Sistemas lineales invariantes en el tiempo

Modulación y Procesamiento de Señales

Pablo Zinemanas, Mauricio Ramos
{pzinemanas, mramos}@fing.edu.uy

Centro Universitario Regional Este
Sede Rocha
Tecnólogo en Telecomunicaciones

Curso 2017

Sistemas lineales invariantes en el tiempo

Definición

- Previamente se vio que los sistemas pueden clasificarse como:
  - Lineal
  - No lineal
  - Invariante en el tiempo
  - Variante en el tiempo
- La clase de sistemas que son simultáneamente lineales e invariantes en el tiempo se denominan

  Sistemas lineales invariantes en el tiempo (*SLIT*)
- Los sistemas *SLIT* son muy importantes porque tienen gran cantidad de aplicaciones en el procesamiento de señales.
- Su utilidad práctica proviene del hecho de que conociendo la respuesta al impulso $h[n]$, es posible calcular la respuesta a cualquier entrada $x[n]$.

Sistemas lineales invariantes en el tiempo

Fundamento

- Cualquier secuencia arbitraria puede representarse como suma de impulsos escalados y retardados:

$$x[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]\delta[n-k].$$

- Si $x[n]$ es la entrada a un sistema que realiza la transformación $T\{\cdot\}$, la salida es:

$$y[n] = T\left\{\sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]\delta[n-k]\right\}$$

- Si el sistema es lineal, por el principio de superposición, la salida se puede expresar como:

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]T\{\delta[n-k]\} \tag{1}$$

- Sea $h_k[n]$ la respuesta del sistema a la entrada $\delta[n-k]$, es decir

$$h_k[n] = T\{\delta[n-k]\}$$

  La salida $y[n]$ es entonces:

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]h_k[n]$$

Sistemas lineales invariantes en el tiempo

Fundamento

- Si el sistema es además invariante en el tiempo y la respuesta al impulso es $h[n]$, la respuesta a $\delta[n-k]$ es $h[n-k]$, es decir

$$h[n] = T\{\delta[n]\} \quad \underset{\text{sistema invariante}}{\Longrightarrow} \quad h[n-k] = T\{\delta[n-k]\}$$

- y la ecuación 1 queda

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]h[n-k] \tag{2}$$

- Esta ecuación indica que un sistema lineal invariante en el tiempo está completamente caracterizado por la respuesta al impulso $h[n]$.
- Conociendo la respuesta al impulso $h[n]$ de un *SLIT*, es posible usar la ecuación 2 para calcular la salida ante cualquier entrada $x[n]$.
- La ecuación 2 se llama convolución, y se dice que $y[n]$ es la convolución entre $x[n]$ y $h[n]$. Se representa con la siguiente notación:

$$y[n] = x[n] * h[n].$$

Sistemas lineales invariantes en el tiempo

Cálculo de la convolución

- Se quiere calcular el valor de la muestra n-ésima de la salida,

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]h[n-k].$$

- Para eso, se consideran las secuencias $x[k]$ y $h[n-k]$ como función de k, para n fijo y $-\infty < k < \infty$.
- Estas secuencias se multiplican formando la secuencia $x[k]h[n-k]$ con variable independiente k (n es fijo),
- y se suman sus muestras en $-\infty < k < \infty$. El resultado es el valor de la muestra n-ésima de la salida.
- Finalmente, se repite el proceso para $-\infty < n < \infty$ obteniendo así la secuencia de salida completa.
- La única dificultad en el proceso es darse cuenta de como es la secuencia $h[n-k]$ considerada como función de k con n fijo, conociendo $h[k]$.

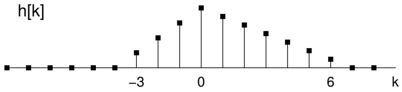
Sistemas lineales invariantes en el tiempo

