[n]e^{-j\omega n} \\
&\stackrel{(1)}{=} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta[n-n_d]e^{-j\omega n} \\
&= e^{-j\omega n_d}
\end{aligned}
$$

(1) respuesta al impulso del sistema de retardo:

$$h[n] = \delta[n-n_d]$$

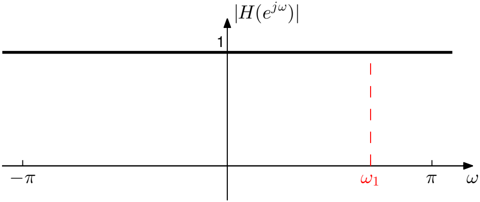
- La respuesta en magnitud y fase es respectivamente,

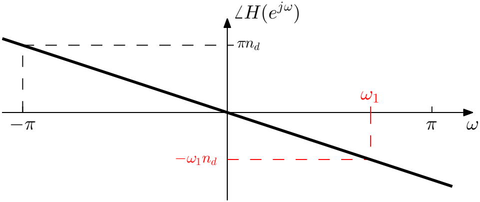
$$
\begin{aligned}
|H(e^{j\omega})| &= 1 \\
\angle H(e^{j\omega}) &= -\omega n_d.
\end{aligned}
$$

- En general, la expresión en magnitud y fase es mas útil que la representación en parte real e imaginaria, porque muestra explícitamente las características del sistema.

Respuesta en frecuencia de sistemas

Respuesta en frecuencia del sistema de retardo





- Se considera la entrada

$$x[n] = e^{j\omega_1 n}$$

- La entrada es función propia del sistema, y la salida es

$$y[n] = H(e^{j\omega_1})e^{j\omega_1 n}$$

- Como $H(e^{j\omega_1}) = e^{-j\omega_1 n_d}$, la salida queda

$$\begin{aligned} y[n] &= e^{-j\omega_1 n_d} e^{j\omega_1 n} \\ &= e^{j\omega_1 (n-n_d)} \\ &= x[n-n_d] \end{aligned}$$

- Conociendo la respuesta en frecuencia, se conoce la respuesta a cualquier secuencia exponencial compleja.

Respuesta en frecuencia de sistemas

- Mas adelante se verá que un amplio conjunto de señales puede ser representado como la combinación lineal de secuencias exponenciales complejas,

$$x[n] = \sum_k \alpha_k e^{j\omega_k n}.$$

- Por el principio de superposición, la salida de un sistema lineal invariante en el tiempo sería

$$y[n] = \sum_k \alpha_k H(e^{j\omega_k}) e^{j\omega_k n}$$

- De esta forma, es posible encontrar la salida del sistema siempre y cuando
  - se dispone de una descomposición de la entrada $x[n]$ como combinación lineal de secuencias exponenciales complejas.
  - se conoce la respuesta en frecuencia del sistema.

Respuesta en frecuencia de sistemas

Respuesta de un *SLIT* a una secuencia sinusoidal

- Es simple representar una secuencia sinusoidal como combinación lineal de exponenciales complejas,

$$\begin{aligned} x[n] &= A\cos(\omega_0 n + \phi) \\ &= \frac{A}{2}\left(e^{j(\omega_0 n+\phi)} + e^{-j(\omega_0 n+\phi)}\right) \\ &= \underbrace{\frac{A}{2}e^{j\phi}e^{j\omega_0 n}}_{x_1[n]} + \underbrace{\frac{A}{2}e^{-j\phi}e^{-j\omega_0 n}}_{x_2[n]}. \end{aligned}$$

- Por la ecuación 1, la respuesta a las entradas $x_1[n]$ y $x_2[n]$ es,

$$y_1[n] = H(e^{j\omega_0})\frac{A}{2}e^{j\phi}e^{j\omega_0 n}, \qquad y_2[n] = H(e^{-j\omega_0})\frac{A}{2}e^{-j\phi}e^{-j\omega_0 n}$$

- y por el principio de superposición, la respuesta total es

$$y[n] = \frac{A}{2}\left[H(e^{j\omega_0})e^{j\phi}e^{j\omega_0 n} + H(e^{-j\omega_0})e^{-j\phi}e^{-j\omega_0 n}\right]$$

Respuesta en frecuencia de sistemas

Simetría de la respuesta en frecuencia

- La respuesta en frecuencia de un sistema con $h[n]$ real es simétrica conjugada (función hermítica), es decir, cumple que

$$H(e^{-j\omega}) = H^*(e^{j\omega})$$

- Prueba:
  - La definición de la respuesta en frecuencia es $H(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} h[n]e^{-j\omega n}$
  - Conjugando a ambos lados de la igualdad, se tiene que,

$$\begin{aligned}
H^*(e^{j\omega}) &= \left(\sum_{n=-\infty}^{\infty} h[n]e^{-j\omega n}\right)^* \\
&\overset{(1)}{=} \sum_{n=-\infty}^{\infty} h^*[n]e^{j\omega n} \\
&\overset{(2)}{=} \sum_{n=-\infty}^{\infty} h[n]e^{j\omega n} \\
&= H(e^{-j\omega})
\end{aligned}$$

(1) Linealidad de la operación de conjugación.

(2) $h[n]$ es real, y por lo tanto

$$h[n] = h^*[n].$$

Respuesta en frecuencia de sistemas

Respuesta de un *SLIT* a una secuencia sinusoidal (cont.)

- Se había llegado a que la salida es

$$y[n] = \frac{A}{2}\left[H(e^{j\omega_0})e^{j\phi}e^{j\omega_0 n} + H(e^{-j\omega_0})e^{-j\phi}e^{-j\omega_0 n}\right]$$

- Por la propiedad de simetría conjugada de la respuesta en frecuencia se tiene que

$$y[n] = \frac{A}{2}\left[H(e^{j\omega_0})e^{j\phi}e^{j\omega_0 n} + H^*(e^{j\omega_0})e^{-j\phi}e^{-j\omega_0 n}\right]$$

- Expresando la respuesta en frecuencia en ω_0 en magnitud y fase,

$$H(e^{j\omega_0}) = G_0 e^{j\theta_0}, \qquad \text{donde } G_0 = |H(e^{j\omega_0})| \text{ y } \theta_0 = \angle H(e^{j\omega_0})$$

  la salida queda,

$$\begin{aligned} y[n] &= \frac{A}{2}\left[G_0 e^{j\theta_0}e^{j\phi}e^{j\omega_0 n} + G_0 e^{-j\theta_0}e^{-j\phi}e^{-j\omega_0 n}\right] \\ &= \frac{A}{2}G_0\left[e^{j(\omega_0 n+\phi+\theta_0)} + e^{-j(\omega_0 n+\phi+\theta_0)}\right] \end{aligned}$$

Respuesta en frecuencia de sistemas

Respuesta de un *SLIT* a una secuencia sinusoidal (cont.)

- Se concluye que la respuesta a la entrada

$$x[n] = A\cos\left(\omega_0 n + \phi\right)$$

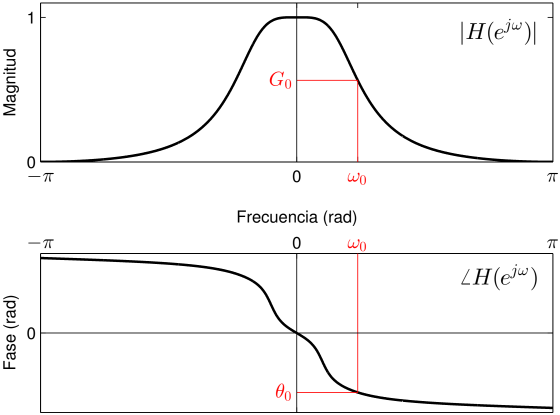
  es

$$y[n] = AG_0\cos\left(\omega_0 n + \phi + \theta_0\right)$$

- La salida del sistema es otra secuencia sinusoidal con:
  - la misma frecuencia que la secuencia sinusoidal de entrada (ω_0)
  - magnitud escalada por el factor $G_0 = |H(e^{j\omega_0})|$. El factor es la ganancia del sistema en la frecuencia ω_0 de la secuencia de entrada.
  - fase desplazada una cantidad $\theta_0 = \angle H(e^{j\omega_0})$. El desplazamiento de fase es la respuesta en fase del sistema en la frecuencia ω_0.
- Fidelidad sinusoidal de los *SLIT*: una conclusión importante que se extrae de este ejemplo, es que la respuesta de un *SLIT* a una secuencia sinusoidal es otra secuencia sinusoidal de la misma frecuencia.

Respuesta en frecuencia de sistemas

Respuesta de un *SLIT* a una secuencia sinusoidal (cont.)



- La entrada es una secuencia sinusoidal de frecuencia:

$$x[n] = A\cos(\omega_0 n + \phi)$$

- En la frecuencia ω_0 el sistema tiene:
  - respuesta en magnitud G_0
  - respuesta en fase θ_0
- La salida es entonces

$$y[n] = AG_0\cos(\omega_0 n + \phi + \theta_0)$$

- La simetría conjugada de la respuesta en frecuencia implica que la respuesta en magnitud es una función par y la respuesta en fase es una función impar.

Respuesta en frecuencia de sistemas

Periodicidad de la respuesta en frecuencia

- El concepto de respuesta en frecuencia de un *SLIT* es esencialmente igual en el caso de sistemas en tiempo continuo y en sistemas en tiempo discreto.
- Una diferencia importante, es que la respuesta en frecuencia de los sistemas en tiempo discreto es siempre periódica en la frecuencia ω, con período 2π.
- Prueba: evaluando la respuesta en frecuencia (ecuación 2) en $\omega + 2\pi$,

$$
\begin{aligned}
H(e^{j(\omega+2\pi)}) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} h[n]e^{-j(\omega+2\pi)n} \\
&\stackrel{(1)}{=} \sum_{n=-\infty}^{\infty} h[n]e^{-j\omega n} \\
&= H(e^{j\omega})
\end{aligned}
$$

(1) como $e^{\pm j2\pi n} = 1$ para n entero,

$$
\begin{aligned}
e^{-j(\omega+2\pi)n} &= e^{-j\omega n}e^{-j2\pi n} \\
&= e^{-j\omega n}
\end{aligned}
$$

- Como se cumple que $H(e^{j(\omega+2\pi)}) = H(e^{j\omega})$, $H(e^{j\omega})$ es periódica de período 2π.

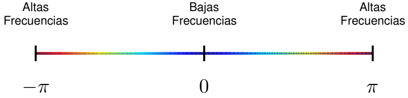
Respuesta en frecuencia de sistemas

Periodicidad de la respuesta en frecuencia

- Interpretación:
  - se vió previamente que las secuencias

$$\{e^{j\omega n}\} \quad \text{y} \quad \{e^{j(\omega+2\pi)n}\}, \qquad -\infty < n < \infty$$

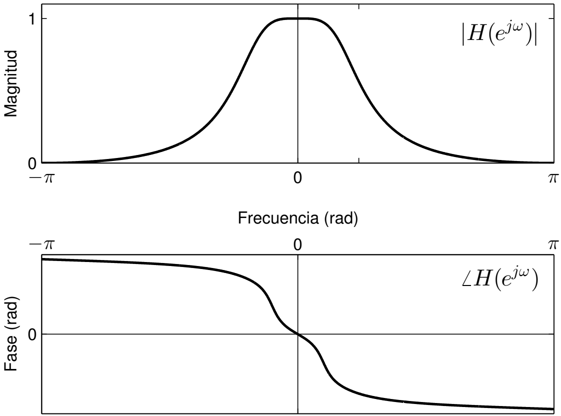
    son indistinguibles.
  - Como las dos secuencias toman valores idénticos para todo n, la respuesta del sistema debe ser la misma para ambas.
- La periodicidad de la respuesta en frecuencia hace que solo sea necesario especificarla en un intervalo de frecuencia de longitud 2π, por ejemplo, en $-\pi < \omega < \pi$.
- En este intervalo, las frecuencias cercanas a 0 corresponden a bajas frecuencias y las frecuencias cercanas a $\pm\pi$ corresponden a las altas frecuencias.



Respuesta en frecuencia de sistemas

Respuesta de un *SLIT* a una secuencia sinusoidal (cont.)

- Se considera el sistema con repuesta en frecuencia mostrada en la figura.
- Por la propiedad de simetría conjugada de la respuesta en frecuencia, alcanzaría con especificar la respuesta en frecuencia en $0 \leq \omega < \pi$.
- ¿Qué hace este sistema?



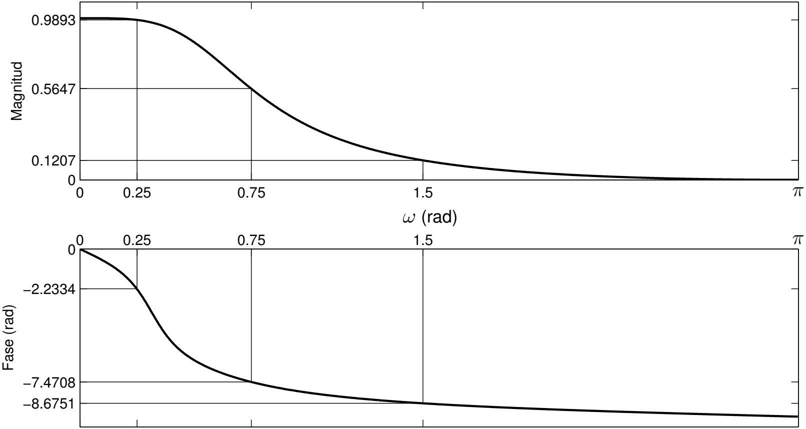
- El sistema tiene:
  - ganancia unitaria en torno a la frecuencia 0 radianes.
  - ganancia casi nula en torno a las frecuencias $\pm\pi$ radianes.
- El sistema deja pasar las bajas frecuencias inalteradas e impide pasar las frecuencias altas.

Filtro pasabajos

Respuesta en frecuencia de sistemas

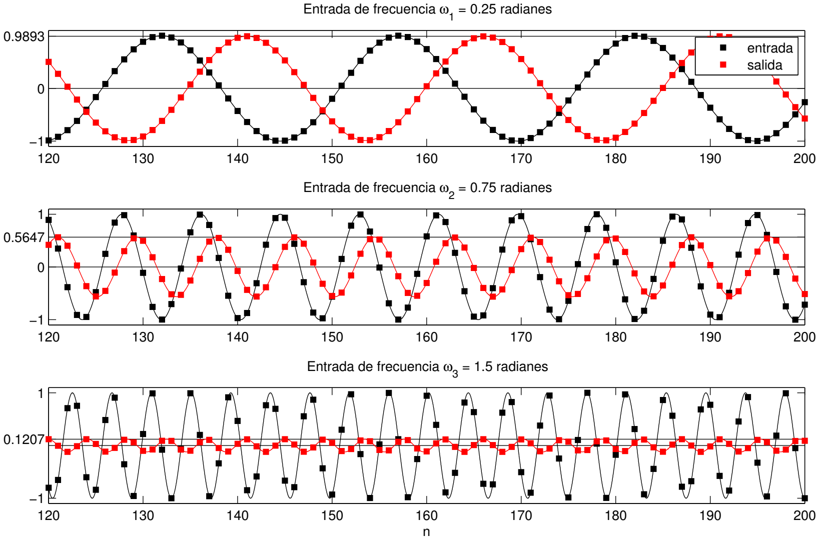
Respuesta de un *SLIT* a una secuencia sinusoidal (cont.)

- La entrada al sistema son las secuencias sinusoidales $x_1[n]$, $x_2[n]$ y $x_3[n]$ de frecuencias $\omega_1 = 0.25$, $\omega_2 = 0.75$ y $\omega_3 = 1.5$ radianes respectivamente.



Respuesta en frecuencia de sistemas

Respuesta de un *SLIT* a una secuencia sinusoidal (cont.)



Respuesta en frecuencia de sistemas

Interpretación de la respuesta en fase

- Si en la frecuencia $\omega = \omega_0$ el sistema tiene ganancia $G_0 = |H(e^{j\omega_0})|$ y respuesta en fase $\theta_0 = \angle H(e^{j\omega_0})$, entonces

Entrada	Salida
$x[n] = A\cos(\omega_0 n)$	$y[n] = AG_0\cos(\omega_0 n + \theta_0)$

- La alteración en la fase se puede ver como un retardo en la señal,

$$y[n] = AG_0\cos\left[\omega_0\left(n - \left(-\frac{\theta_0}{\omega_0}\right)\right)\right]$$

- Se define el retardo de fase como la cantidad

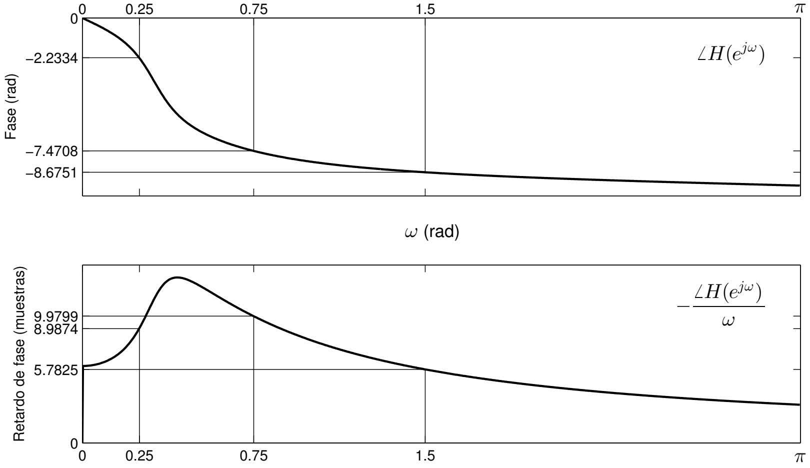
$$\tau_\phi(\omega) = -\frac{\angle H(e^{j\omega})}{\omega}$$

- Se interpreta como el número de muestras (no necesariamente entero) que el sistema retarda a la secuencia sinusoidal de salida respecto a la de entrada.

Respuesta en frecuencia de sistemas

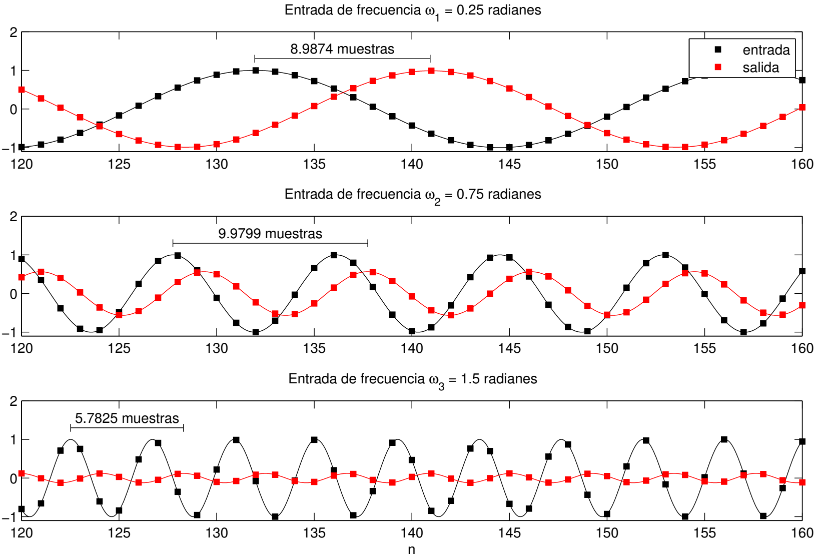
Respuesta de un *SLIT* a una secuencia sinusoidal (cont.)

- Dividiendo la respuesta en fase entre ω para todo ω se obtiene el retardo de fase para cada frecuencia.



Respuesta en frecuencia de sistemas

Respuesta de un *SLIT* a una secuencia sinusoidal (cont.)



Respuesta en frecuencia de sistemas

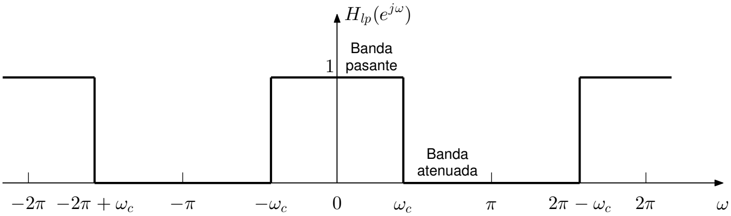
Filtros selectores de frecuencias ideales

- Los filtros selectores de frecuencia ideales son sistemas cuya respuesta en frecuencia tiene ganancia unitaria en cierto rango de frecuencias y ganancia nula en el resto.
- De esta forma permiten pasar inalterada cierta banda de frecuencias y bloquean completamente al resto.
- Hay cuatro tipos básicos:
  - pasabajos
  - pasaltos
  - pasabanda
  - suprimebanda

Respuesta en frecuencia de sistemas

Filtros selectores de frecuencias ideales

Filtro pasabajos ideal

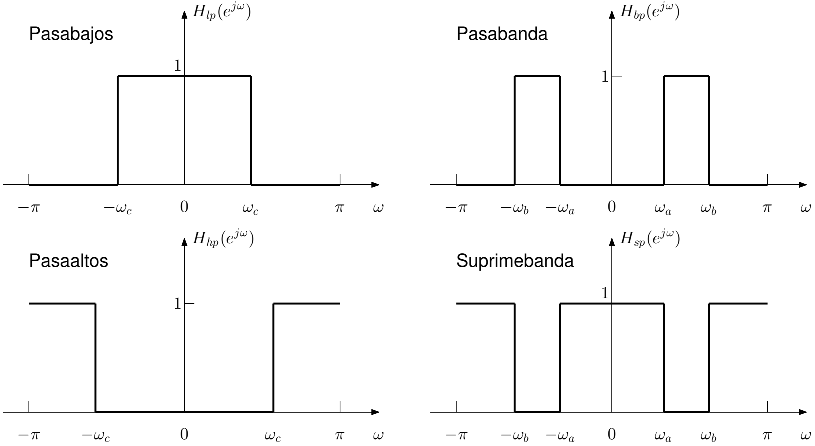


- Clasificación de las regiones en frecuencia de los filtros selectores
  - Banda pasante: Rango de frecuencias que el filtro permite pasar sin alterar.
  - Banda atenuada: Rango de frecuencias que el filtro bloquea.
  - Frecuencia de corte (ω_c): Frecuencia entre la banda pasante y la banda de transición.

Respuesta en frecuencia de sistemas

Filtros selectores de frecuencias ideales

Tipos de filtros selectores de frecuencias



Respuesta en frecuencia de sistemas

Respuesta en frecuencia del sistema de media móvil

Ecuación de transformación

$$y[n] = \frac{1}{M+1}\sum_{k=0}^{M} x[n-k]$$

Respuesta al impulso

$$h[n] = \begin{cases} \dfrac{1}{M+1}, & 0 \leq n \leq M \\ 0, & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

- Empleando la definición de la respuesta en frecuencia (ecuación 2), se tiene que

$$\begin{aligned} H(e^{j\omega}) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} h[n]e^{-j\omega n} \\ &= \frac{1}{M+1}\sum_{n=0}^{M} e^{-j\omega n} \\ &\overset{(1)}{=} \frac{1}{M+1}\frac{1-e^{-j\omega(M+1)}}{1-e^{-j\omega}} \end{aligned}$$

(1) Suma de los primeros M términos de una serie geométrica:

$$\sum_{n=0}^{M-1} r^n = \frac{1-r^M}{1-r}.$$

En este caso,

$$r = e^{-j\omega}.$$

Respuesta en frecuencia de sistemas

Respuesta en frecuencia del sistema de media móvil

$$H(e^{j\omega}) = \frac{1}{M+1}\frac{1-e^{-j\omega(M+1)}}{1-e^{-j\omega}}$$

- Sacando de factor común $e^{-j\omega(M+1)/2}$ en el numerador y $e^{-j\omega/2}$ en el denominador, queda

$$H(e^{j\omega}) = \frac{1}{M+1}\frac{e^{-j\omega(M+1)/2}}{e^{-j\omega/2}}\frac{e^{j\omega(M+1)/2}-e^{-j\omega(M+1)/2}}{e^{j\omega/2}-e^{-j\omega/2}}$$

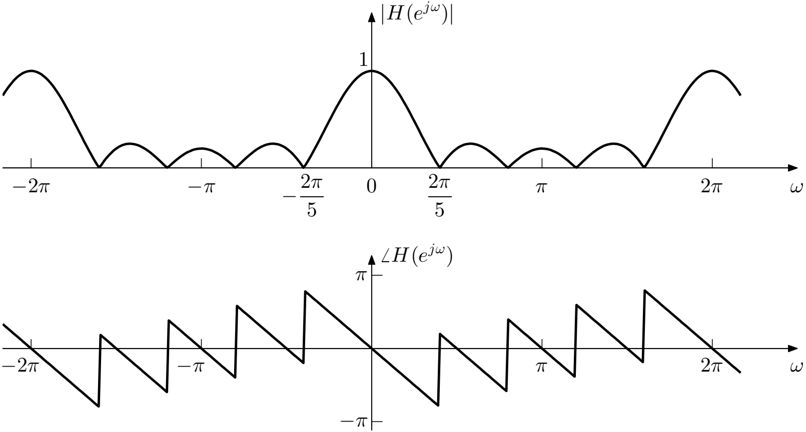
- y operando, se llega a que

$$H(e^{j\omega}) = e^{-j\omega M/2}\frac{1}{M+1}\frac{\sin(\omega(M+1)/2)}{\sin(\omega/2)}.$$

Respuesta en frecuencia de sistemas

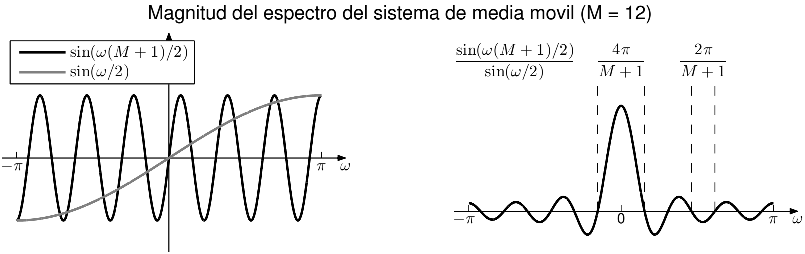
Respuesta en frecuencia del sistema de media móvil

Filtro de media móvil con $M = 4$.