Cálculo de la convolución

- Para ver como es la secuencia $h[n-k]$ es útil notar que

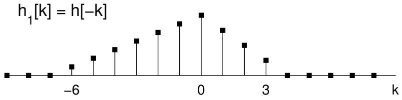
$$h[n-k] = h[-(k-n)].$$

- Dado $h[k]$



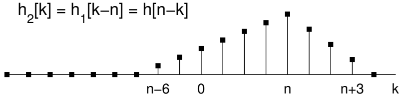
- se define $h_1[k]$ como

$$h_1[k] = h[-k].$$



- Luego, se define $h_2[k]$ como una versión retardada n muestras de $h_1[k]$

$$h_2[k] = h_1[k-n].$$



Sistemas lineales invariantes en el tiempo

Cálculo de la convolución

- Luego de realizar las transformaciones indicadas, $h_2[k]$ es la secuencia buscada, ya que

$$\begin{aligned} h_2[k] &= h_1[k-n] \\ &= h[-(k-n)] \\ &= h[n-k] \end{aligned}$$

- En resumen, para construir $h[n-k]$ con $-\infty < k < \infty$:
  - Se refleja $h[k]$ respecto al origen para obtener $h[-k]$ (operación de inversión temporal).
  - Se desplaza la secuencia reflejada n muestras para obtener $h[n-k]$
- Receta para el cálculo de la convolución: se quiere calcular la convolución entre $x[n]$ y $h[n]$.
  1. Se consideran las secuencias como función de k.
  2. Para cada n:
     a. Se considera n fijo y se construye la secuencia $h[n-k]$.
     b. Se multiplican las secuencias $x[k]$ y $h[n-k]$
     c. y se suman las muestras para todo k obteniendo la muestra $y[n]$.

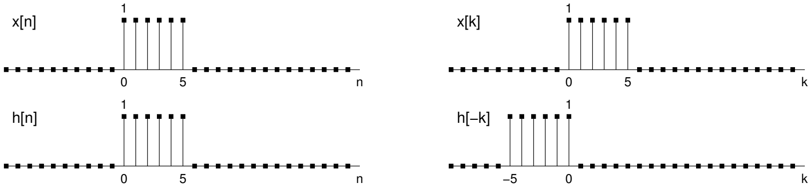
Sistemas lineales invariantes en el tiempo

Ejemplo

- Se consideran las secuencias $x[n]$ y $h[n]$, con

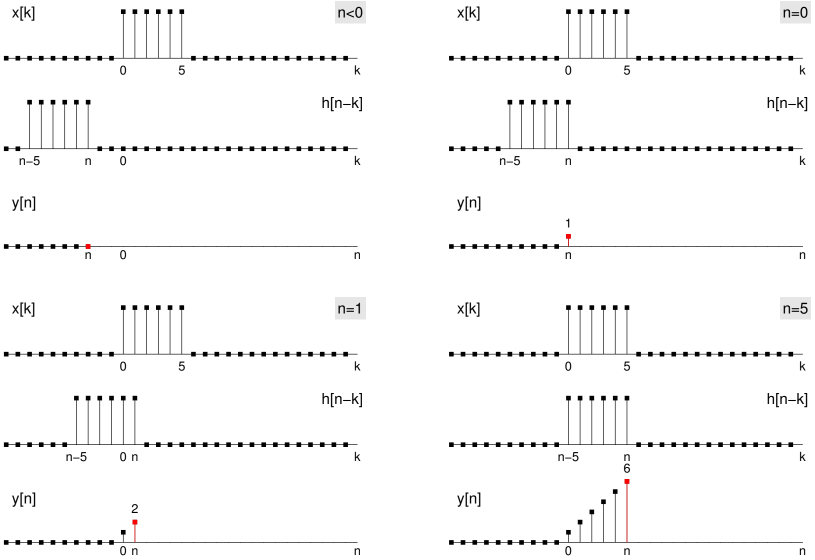
$$x[n] = h[n] = u[n] - u[n-N]$$
$$= \begin{cases} 1, & 0 \leq n \leq N-1 \\ 0, & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

- Se quiere encontrar $y[n] = x[n] * h[n]$.
- En el ejemplo se usa el caso $N = 6$.