Respuesta en frecuencia de sistemas

Respuesta en frecuencia del sistema de media móvil



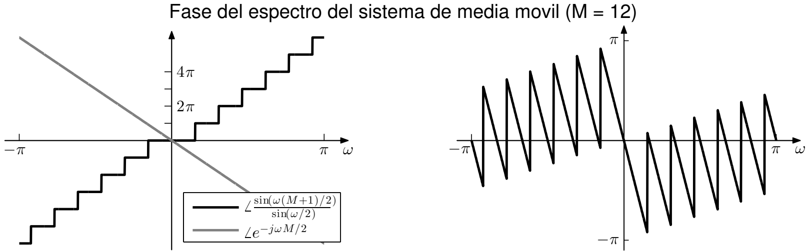
- La respuesta en frecuencia se anula en

$$\frac{\omega(M+1)}{2} = k\pi, \quad \forall k \in \mathbb{Z} \quad \Rightarrow \quad \omega = \frac{2k\pi}{M+1}, \quad \forall k \in \mathbb{Z}$$

- El ancho del lóbulo principal es $\dfrac{4\pi}{M+1}$ radianes. Decrece con M.
- La velocidad de las oscilaciones crece con M.

Respuesta en frecuencia de sistemas

Respuesta en frecuencia del sistema de media móvil



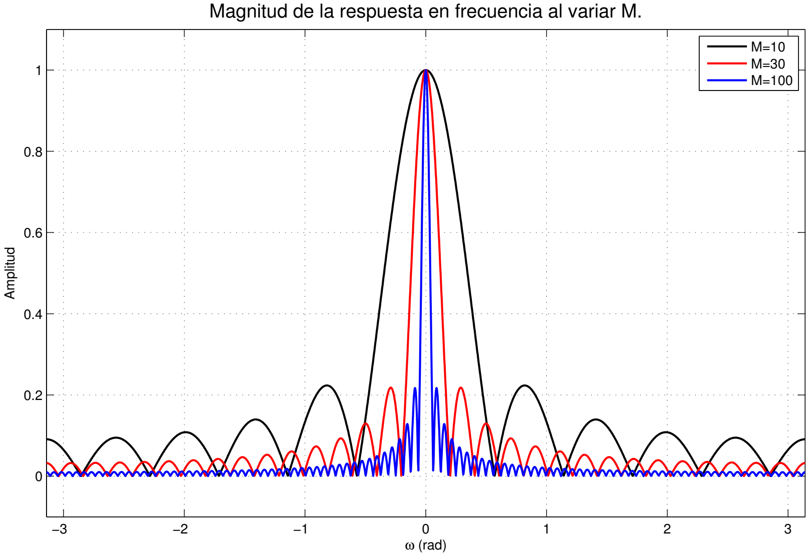
- La fase de la respuesta en frecuencia es

$$\angle H(e^{j\omega}) = \angle e^{-j\omega M/2} + \angle \frac{\sin(\omega(M+1)/2)}{\sin(\omega/2)} = -\omega M/2 + \angle \frac{\sin(\omega(M+1)/2)}{\sin(\omega/2)}$$

- El segundo término es real, por lo que su fase es $2k\pi$ cuando es positivo o $\pi + 2k\pi$ cuando es negativo.
- La fase es lineal con saltos de π.

Respuesta en frecuencia de sistemas

Respuesta en frecuencia del sistema de media móvil



Transformada de Fourier en Tiempo Discreto

Motivación

- Las secuencias exponenciales complejas son funciones propias de los sistemas lineales invariantes en el tiempo,

$$e^{j\omega n} \longrightarrow \boxed{h[n]} \longrightarrow H(e^{j\omega})e^{j\omega n}$$

- El valor propio $H(e^{j\omega})$ es una constante compleja que depende de la frecuencia ω de la exponencial de entrada. Indica como el sistema modifica la magnitud y la fase de la entrada.
- $H(e^{j\omega})$ se llama respuesta en frecuencia del sistema y se obtiene a partir de la respuesta al impulso como,

$$H(e^{j\omega}) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k]e^{-j\omega k}.$$

- Conociendo la respuesta en frecuencia del sistema, se conoce la salida cuando la entrada es cualquier secuencia exponencial compleja.

Transformada de Fourier en Tiempo Discreto

Motivación

- Sea $x[n]$ la entrada a un sistema lineal e invariante en el tiempo.
  1. Si fuera posible expresar la secuencia de entrada como combinación lineal de exponenciales complejas,
  $$x[n] = \sum_k \alpha_k e^{j\omega_k n},$$
  2. y además se conoce la respuesta en frecuencia del sistema $H(e^{j\omega})$,
- se conoce la salida, que por el principio de superposición sería
$$y[n] = \sum_k \alpha_k H(e^{j\omega_k}) e^{j\omega_k n}.$$

La transformada de Fourier de una secuencia indica como se descompone la secuencia en una combinación lineal de exponenciales complejas.

Transformada de Fourier en Tiempo Discreto

Representación de Fourier de una secuencia

- Una secuencia puede ser representada mediante una integral de Fourier como
$$x[n] = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} X(e^{j\omega})e^{j\omega n}d\omega. \tag{3}$$
- donde
$$X(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]e^{-j\omega n}. \tag{4}$$
- La ecuación 3 es la transformada de Fourier inversa. Es la fórmula de síntesis de $x[n]$, ya que indica como construir $x[n]$ mediante la superposición de exponenciales complejas de la forma
$$\frac{1}{2\pi}X(e^{j\omega})e^{j\omega n}d\omega$$
  - superposición de infinitas exponenciales, una de cada frecuencia posible en un intervalo de 2π radianes.
  - $X(e^{j\omega})$ determina la amplitud y la fase relativa de cada exponencial.

Transformada de Fourier en Tiempo Discreto

Representación de Fourier de una secuencia

- La ecuación 4,

$$X(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]e^{-j\omega n},$$

  es la transformada de Fourier de $x[n]$.
- Es la ecuación de análisis de $x[n]$, ya que al obtener $X(e^{j\omega})$, se determina la magnitud y la fase de cada exponencial compleja para generar $x[n]$ usando la ecuación 3.
- Transforma una secuencia en una función de variable continua.
- Observación:
  - La respuesta al impulso de un sistema lineal invariante en el tiempo (ecuación 2) se definió como

$$H(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} h[n]e^{-j\omega n}.$$

    Por lo tanto, la respuesta en frecuencia es la transformada de Fourier de la respuesta al impulso.

Transformada de Fourier en Tiempo Discreto

Representación de Fourier de una secuencia

Observaciones

- La transformada de Fourier es una función compleja de ω y se puede representar de forma rectangular o polar,

Parte real y parte imaginaria

$$X(e^{j\omega}) = X_R(e^{j\omega}) + jX_I(e^{j\omega})$$

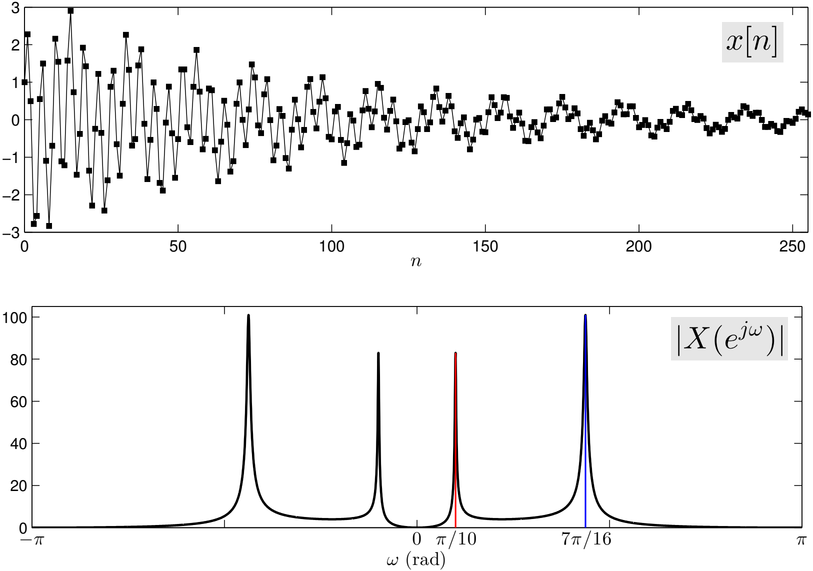
Magnitud y fase

$$X(e^{j\omega}) = |X(e^{j\omega})|e^{j\angle X(e^{j\omega})}$$

- Es una función periódica de período 2π, como se demostró para la respuesta en frecuencia.
- Es común el uso del término espectro para referirse a la transformada de Fourier.
- Cualitativamente, la transformada de Fourier indica la prominencia de componentes sinusoidales en la señal. Una magnitud grande del espectro en cierta frecuencia indica la presencia de un componente sinusoidal de gran amplitud de esa frecuencia en la señal.

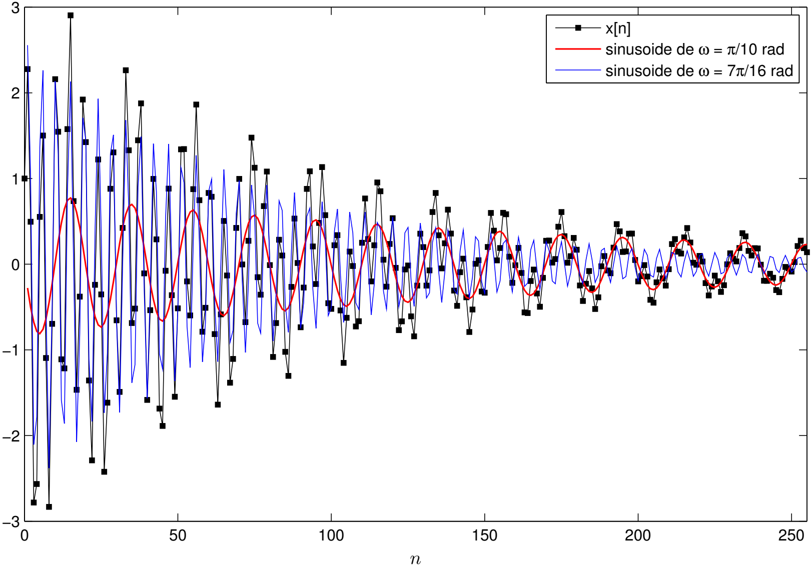
Transformada de Fourier en Tiempo Discreto

Representación de Fourier de una secuencia



Transformada de Fourier en Tiempo Discreto

Representación de Fourier de una secuencia



Transformada de Fourier en Tiempo Discreto

Representación de Fourier de una secuencia

- La señal $x[n]$ es la suma de dos sinusoides de frecuencias $\pi/10$ y $7\pi/16$ radianes con envolvente exponencial decreciente.
- La transformada de Fourier $X(e^{j\omega})$ tiene amplitud grande en las frecuencias $\pi/10$ y $7\pi/16$ radianes, indicando la presencia de componentes sinusoidales de esas frecuencias en la señal $x[n]$.

Transformada de Fourier en Tiempo Discreto

Transformada y transformada inversa

- Las ecuaciones 4 y 3 de la transformada y la transformada inversa son inversas una de la otra.

Transformada de Fourier

$$X(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]e^{-j\omega n}$$

Transformada inversa de Fourier

$$x[n] = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} X(e^{j\omega})e^{j\omega n}d\omega$$

- Demostración: sustituyendo la transformada de $x[n]$ en la ecuación de la antitransformada, se tiene que

$$\hat{x}[n] = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left(\sum_{m=-\infty}^{\infty} x[m]e^{-j\omega m}\right)e^{j\omega n}d\omega.$$

Si $\hat{x}[n] = x[n]$, las ecuaciones son inversas.

- Si la sumatoria infinita converge uniformemente para todo ω (ver apéndice), se puede intercambiar el orden de integración y suma,

$$\hat{x}[n] = \sum_{m=-\infty}^{\infty} x[m]\left(\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{j\omega(n-m)}d\omega\right) \tag{5}$$

Transformada de Fourier en Tiempo Discreto

Transformada y transformada inversa

- La integral entre paréntesis se resuelve como

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{j\omega(n-m)}d\omega &= \frac{1}{2\pi}\left.\frac{e^{j\omega(n-m)}}{j(n-m)}\right|_{-\pi}^{\pi} \\
&= \frac{1}{2\pi}\frac{e^{j\pi(n-m)} - e^{j\pi(n-m)}}{j(n-m)} \\
&= \frac{\sin \pi(n-m)}{\pi(n-m)} \\
&\overset{(1)}{=} \begin{cases} 1, & m = n, \\ 0, & m \neq n, \end{cases} \\
&= \delta[n-m]
\end{aligned}
$$

(1) Se usa que

- Para todo $k \in \mathbb{Z}$

$$\sin \pi k = 0$$

- Regla de L'Hôpital para evaluar en $n = m$:
  Si

$$\lim_{x\to c} f(x) = \lim_{x\to c} g(x) = 0$$

entonces

$$\lim_{x\to c}\frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to c}\frac{f'(x)}{g'(x)}$$

- Sustituyendo este resultado en la ecuación 5 se llega a que

$$\hat{x}[n] = \sum_{m=-\infty}^{\infty} x[m]\delta[n-m] = x[n].$$

Transformada de Fourier en Tiempo Discreto

Existencia de la representación de Fourier

- La existencia de la transformada de Fourier está determinada por la convergencia de la sumatoria en la ecuación 4.
- Concretamente, la transformada de Fourier existe si se cumple que

$$|X(e^{j\omega})| < \infty \qquad \text{para todo } \omega.$$

- Una condición suficiente de existencia puede establecerse de la siguiente forma,

$$\begin{aligned} |X(e^{j\omega})| &= \left| \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]e^{-j\omega n} \right| \\ &\overset{(1)}{\leq} \sum_{n=-\infty}^{\infty} |x[n]||e^{-j\omega n}| \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} |x[n]| < \infty \end{aligned}$$

(1) Se usa:

- Desigualdad triangular
- El módulo del producto es igual al producto de los módulos

Transformada de Fourier en Tiempo Discreto

Existencia de la representación de Fourier

- Se concluye que una condición suficiente para la existencia de la transformada de Fourier de una secuencia, es que la secuencia sea absolutamente sumable.
  - Además, en ese caso la sumatoria converge uniformemente a una función continua de ω.
- Observaciones:
  - La respuesta en frecuencia de un sistema estable siempre existe y es una función continua de ω.
    - La condición necesaria y suficiente de estabilidad es que la respuesta al impulso del sistema sea absolutamente sumable.
  - Las secuencias de duración finita siempre son absolutamente sumables y por lo tanto siempre tienen representación de Fourier.
    - Los sistemas FIR siempre son estables y por lo tanto tienen respuesta en frecuencia finita y continua.
  - Para secuencias de duración infinita es necesario verificar la condición de existencia en cada caso particular.

Transformada de Fourier en Tiempo Discreto

Transformada de Fourier de exponencial causal

- Calcular la transformada de Fourier de la secuencia

$$x[n] = a^n u[n], \qquad a \in \mathbb{C}.$$

- La transformada de Fourier es,

$$\begin{aligned} X(e^{j\omega}) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]e^{-j\omega n} \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} a^n u[n]e^{-j\omega n} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} a^n e^{-j\omega n} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} (ae^{-j\omega})^n \end{aligned}$$

- El resultado es una serie geométrica que converge si

$$|ae^{-j\omega}| < 1 \Leftrightarrow |a| < 1$$

y en ese caso vale

$$X(e^{j\omega}) = \frac{1}{1 - ae^{-j\omega}}.$$

- Previamente se había visto que la condición de sumabilidad absoluta de $x[n]$ es que $|a| < 1$.

Transformada de Fourier en Tiempo Discreto

Existencia de la representación de Fourier

- La sumabilidad absoluta es una condición suficiente para la existencia de la transformada de Fourier que además garantiza la convergencia uniforme de la serie.
- Es posible encontrar una representación de Fourier para secuencias que no son absolutamente sumables, pero son cuadráticamente sumables, es decir,

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |x[n]|^2 < \infty$$

- La serie converge puntualmente para todo valor de ω pero no converge uniformemente.
- La convergencia en este caso, es en media cuadrática:

$$\lim_{M\to\infty} |X(e^{j\omega}) - X_M(e^{j\omega})|^2 = 0,$$

  donde

$$X_M(e^{j\omega}) = \sum_{n=-M}^{M} x[n]e^{-j\omega n}.$$

Transformada de Fourier en Tiempo Discreto

Representación de Fourier de pasabajos ideal

- El pasabjos ideal se definió a partir de la respuesta en frecuencia,

$$H_{lp}(e^{j\omega}) = \begin{cases} 1, & |\omega| < \omega_c, \\ 0, & \omega_c < |\omega| < \pi. \end{cases}$$

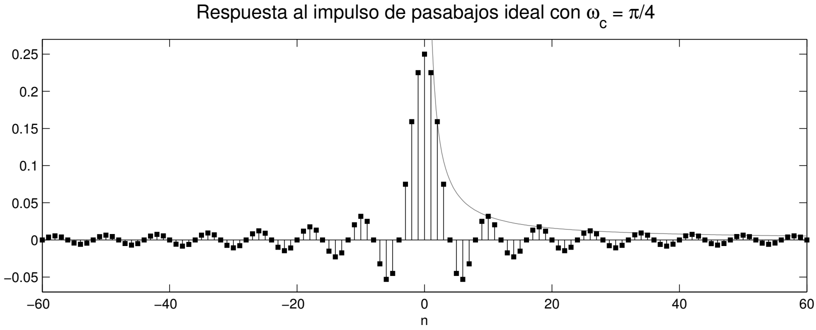
  Se quiere encontrar la respuesta al impulso.

- Para esto hay que usar la transformada inversa de Fourier,

$$\begin{aligned} h_{lp}[n] &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} H_{lp}(e^{j\omega})e^{j\omega n}d\omega \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\omega_c}^{\omega_c} e^{j\omega n}d\omega \\ &= \frac{1}{2\pi}\frac{e^{j\omega n}}{jn}\bigg|_{-\omega_c}^{\omega_c} = \frac{1}{2\pi jn}\left(e^{j\omega_c n} - e^{-j\omega_c n}\right) \\ &= \frac{\sin\omega_c n}{\pi n}, \qquad -\infty < n < \infty. \end{aligned}$$

Transformada de Fourier en Tiempo Discreto

Representación de Fourier de pasabajos ideal



Observaciones:

- El pasabajos ideal no es causal, ya que $h_{lp}[n] \neq 0$ en $n < 0$.
- Los valores de la secuencia decaen como $1/n$, y por lo tanto $h_{lp}[n]$ no es absolutamente sumable.

Representación de Fourier de pasabajos ideal

- Como $h_{lp}[n]$ no es absolutamente sumable, su transformada de Fourier,

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{\sin \omega_c n}{\pi n} e^{-j\omega n},$$

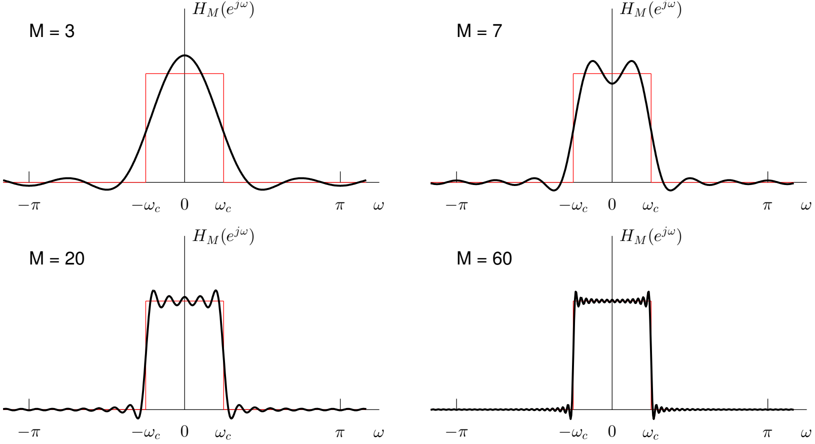
no converge uniformemente para todos los valores de ω.

- Esto puede verse intuitivamente si se considera la suma de una cantidad finita de términos,

$$H_M(e^{j\omega}) = \sum_{n=-M}^{M} \frac{\sin \omega_c n}{\pi n} e^{-j\omega n}$$

Transformada de Fourier en Tiempo Discreto

Representación de Fourier de pasabajos ideal



Transformada de Fourier en Tiempo Discreto

Representación de Fourier de pasabajos ideal

Observaciones:

- A medida que M crece, las oscilaciones son mas rápidas, pero la amplitud de las oscilaciones no decrece.
- Cuando $M \to \infty$, la amplitud de las oscilaciones no tiende a cero, pero se concentran en torno a la frecuencia ω_c.
- Esto implica que $H_M(e^{j\omega})$ no converge uniformemente a $H_{lp}(e^{j\omega})$.
- Sin embargo, como $h_{lp}[n]$ es cuadráticamente sumable, $H_M(e^{j\omega})$ converge a $H_{lp}(e^{j\omega})$ de forma cuadrática media, y las funciones únicamente difieren en $\omega = \omega_c$.

Transformada de Fourier en Tiempo Discreto

Notación

- El símbolo $\mathcal{F}$ denota la operación de tomar la transformada de Fourier de $x[n]$,
$$X(e^{j\omega}) = \mathcal{F}\left\{x[n]\right\}.$$

- De forma acorde, el símbolo $\mathcal{F}^{-1}$ indica tomar la antitransformada de Fourier,
$$x[n] = \mathcal{F}^{-1}\left\{X(e^{j\omega})\right\}.$$

- La notación para indicar que una secuencia $x[n]$ y una función $X(e^{j\omega})$ forman un par de transformadas de Fourier es
$$x[n] \overset{\mathcal{F}}{\longleftrightarrow} X(e^{j\omega}).$$

Transformada de Fourier en Tiempo Discreto

Propiedades de simetría de la transformada de Fourier

- Sea
$$x[n] \xleftrightarrow{\mathcal{F}} X(e^{j\omega}).$$
- Entonces se cumple que:
  1. Transformada de Fourier de la secuencia invertida temporalmente
  $$x[-n] \xleftrightarrow{\mathcal{F}} X(e^{-j\omega}).$$
  2. Transformada de Fourier de la secuencia conjugada
  $$x^*[n] \xleftrightarrow{\mathcal{F}} X^*(e^{-j\omega}).$$
  3. Transformada de Fourier de la secuencia conjugada e invertida temporalmente
  $$x^*[-n] \xleftrightarrow{\mathcal{F}} X^*(e^{j\omega}).$$

Transformada de Fourier en Tiempo Discreto

Propiedades de simetría de la transformada de Fourier

Demostración: como por hipótesis $X(e^{j\omega})$ es la transformada de Fourier de $x[n]$, se tiene que

$$X(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]e^{-j\omega n}$$

Propiedad 1.

$$\begin{aligned}\mathcal{F}\{x[-n]\} &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[-n]e^{-j\omega n}\\ &\underset{k=-n}{=} \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]e^{j\omega k}\\ &= X(e^{-j\omega}).\end{aligned}$$

Propiedad 2.

$$\begin{aligned}\mathcal{F}\{x^*[n]\} &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} x^*[n]e^{-j\omega n}\\ &= \left(\sum_{k=-\infty}^{\infty} x[n]e^{j\omega n}\right)^*\\ &= X^*(e^{-j\omega}).\end{aligned}$$

Transformada de Fourier en Tiempo Discreto

Propiedades de simetría de la transformada de Fourier

$$x[n] \xleftrightarrow{\mathcal{F}} X(e^{j\omega}) \qquad \text{con } x[n] \text{ real.}$$

La transformada de Fourier es simétrica conjugada:	$X(e^{j\omega}) = X^*(e^{-j\omega})$
La magnitud es una función par:	$\lvert X(e^{j\omega})\rvert = \lvert X(e^{-j\omega})\rvert$
La fase es una función impar:	$\angle X(e^{j\omega}) = -\angle X(e^{-j\omega})$
La parte real es par:	$X_R(e^{j\omega}) = X_R(e^{-j\omega})$
La parte imaginaria es impar:	$X_I(e^{j\omega}) = -X_I(e^{-j\omega})$

- Ejercicio: usando las propiedades de simetría, demostrar que si $x[n]$ es real y par, la transformada de Fourier $X(e^{j\omega})$ es real y par.