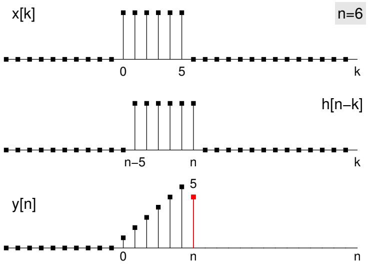
Sistemas lineales invariantes en el tiempo

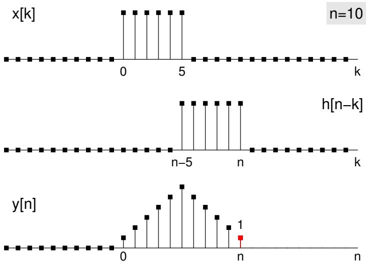
Ejemplo

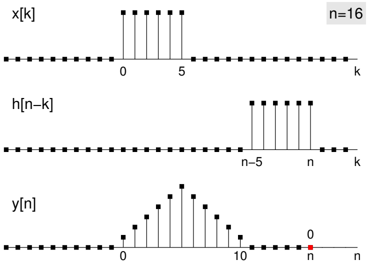


Sistemas lineales invariantes en el tiempo

Ejemplo







- Observación: si las secuencias que se convolucionan tienen soportes de largo N_1 y N_2, el resultado tiene soporte $N_1 + N_2 - 1$.

Propiedades de los *SLIT*

Sistemas lineales invariantes en el tiempo y convolución

- El comportamiento de los sistemas lineales invariantes en el tiempo está descripto por la operación de convolución,

$$x[n] \longrightarrow \boxed{h[n]} \longrightarrow y[n] \qquad y[n] = x[n] * h[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]h[n-k]$$

- Esto implica que las propiedades de los *SLIT* están definidas por las propiedades de la convolución en tiempo discreto.

Propiedades de los *SLIT*

Secuencia identidad de la convolución: $\delta[n]$

- La convolución de cualquier secuencia con $\delta[n]$ resulta en la misma secuencia:

$$x[n] * \delta[n] = x[n].$$

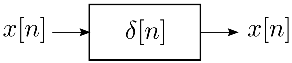
- Demostración:

$$\begin{aligned} x[n] * \delta[n] &\overset{(a)}{=} \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]\delta[n-k] \\ &\overset{(b)}{=} x[n] \end{aligned}$$

(a) Definición de la convolución

(b) $\delta[n-k] = \begin{cases} 1, & n = k \\ 0, & n \neq k \end{cases}$

- Consecuencia: Un sistema con respuesta al impulso $h[n] = \delta[n]$, es el sistema identidad.
  - Si la entrada es $x[n]$, la salida es $x[n]$.



Propiedades de los *SLIT*

Propiedad conmutativa de la convolución

- La convolución es conmutativa: $x[n] * h[n] = h[n] * x[n]$
- Demostración:

$$
\begin{aligned}
x[n] * h[n] &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]h[n-k] \\
&\overset{(a)}{=} \sum_{m=\infty}^{-\infty} x[n-m]h[m] \\
&= \sum_{m=-\infty}^{\infty} h[m]x[n-m] \\
&= h[n] * x[n]
\end{aligned}
$$

(a) Cambio de variable

$$m = n - k$$

- Consecuencia: un sistema con respuesta al impulso $h[n]$ y entrada $x[n]$ produce la misma salida que un sistema con respuesta al impulso $x[n]$ y entrada $h[n]$.

$$x[n] \longrightarrow \boxed{h[n]} \longrightarrow y[n] \qquad h[n] \longrightarrow \boxed{x[n]} \longrightarrow y[n]$$

Propiedades de los *SLIT*

Propiedad distributiva de la convolución

- La convolución es distributiva:

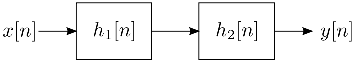
$$x[n] * (h_1[n] + h_2[n]) = x[n] * h_1[n] + x[n] * h_2[n]$$

Demostración: ejercicio

Propiedades de los *SLIT*

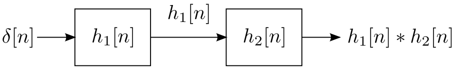
Consecuencia de la propiedad conmutativa

- Sistemas en cascada:



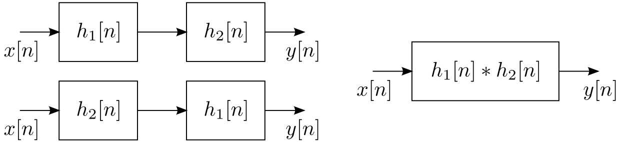
En sistemas conectados en cascada, la salida del primero es la entrada del segundo y la salida del segundo es la salida global.