Transformada de Fourier en Tiempo Discreto

Transformada de Fourier de exponencial causal

- Considerar la transformada de Fourier de la exponencial compleja causal,
$$X(e^{j\omega}) = \frac{1}{1 - ae^{-j\omega}}.$$
- La función compleja conjugada evaluada en $-\omega$ es
$$X^*(e^{-j\omega}) = \left(\frac{1}{1 - ae^{j\omega}}\right)^* \underset{a \text{ real}}{=} \frac{1}{1 - ae^{-j\omega}} = X(e^{j\omega}),$$
cumpliéndose la primer propiedad.
- Para ver que se cumplen la segunda y tercer propiedad, hay que calcular la magnitud y la fase. Para eso, se comienza expresando la exponencial del denominador en parte real y parte imaginaria,
$$\begin{aligned} X(e^{j\omega}) &= \frac{1}{1 - a\cos(-\omega) - ja\sin(-\omega)} \\ &= \frac{1}{1 - a\cos(\omega) + ja\sin(\omega)} \end{aligned}$$

Transformada de Fourier en Tiempo Discreto

Transformada de Fourier de exponencial causal

- La magnitud es entonces,

$$|X(e^{j\omega})| = \frac{1}{\sqrt{(1-a\cos\omega)^2 + a^2\sin^2\omega}}$$
$$\stackrel{(1)}{=} \frac{1}{\sqrt{1+a^2-2a\cos\omega}}$$

- Se usó que

$$\cos^2\omega + \sin^2\omega = 1$$

y como $\cos\omega$ es una función par, $|X(e^{j\omega})|$ también es una función par.

- La fase es

$$\begin{aligned}\angle X(e^{j\omega}) &= \angle(1) - \angle(1 - a\cos\omega + ja\sin\omega)\\ &= -\arctan\left(\frac{a\sin\omega}{1-a\cos\omega}\right)\\ &= \arctan\left(\frac{-a\sin\omega}{1-a\cos\omega}\right),\end{aligned}$$

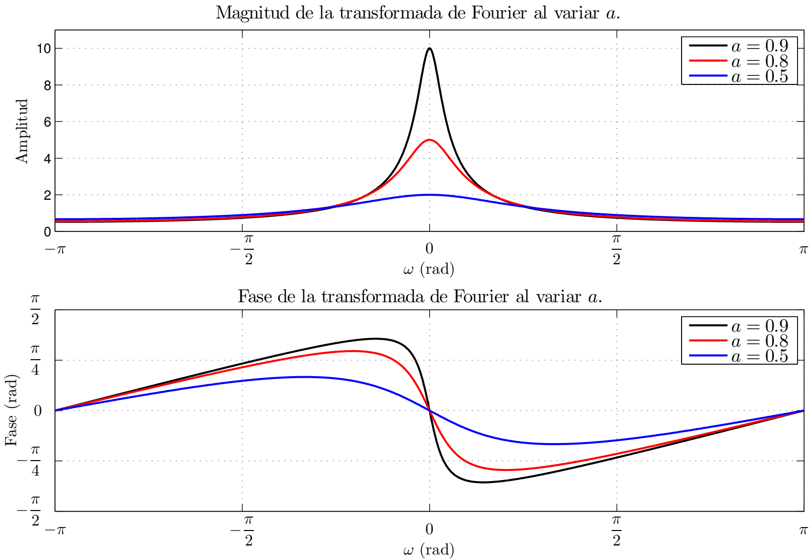
y se cumple que

$$\angle X(e^{j\omega}) = -\angle X(e^{-j\omega}),$$

es decir, es una función impar (la función $\arctan(x)$ es impar).

Transformada de Fourier en Tiempo Discreto

Transformada de Fourier de exponencial causal



Propiedades y teoremas de la transformada de Fourier

Linealidad de la transformada de Fourier

- Si
$$x_1[n] \overset{\mathcal{F}}{\longleftrightarrow} X_1(e^{j\omega}) \qquad \text{y} \qquad x_2[n] \overset{\mathcal{F}}{\longleftrightarrow} X_2(e^{j\omega})$$
- se cumple que
$$ax_1[n] + bx_2[n] \overset{\mathcal{F}}{\longleftrightarrow} aX_1(e^{j\omega}) + bX_2(e^{j\omega})$$

Desplazamiento temporal y desplazamiento en frecuencia

- Si $x[n] \overset{\mathcal{F}}{\longleftrightarrow} X(e^{j\omega})$, se cumple que
  - Desplazamiento temporal
$$x[n - n_d] \overset{\mathcal{F}}{\longleftrightarrow} e^{-j\omega n_d} X(e^{j\omega})$$
  - Desplazamiento en frecuencia
$$e^{j\omega_0 n} x[n] \overset{\mathcal{F}}{\longleftrightarrow} X(e^{j(\omega - \omega_0)})$$

Ejemplo: sistema de media móvil simétrico

Sistema de media móvil causal

Respuesta al impulso

$$h[n] = \begin{cases} \dfrac{1}{M+1}, & 0 \leq n \leq M \\ 0, & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Respuesta en frecuencia

$$H(e^{j\omega}) = \frac{e^{-j\omega M/2}}{M+1}\frac{\sin(\omega(M+1)/2)}{\sin(\omega/2)}$$

- Se quiere calcular la transformada de Fourier de la secuencia

$$h_s[n] = \begin{cases} \dfrac{1}{M+1}, & -M/2 \leq n \leq M/2 \\ 0, & \text{en otro caso.} \end{cases} \qquad \text{(real y par)}$$

- Observando que

$$h_s[n] = h[n+M/2]$$

- Propiedad de desplazamiento temporal

$$H_s(e^{j\omega}) = e^{j\omega M/2}H(e^{j\omega})$$

- Se concluye que

$$H_s(e^{j\omega}) = \frac{1}{M+1}\frac{\sin(\omega(M+1)/2)}{\sin(\omega/2)} \qquad \text{(real y par)}$$

Propiedades y teoremas de la transformada de Fourier

Diferenciación en frecuencia

- Si $x[n] \overset{\mathcal{F}}{\longleftrightarrow} X(e^{j\omega})$, se cumple que

$$nx[n] \overset{\mathcal{F}}{\longleftrightarrow} j\frac{dX(e^{j\omega})}{d\omega}$$

Teorema de Parseval

- Si $x[n] \overset{\mathcal{F}}{\longleftrightarrow} X(e^{j\omega})$, se cumple que

$$E = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |x[n]|^2 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |X(e^{j\omega})|^2 d\omega$$

Propiedades y teoremas de la transformada de Fourier

Teorema de la convolución

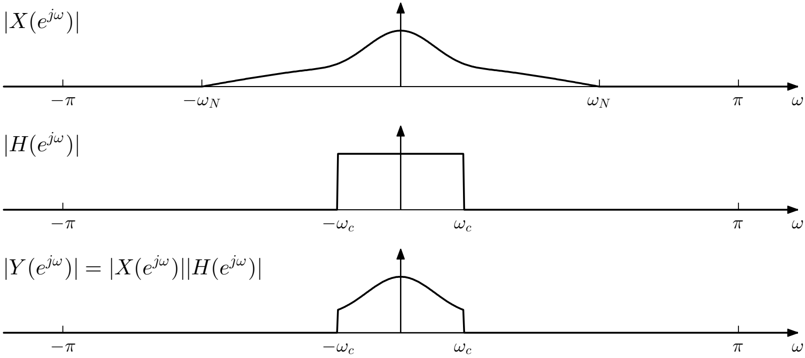
- Si
$$x[n] \overset{\mathcal{F}}{\longleftrightarrow} X(e^{j\omega}) \qquad \text{y} \qquad h[n] \overset{\mathcal{F}}{\longleftrightarrow} H(e^{j\omega})$$
y además
$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]h[n-k] = x[n] * h[n]$$
- se cumple que
$$Y(e^{j\omega}) = X(e^{j\omega})H(e^{j\omega}).$$
- Este teorema indica que la transformada de Fourier transforma la operación de convolución en el tiempo en la operación de producto en la frecuencia.

Propiedades y teoremas de la transformada de Fourier

- Consecuencia del teorema de la convolución: la transformada de Fourier de la salida de un *SLIT* es el producto de la respuesta en frecuencia del sistema con la transformada de Fourier de la entrada.

$$x[n] \longrightarrow \boxed{h[n]} \longrightarrow y[n] = x[n] * h[n]$$

$$X(e^{j\omega}) \longrightarrow \boxed{H(e^{j\omega})} \longrightarrow Y(e^{j\omega}) = X(e^{j\omega})H(e^{j\omega})$$



Propiedades y teoremas de la transformada de Fourier

Teorema de la convolución

- Otra forma de calcular la salida de un *SLIT*:
  1. Se calcula la transformada de Fourier de la entrada y la respuesta al impulso,

     $$X(e^{j\omega}) = \mathcal{F}\{x[n]\} \qquad\qquad H(e^{j\omega}) = \mathcal{F}\{h[n]\}$$

  2. Se multiplican esas transformadas obteniendo la transformada de Fourier de la salida,

     $$Y(e^{j\omega}) = X(e^{j\omega})H(e^{j\omega})$$

  3. Se aplica la transformada inversa para obtener la secuencia de salida,

     $$y[n] = \mathcal{F}^{-1}\left\{Y(e^{j\omega})\right\}$$

- Observación: puede ser mas fácil o menos costoso computacionalmente calcular la convolución usando la transformada de Fourier que calcular la convolución mediante su definición.

Propiedades y teoremas de la transformada de Fourier

Teorema de enventanado o modulación

- Si

$$x[n] \xleftrightarrow{\mathcal{F}} X(e^{j\omega}) \qquad \text{y} \qquad w[n] \xleftrightarrow{\mathcal{F}} W(e^{j\omega})$$

  y además

$$y[n] = x[n]w[n]$$

- se cumple que

$$Y(e^{j\omega}) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} X(e^{j\theta})W(e^{j(\omega-\theta)})d\theta \equiv X(e^{j\omega}) * W(e^{j\omega})$$

- $Y(e^{j\omega})$ es la convolución periódica entre $X(e^{j\omega})$ y $W(e^{j\omega})$.
- Este teorema indica que la transformada de Fourier convierte la operación de multiplicación en el tiempo en la operación de convolución en la frecuencia.