- Respuesta al impulso de sistemas en cascada:



$$h[n] = h_1[n] * h_2[n]$$

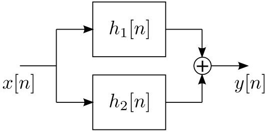
- Como consecuencia de la propiedad conmutativa, la respuesta al impulso del sistema global es independiente del orden de los *SLIT* en la cascada.



Propiedades de los *SLIT*

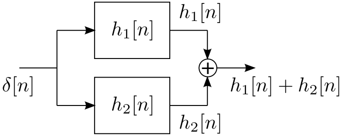
Consecuencia de la propiedad distributiva

- Sistemas en paralelo:



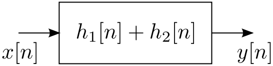
En sistemas conectados en paralelo, los sistemas tienen la misma entrada y sus salidas se suman para producir la salida global.

- Respuesta al impulso de sistemas en paralelo:



$$h[n] = h_1[n] + h_2[n]$$

- Por lo tanto, el sistema equivalente a dos *SLIT* en paralelo es



Propiedades de los *SLIT*

- Dos propiedades de los sistemas adicionales a la linealidad y la invarianza temporal son la estabilidad y la causalidad.
- Es importante poder determinar cuando un *SLIT* es estable y cuando es causal.
- Como un *SLIT* está caracterizado por la respuesta al impulso, es posible determinar las propiedades del sistema a partir de las características de la respuesta al impulso.

Propiedades de los *SLIT*

Estabilidad de los *SLIT*

- Como se vio previamente, un sistema es estable si para toda entrada acotada, la salida también es acotada.
- Condición necesaria y suficiente de estabilidad: un sistema lineal invariante en el tiempo es estable si y solo si la respuesta al impulso es absolutamente sumable.
- Formalmente: sea $x[n]$ la entrada a un *SLIT* con respuesta al impulso $h[n]$ y $y[n]$ la salida correspondiente. Si $|x[n]| \leq B_x < \infty$ para todo n, se cumple que,

$$|y[n]| \leq B_y < \infty \quad \forall n \quad \iff \quad S = \sum_{k=-\infty}^{\infty} |h[k]| < \infty$$

Propiedades de los *SLIT*

Estabilidad de los *SLIT*

Demostración

- Condición suficiente ($\Leftarrow$): hay que demostrar que si la entrada es acotada y la respuesta al impulso es absolutamente sumable, entonces la salida es acotada.
- Formalmente:

$$\begin{array}{c} \text{si } |x[n]| \leq B_x < \infty, \quad \forall n \\ \text{y} \\ S = \sum_{k=-\infty}^{\infty} |h[k]| < \infty \end{array} \quad \Longrightarrow \quad |y[n]| \leq B_y < \infty, \quad \forall n$$

- Como el sistema es *LIT*, la salida es la convolución entre la entrada y la respuesta al impulso,

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k]x[n-k]$$

Propiedades de los *SLIT*

Estabilidad de los *SLIT*

- Tomado el módulo de la salida, se tiene que

$$
\begin{aligned}
|y[n]| &= \left|\sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k]x[n-k]\right| \\
&\overset{(a)}{\leq} \sum_{k=-\infty}^{\infty} |h[k]||x[n-k]| \\
&\overset{(b)}{\leq} B_x \sum_{k=-\infty}^{\infty} |h[k]| \\
&= B_x S
\end{aligned}
$$

(a) desigualdad triangular

(b) $x[n]$ acotada,

$$|x[n]| \leq B_x$$

- Se concluye que
$$|y[n]| \leq B_y = B_x S < \infty$$
- Se demostró que si la respuesta al impulso es absolutamente sumable, el sistema es estable.