Propiedades y teoremas de la transformada de Fourier

Aplicación: diseño de filtros FIR por enventanado

- Se vio previamente que la respuesta al impulso del filtro pasabajos ideal es de duración infinita,

$$h_{lp}[n] = \frac{\sin \omega_c n}{\pi n}, \qquad -\infty < n < \infty.$$

  - El sistema no se puede implementar mediante el producto convolución porque se requieren infinitas cuentas para calcular cada muestra de la salida.
  - El sistema tampoco admite una representación en una ecuación en recurrencia.
- Una posibilidad, es truncar la respuesta al impulso mediante la multiplicación con una ventana rectangular $w[n]$, con

$$w[n] = \begin{cases} 1, & -M/2 \leq n \leq M/2, \\ 0, & \text{en otro caso} \end{cases}$$

- La respuesta al impulso resultante es

$$h[n] = h_{lp}[n]w[n] = \begin{cases} \dfrac{\sin \omega_c n}{\pi n}, & -M/2 \leq n \leq M/2, \\ 0, & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Propiedades y teoremas de la transformada de Fourier

Aplicación: diseño de filtros FIR por enventanado

- Por el teorema de enventanado, la respuesta en frecuencia del sinc truncado $h[n]$ es

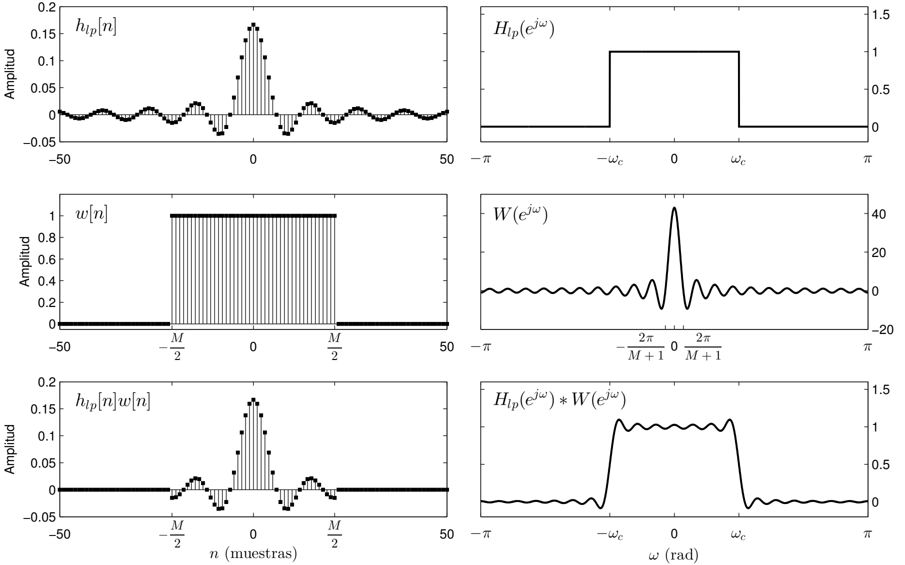
$$H(e^{j\omega}) = H_{lp}(e^{j\omega}) * W(e^{j\omega})$$

donde

$$H_{lp}(e^{j\omega}) = \begin{cases} 1, & |\omega| < \omega_c, \\ 0, & \omega_c < |\omega| < \pi \end{cases} \qquad W(e^{j\omega}) = \frac{\sin(\omega(M+1)/2)}{\sin(\omega/2)}$$

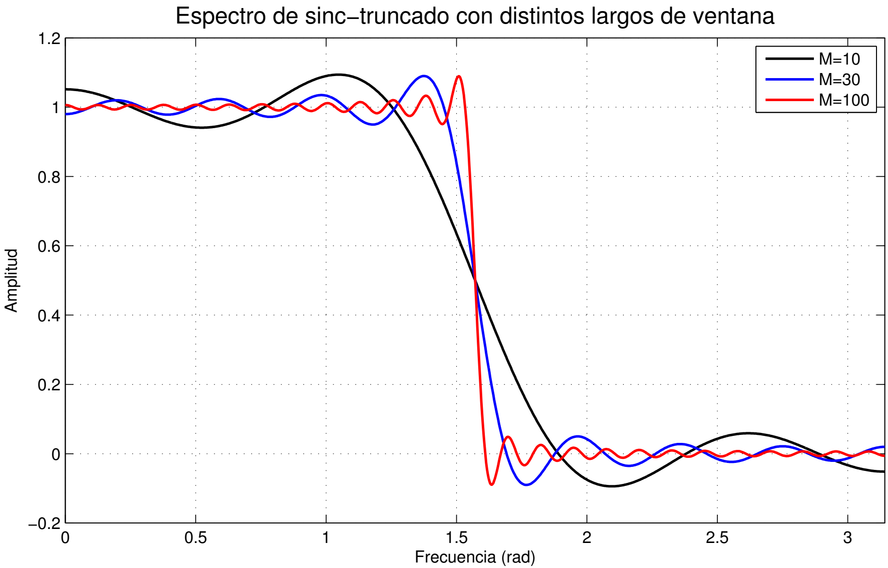
Propiedades y teoremas de la transformada de Fourier

Aplicación: diseño de filtros FIR por enventanado



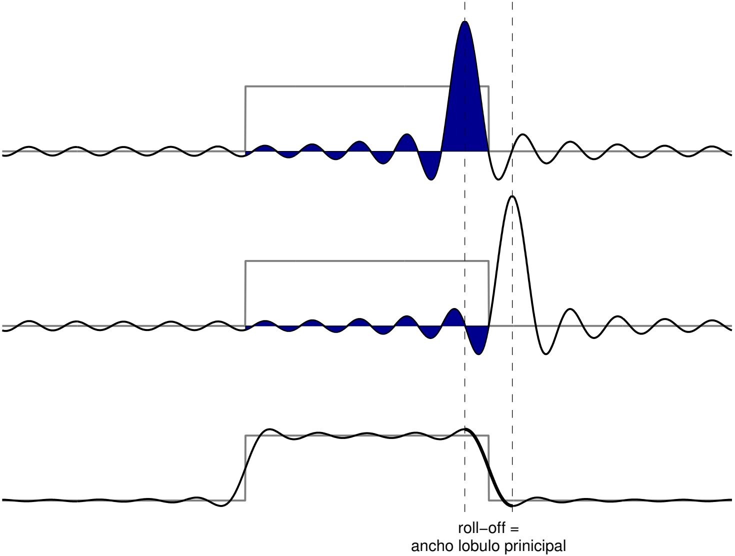
Propiedades y teoremas de la transformada de Fourier

Aplicación: diseño de filtros FIR por enventanado



Propiedades y teoremas de la transformada de Fourier

Aplicación: diseño de filtros FIR por enventanado



Propiedades y teoremas de la transformada de Fourier

Aplicación: diseño de filtros FIR por enventanado

- El pasabajos obtenido de esta forma dista de ser ideal.
- Parámetros de la medida de desempeño de un filtro pasabajos:
  - Ancho de banda de transición: ancho entre la banda pasante y la banda atenuada.
    - Se dice que el filtro tiene un roll-off rápido si el ancho de banda de transición es angosto.
  - Ripple: amplitud de las oscilaciones en la banda pasante y la banda atenuada.
- Pasabajos construido con el sinc truncado:
  - El ancho de banda de transición se reduce al incrementar el largo de la ventana M.
  - Tiene ripple en la banda pasante y en la banda atenuada. La amplitud del ripple es constante y no depende del largo de la ventana M.
  - Es posible reducir el ripple usando ventanas suaves en los bordes (Hamming, Hanning) a costa de incrementar el ancho de banda de transición.

Propiedades y teoremas de la transformada de Fourier

Demostración de algunas propiedades

- Desplazamiento temporal: la transformada de Fourier de $x[n-n_d]$ es

$$
\begin{aligned}
\mathcal{F}\left\{x[n-n_d]\right\} &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n-n_d]e^{-j\omega n} \\
&\underset{k=n-n_d}{=} \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]e^{-j\omega(k+n_d)} \\
&= e^{-j\omega n_d} \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]e^{-j\omega k} \\
&= e^{-j\omega n_d} X(e^{j\omega})
\end{aligned}
$$

Propiedades y teoremas de la transformada de Fourier

Demostración de algunas propiedades

- Teorema de la convolución:

$$Y(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left(\sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]h[n-k] \right) e^{-j\omega n}$$

Intercambiando el orden de las sumas y observando que $x[k]$ no depende de n, se tiene que

$$\begin{aligned}
Y(e^{j\omega}) &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k] \left(\sum_{n=-\infty}^{\infty} h[n-k]e^{-j\omega n} \right) \\
&= \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]\mathcal{F}\{h[n-k]\} \\
&= \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]H(e^{j\omega})e^{-j\omega k} \\
&= H(e^{j\omega}) \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]e^{-j\omega k} \\
&= H(e^{j\omega})X(e^{j\omega})
\end{aligned}$$

Propiedades y teoremas de la transformada de Fourier

Demostración de algunas propiedades

- Teorema de Parseval: Teniendo en cuenta que $x^*[-n] \overset{\mathcal{F}}{\longleftrightarrow} X^*(e^{j\omega})$, por el teorema de la convolución se tiene que

$$x[n] * x^*[-n] \overset{\mathcal{F}}{\longleftrightarrow} X(e^{j\omega})X^*(e^{j\omega})$$

- o equivalentemente, $\displaystyle\sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]x^*[-(n-k)] \overset{\mathcal{F}}{\longleftrightarrow} |X(e^{j\omega})|^2$
- Aplicando la transformada inversa de Fourier, se tiene que

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]x^*[-(n-k)] = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |X(e^{j\omega})|^2 e^{j\omega n} d\omega$$

- Evaluando en $n = 0$ se concluye que

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} |x[k]|^2 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |X(e^{j\omega})|^2 d\omega$$

Propiedad	Secuencia temporal	Transformada de Fourier
Linealidad	$ax[n] + by[n]$	$aX(e^{j\omega}) + bY(e^{j\omega})$
Desplazamiento temporal	$x[n - n_d]$	$e^{-j\omega n_d} X(e^{j\omega})$
Desplazamiento en frecuencia	$e^{j\omega_0 n} x[n]$	$X(e^{j(\omega-\omega_0)})$
Inversión temporal	$x[-n]$	$X(e^{-j\omega})$
Conjugación temporal	$x^*[n]$	$X^*(e^{-j\omega})$
Inversión temporal y conjugación	$x^*[-n]$	$X^*(e^{j\omega})$
Derivada en frecuencia	$nx[n]$	$j\frac{dX(e^{j\omega})}{d\omega}$
Convolución en el tiempo	$x[n] * y[n]$	$X(e^{j\omega}) \cdot Y(e^{j\omega})$
Multiplicación en el tiempo	$x[n] \cdot y[n]$	$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} X(e^{j\theta}) \cdot Y(e^{j(\omega-\theta)}) d\theta$
Teorema de Parseval	$E = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] \cdot y^*[n]$	$E = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} X(e^{j\omega}) \cdot Y^*(e^{j\omega}) d\omega$

Transformada de Fourier en Tiempo Discreto

Ejemplo

- Previamente se vio que

$$x[n] = a^n u[n] \overset{\mathcal{F}}{\longleftrightarrow} X(e^{j\omega}) = \frac{1}{1 - ae^{-j\omega}}.$$

Se quiere calcular la transformada de Fourier de $y[n] = a^n u[n-5]$.

- Observando que

$$x[n-5] = a^{n-5}u[n-5] = a^{-5}a^n u[n-5] = a^{-5}y[n]$$

- Por lo tanto

$$y[n] = a^5 x[n-5].$$

- Empleando las propiedades de linealidad y de desplazamiento temporal, se llega a que

$$\begin{aligned} Y(e^{j\omega}) &= a^5 e^{-j5\omega} X(e^{j\omega}) \\ &= \frac{a^5 e^{-j5\omega}}{1 - ae^{-j\omega}} \end{aligned}$$

Transformada de Fourier en Tiempo Discreto

Ejemplo: inversión espectral

- Se considera el sistema con respuesta en frecuencia

$$H_{hp}(e^{j\omega}) = 1 - H_{lp}(e^{j\omega}), \qquad \text{con } H_{lp}(e^{j\omega}) = \begin{cases} 1, & |\omega| < \omega_c, \\ 0, & \omega_c < |\omega| < \pi \end{cases}$$

- De esta forma, $H_{hp}(e^{j\omega})$ es un pasaaltos ideal con frecuencia de corte ω_c,

$$H_{hp}(e^{j\omega}) = \begin{cases} 0, & |\omega| < \omega_c, \\ 1, & \omega_c < |\omega| < \pi \end{cases}$$

- ¿Respuesta al impulso de pasaltos ideal?

$$\begin{aligned} h_{hp}[n] &= \mathcal{F}^{-1}\left\{H_{hp}(e^{j\omega})\right\} \\ &= \mathcal{F}^{-1}\left\{1 - H_{lp}(e^{j\omega})\right\} \\ &\overset{(1)}{=} \mathcal{F}^{-1}\left\{1\right\} - \mathcal{F}^{-1}\left\{H_{lp}(e^{j\omega})\right\} \\ &\overset{(2)}{=} \delta[n] - \frac{\sin\omega_c n}{\pi n} \end{aligned}$$

(1) Linealidad de la transformada de Fourier.

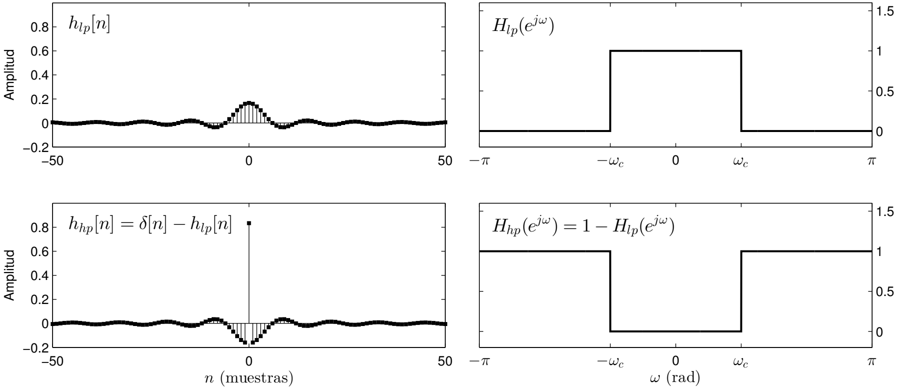
(2) Se vio que

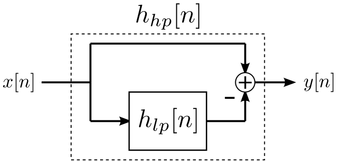
$$\mathcal{F}^{-1}\left\{1\right\} = \delta[n]$$

$$\mathcal{F}^{-1}\left\{H_{lp}(e^{j\omega})\right\} = \frac{\sin\omega_c n}{\pi n}$$

Transformada de Fourier en Tiempo Discreto

Ejemplo: inversión espectral





$$h_{hp}[n] = \delta[n] - h_{lp}[n]$$

Ejemplo: inversión espectral

Observaciones

- La técnica de reversión espectral se utiliza para diseñar filtros pasaltos a partir de filtros pasabajos.
  - La aplicación es mas general. Permite construir el filtro complementario a uno dado, como por ejemplo, un suprimebanda a partir de un pasabanda.
- El pasaaltos obtenido es IIR. Hay que multiplicar por una ventana para truncar la respuesta al impulso y convertirlo en un FIR.
- Esta técnica solo puede emplearse con filtros de respuesta en fase lineal.

Transformada de Fourier en Tiempo Discreto

Ejemplo: reversión espectral

- Se considera el sistema con respuesta al impulso

$$h_{hp}[n] = e^{j\pi n} h_{lp}[n], \qquad \text{con} \qquad h_{lp}[n] = \frac{\sin \omega_c n}{\pi n}.$$

- $h_{lp}[n]$ es un pasabajos ideal con frecuencia de corte ω_c,

$$H_{lp}(e^{j\omega}) = \begin{cases} 1, & |\omega| < \omega_c, \\ 0, & \omega_c < |\omega| < \pi \end{cases}$$

- ¿Respuesta en frecuencia de $h_{hp}[n]$?
  - La propiedad de desplazamiento en frecuencia indica que

$$e^{j\omega_0 n} x[n] \overset{\mathcal{F}}{\longleftrightarrow} X(e^{j(\omega - \omega_0)})$$

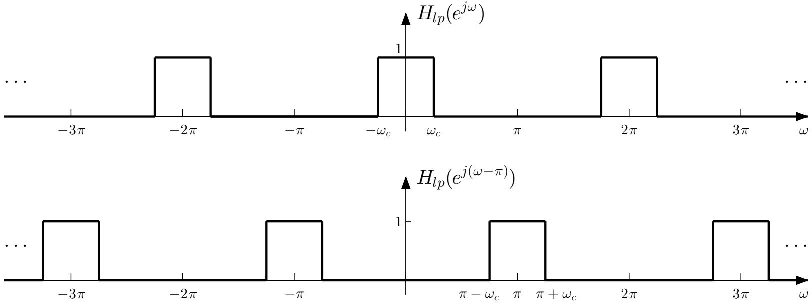
  - En este caso, se tiene que

$$e^{j\pi n} h_{lp}[n] \overset{\mathcal{F}}{\longleftrightarrow} H_{lp}(e^{j(\omega - \pi)})$$

  - Es un desplazamiento de $H_{lp}(e^{j\omega})$ de π radianes en frecuencia.

Transformada de Fourier en Tiempo Discreto

Ejemplo: reversión espectral



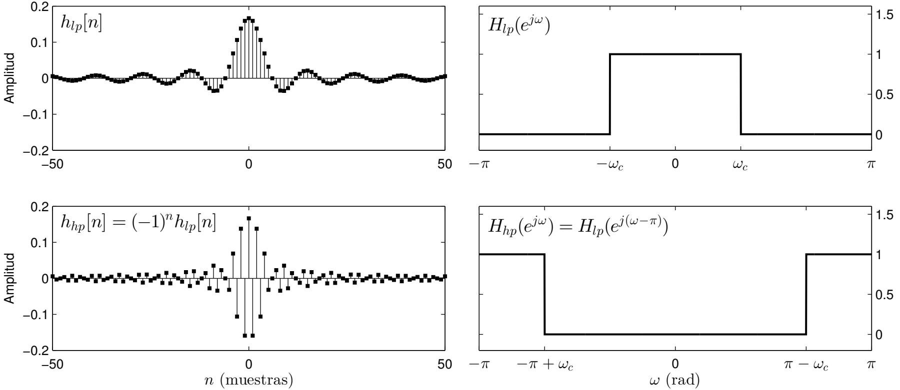
- El pasabajos de frecuencia de corte ω_c se transforma en un pasaaltos de frecuencia de corte $\pi - \omega_c$.
- Además,

$$\begin{aligned} h_{hp}[n] &= e^{j\pi n} h_{lp}[n] \\ &= (-1)^n h_{lp}[n]. \end{aligned}$$

- El pasaaltos se obtiene a partir de la respuesta al impulso del pasabajos cambiando de signo las muestras impares.

Transformada de Fourier en Tiempo Discreto

Ejemplo: reversión espectral



Ejemplo: reversión espectral

Observaciones

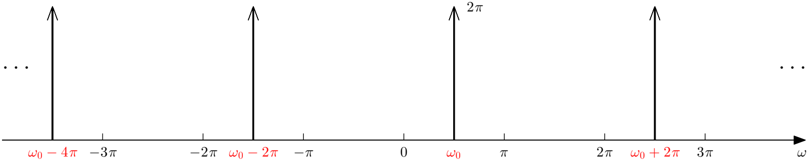
- La técnica de reversión espectral se utiliza para diseñar filtros pasaltos a partir de filtros pasabajos.
  - Si la frecuencia de corte del pasabajos es ω_c, la frecuencia de corte del pasaltos obtenido es $\pi - \omega_c$.
- El pasaaltos obtenido es IIR. Hay que multiplicar por una ventana para truncar la respuesta al impulso y convertirlo en un FIR.
- Esta técnica puede emplearse con filtros de respuesta en fase arbitraria.

Otras transformadas de Fourier

Transformada de secuencias exponenciales complejas

- Se quiere encontrar la secuencia $x[n]$ cuya transformada de Fourier es el tren de pulsos periódico

$$X(e^{j\omega}) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} 2\pi\delta(\omega - \omega_0 + 2\pi k), \qquad -\pi < \omega_0 \leq \pi.$$



- Para determinar la secuencia $x[n]$, hay que aplicar la antitransformada de Fourier a $X(e^{j\omega})$,

$$x[n] = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} X(e^{j\omega})e^{j\omega n}d\omega$$

Otras transformadas de Fourier

Transformada de secuencias exponenciales complejas

- Como la integral es en un período, es decir, en $-\pi < \omega \leq \pi$, alcanza con considerar $X(e^{j\omega})$ solo en un período,

$$X(e^{j\omega}) = 2\pi\delta(\omega - \omega_0).$$

- La antitransformada de Fourier queda

$$\begin{aligned}
x[n] &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} 2\pi\delta(\omega - \omega_0)e^{j\omega n}d\omega \\
&= \int_{-\pi}^{\pi} \delta(\omega - \omega_0)e^{j\omega_0 n}d\omega \\
&= e^{j\omega_0 n}\int_{-\pi}^{\pi} \delta(\omega - \omega_0)d\omega \\
&= e^{j\omega_0 n}
\end{aligned}$$

- Se concluye que

$$x[n] = e^{j\omega_0 n} \overset{\mathcal{F}}{\longleftrightarrow} X(e^{j\omega}) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} 2\pi\delta(\omega - \omega_0 + 2\pi k)$$

Otras transformadas de Fourier

Transformada de secuencias exponenciales complejas

- Observaciones:
  - La secuencia $x[n] = e^{j\omega_0 n}$ no es absolutamente sumable ni cuadráticamente sumable, y por lo tanto, su transformada de Fourier $X(e^{j\omega})$ no es finita para todo ω.
  - En el caso particular en que $\omega_0 = 0$, se tiene que

$$x[n] = 1 \overset{\mathcal{F}}{\longleftrightarrow} X(e^{j\omega}) = 2\pi\delta(\omega)$$

  - También es posible encontrar la transformada de secuencias sinusoidales usando la propiedad de linealidad de la transformada de Fourier. Como

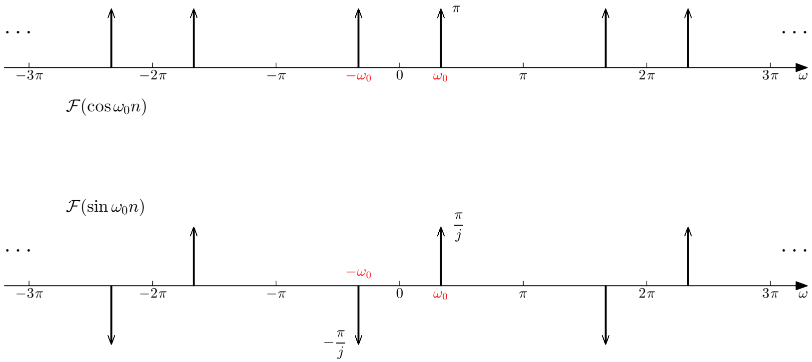
$$\cos\omega_0 n = \frac{1}{2}e^{j\omega_0 n} + \frac{1}{2}e^{-j\omega_0 n}, \qquad \sin\omega_0 n = \frac{1}{2j}e^{j\omega_0 n} - \frac{1}{2j}e^{-j\omega_0 n},$$

se llega a que

$$\begin{aligned}
\cos\omega_0 n &\overset{\mathcal{F}}{\longleftrightarrow} \pi\delta(\omega - \omega_0) + \pi\delta(\omega + \omega_0), \qquad -\pi < \omega \leq \pi \\
\sin\omega_0 n &\overset{\mathcal{F}}{\longleftrightarrow} \frac{\pi}{j}\delta(\omega - \omega_0) - \frac{\pi}{j}\delta(\omega + \omega_0), \qquad -\pi < \omega \leq \pi
\end{aligned}$$

Otras transformadas de Fourier

Transformada de secuencias exponenciales complejas



Resumen de transformadas de Fourier vistas

Secuencia temporal	Transformada de Fourier
$\delta[n]$	1
$\delta[n-n_d]$	$e^{-j\omega n_d}$
$a^n u[n]$	$\dfrac{1}{1-ae^{-j\omega}}$
$e^{j\omega_0 n}$	$2\pi\delta(\omega-\omega_0)$
$\cos(\omega_0 n)$	$\pi[\delta(\omega-\omega_0)+\delta(\omega+\omega_0)]$
$\sin(\omega_0 n)$	$\dfrac{\pi}{j}\left[\delta(\omega-\omega_0)-\delta(\omega+\omega_0)\right]$
$\begin{cases} 1, & 0 \leq n \leq M, \\ 0, & \text{en otro caso} \end{cases}$	$e^{-j\omega M/2}\dfrac{\sin[\omega(M+1)/2]}{\sin(\omega/2)}$
$\dfrac{\sin \omega_0 n}{\pi n}$	$\begin{cases} 1, & \lvert\omega\rvert < \omega_0, \\ 0, & \lvert\omega\rvert > \omega_0 \end{cases}$

Observacion: Las transformadas de Fourier de la tabla están dadas en $-\pi < \omega \leq \pi$ sobreentendiendo que es una función periódica de período 2π.

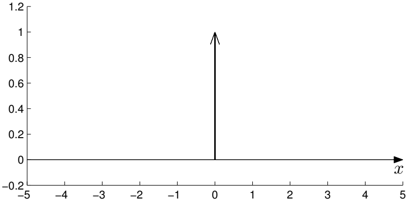
Apéndice I

La función Delta de Dirac

- La función delta de Dirac es una función generalizada (distribución) que vale cero en todos los reales excepto en cero, donde vale infinito. Además, el área total bajo la función es uno.

$$\delta(x) = \begin{cases} +\infty, & x = 0 \\ 0, & x \neq 0 \end{cases}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x)\, dx = 1.$$

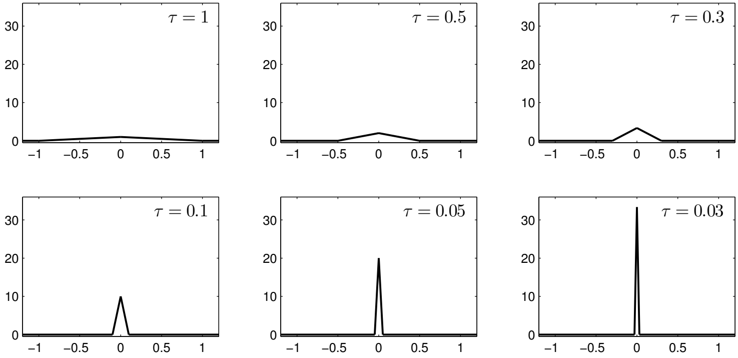


- La función puede pensarse como un pico infinitamente alto e infinitamente angosto situado en el origen, donde el área bajo el pico vale uno.
- La función delta de Dirac suele referirse como impulso de Dirac o simplemente impulso.

Apéndice I

- La función delta puede ser considerada como el límite de alguna función que tiene un pico en el origen, como por ejemplo, una función triangular de altura $1/\tau$ y ancho τ.

$$\delta(x) = \lim_{\tau \to 0} \frac{1}{\tau} \Lambda\left(\frac{x}{\tau}\right), \qquad \text{con } \Lambda\left(\frac{x}{\tau}\right) = \begin{cases} 1 - \left|\frac{x}{\tau}\right|, & |x| < |\tau| \\ 0, & |x| \geq |\tau| \end{cases}$$



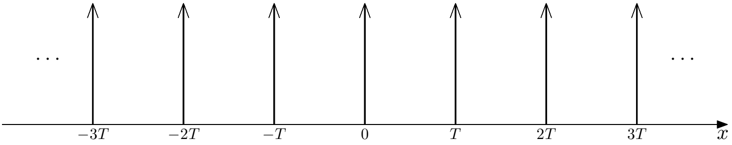
Apéndice I

La función Delta de Dirac

- Propiedades
  - $f(x)\delta(x) = f(0)\delta(x)$
  - $f(x)\delta(x - x_0) = f(x_0)\delta(x - x_0)$
  - $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\delta(x - x_0)dx = f(x_0)$
  - $f(x) * \delta(x) = f(x)$

- Tren de impulsos periódico: la función tren de impulsos periódico (también llamada peine de Dirac) de período T se define como

$$\mathrm{III}_T(x) \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(x - kT)$$



Apéndice II

Convergencia de sucesiones de funciones (no va)

Dos sentidos en los cuales una sucesión de funciones puede converger a una función particular son la convergencia puntual y la convergencia uniforme.

Convergencia puntual

- Una sucesión de funciones $f_n : S \to \mathbb{C}$, con S conjunto no vacío, converge puntualmente a una función $f : S \to \mathbb{C}$ si

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x), \qquad \text{para cada } x \in S \text{ fijo.}$$

- Esto significa que

$$\forall x \in S \quad \forall \varepsilon > 0 \quad \exists\, N \in \mathbb{N} \quad | \quad n \geq N \implies |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon. \tag{6}$$

Apéndice II

Convergencia uniforme

- Una sucesión de funciones $f_n : S \to \mathbb{C}$, con S conjunto no vacío, converge uniformemente a una función $f : S \to \mathbb{C}$ si para todo $\varepsilon > 0$ existe un entero N (que depende de ε) tal que

$$|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon, \qquad \text{para todo } x \in S \text{ y todo } n \geq N.$$

- Esto significa que

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists\, N \in \mathbb{N} \quad | \quad |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon \quad \forall x \in S \quad \forall n \geq N \quad (7)$$

- Observaciones:
  - En 6, N puede depender de ε y de x, mientras que en 7 N sólo puede depender de ε.
  - La convergencia uniforme es un concepto más fuerte que el de convergencia puntual. Toda sucesión que converge uniformemente, converge puntualmente, pero el enunciado recíproco es falso.
  - Cualitativamente, la convergencia uniforme significa que la sucesión converge para todos los x con la misma velocidad.

Apéndice III

Interpretación de la representación de Fourier (no va)

- La ecuación de síntesis,

$$x[n] = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} X(e^{j\omega})e^{j\omega n}d\omega$$

  indica que la secuencia $x[n]$ se puede construir mediante la combinación lineal de infinitas exponenciales complejas.

- Se considera $\tilde{x}[n]$ definida como

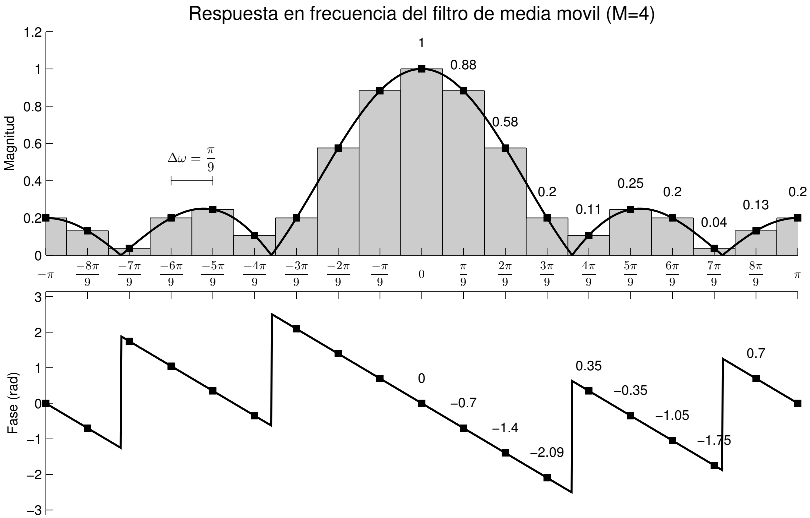
$$\tilde{x}[n] = \frac{1}{2\pi}\sum_{k=-N}^{N} X(e^{jk\Delta\omega})e^{jk\Delta\omega n}\Delta\omega, \qquad \text{con } \Delta\omega = \frac{\pi}{N}$$

- Definida de esta forma, $\tilde{x}[n]$ es una combinación de $2N+1$ exponenciales complejas.
- Además,

$$\lim_{\Delta\omega\to 0}\frac{1}{2\pi}\sum_{k=-N}^{N} X(e^{jk\Delta\omega})e^{jk\Delta\omega n}\Delta\omega = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} X(e^{j\omega})e^{j\omega n}d\omega$$

Apéndice III

Interpretación de la representación de Fourier



Apéndice III

Interpretación de la representación de Fourier

$$
\begin{aligned}
\tilde{x}[n] &= \frac{1}{2\pi}\sum_{k=-N}^{N} X(e^{jk\Delta\omega})e^{jk\Delta\omega n}\Delta\omega \\
&= \frac{\Delta\omega}{2\pi}\left\{\sum_{k=-N}^{-1} X(e^{jk\Delta\omega})e^{jk\Delta\omega n} + X(e^{j0})e^{j0n} + \sum_{k=1}^{N} X(e^{jk\Delta\omega})e^{jk\Delta\omega n}\right\} \\
&= \frac{\Delta\omega}{2\pi}\left\{\sum_{k=1}^{N} X(e^{-jk\Delta\omega})e^{-jk\Delta\omega n} + X(e^{j0})e^{j0n} + \sum_{k=1}^{N} X(e^{jk\Delta\omega})e^{jk\Delta\omega n}\right\} \\
&= \frac{\Delta\omega}{2\pi}\left\{X(e^{j0})e^{j0n} + \sum_{k=1}^{N}\left[X(e^{jk\Delta\omega})e^{jk\Delta\omega n} + X^{*}(e^{jk\Delta\omega})e^{-jk\Delta\omega n}\right]\right\} \\
&= \frac{\Delta\omega}{2\pi}\left\{X(e^{j0})e^{j0n} + \sum_{k=1}^{N} 2\,\mathrm{Re}\left[X(e^{jk\Delta\omega})e^{jk\Delta\omega n}\right]\right\} \\
&= \frac{\Delta\omega}{2\pi}\left\{X(e^{j0})e^{j0n} + 2\sum_{k=1}^{N} |X(e^{jk\Delta\omega})|\cos\left[k\Delta\omega n + \angle X(e^{jk\Delta\omega})\right]\right\}
\end{aligned}
$$

Apéndice III

Interpretación de la representación de Fourier

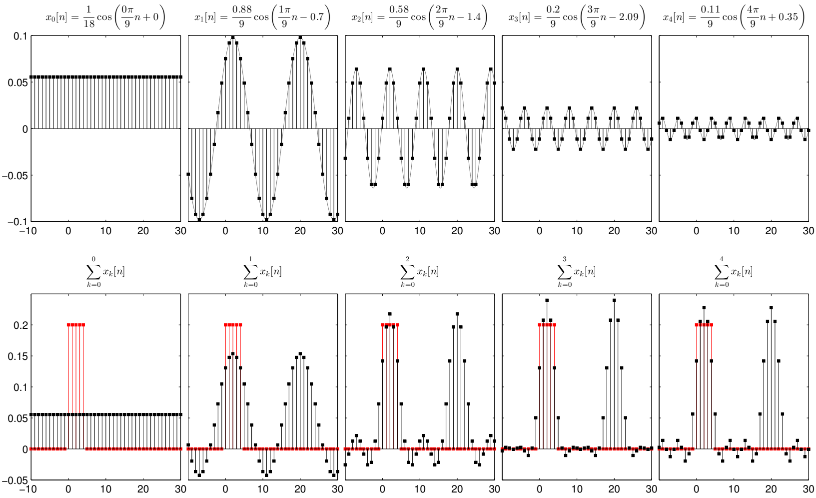
- Se considera el sistema de media móvil
- Se aproxima la ecuación de síntesis con $N = 9$. De esta forma $\Delta\omega = \frac{\pi}{9}$,

$$\tilde{x}[n] = \frac{1}{18}X(e^{j0})e^{j0n} + \frac{1}{9}\sum_{k=1}^{9}|X(e^{j\frac{k\pi}{9}})|\cos\left[\frac{k\pi}{9}n + \angle X(e^{j\frac{k\pi}{9}})\right]$$

- La reconstrucción de $x[n]$ de esta forma consiste en la combinación lineal de $2N + 1 = 19$ exponenciales complejas.

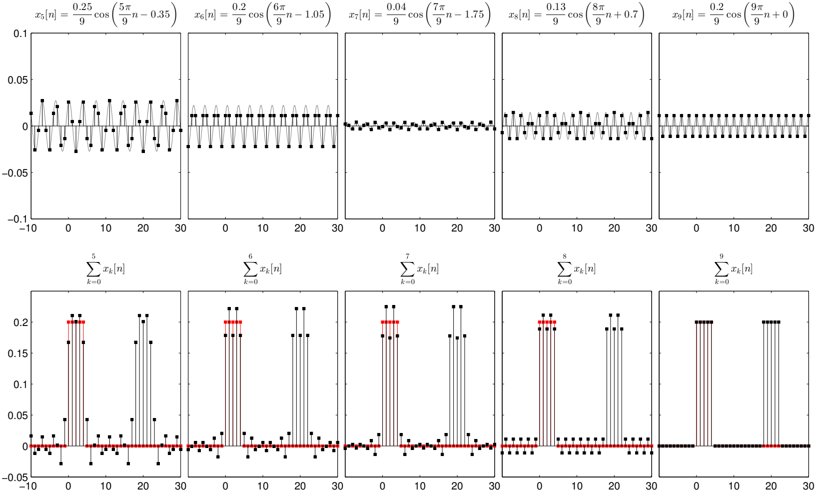
Apéndice III

Interpretación de la representación de Fourier



Apéndice III

Interpretación de la representación de Fourier



Referencias I