Propiedades de los *SLIT*

Estabilidad de los *SLIT*

- Condición necesaria ($\Rightarrow$): hay que demostrar que si la respuesta al impulso no es absolutamente sumable, es posible encontrar una entrada acotada que produce una salida no acotada:

$$\text{si } S = \sum_{k=-\infty}^{\infty} |h[k]| = \infty \quad \Longrightarrow \quad \begin{array}{c} \exists\, x[n] \text{ con } |x[n]| \leq B_x < \infty, \quad \forall n \\ \text{tal que } |y[n]| = \infty \text{ para algún } n \end{array}$$

- Demostración (no va): Considérese la secuencia de entrada con valores

$$x[n] = \begin{cases} \dfrac{h^*[-n]}{|h[-n]|}, & h[n] \neq 0 \\ 0, & h[n] = 0 \end{cases} \tag{3}$$

- De esta forma, $x[n]$ es acotada, ya que $|x[n]| = 0$ o

$$|x[n]| = \frac{|h^*[-n]|}{|h[-n]|} = \frac{|h[-n]|}{|h[-n]|} = 1$$

Propiedades de los *SLIT*

Estabilidad de los *SLIT*

- Como el sistema es *LIT*, la salida es $y[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k]x[n-k]$.
- Considérese la salida en $n = 0$ con la entrada dada por la ecuación 3,

$$
\begin{aligned}
y[0] &\overset{(a)}{=} \sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k]x[-k] \\
&\overset{(b)}{=} \sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k]\frac{h^*[k]}{|h[k]|} \\
&= \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{|h[k]|^2}{|h[k]|} \\
&= \sum_{k=-\infty}^{\infty} |h[k]| \\
&\overset{(c)}{=} \infty
\end{aligned}
$$

(a) salida genérica en $n = 0$

(b) $x[n]$ de la ecuación 3

(c) por hipótesis

- Se concluye que si $h[n]$ no es absolutamente sumable, es posible encontrar una entrada acotada que produce una salida no acotada.

Propiedades de los *SLIT*

Causalidad de los *SLIT*

- La clase de los sistemas causales consiste en los sistemas para los cuales la salida $y[n_0]$ depende solo de las muestras de la entrada $x[n]$ en $n \leq n_0$.
- Condición necesaria y suficiente de causalidad: un sistema lineal invariante en el tiempo es causal si y solo si la respuesta al impulso cumple que

$$h[n] = 0, \qquad n < 0. \tag{4}$$

Propiedades de los *SLIT*

Causalidad de los *SLIT*

- Justificación: por ser un *SLIT*, la muestra n-ésima de la salida es

$$\begin{aligned} y[n] &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k]x[n-k] \\ &= \dots + h[-2]x[n+2] + h[-1]x[n+1] + h[0]x[n] + h[1]x[n-1] + \dots \end{aligned}$$

- Por ejemplo, la muestra $n = 10$ de la salida es

$$y[10] = \dots + h[-2]x[12] + h[-1]x[11] + h[0]x[10] + h[1]x[9] + \dots$$

- Como en la convolución los $h[k]$ aparecen multiplicados por $x[n-k]$, si $h[k_0] \neq 0$ para algún $k_0 < 0$, $y[n]$ depende de $x[n-k_0]$, con $n - k_0 > n$, lo que significa que la salida depende de muestras futuras de la entrada.
- Si $h[n]$ cumple la condición de la ecuación 4, la salida es

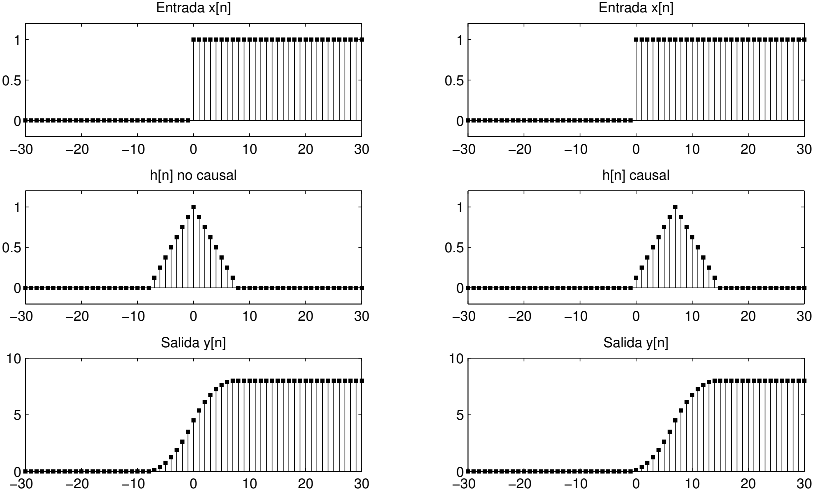
$$y[n] = \sum_{k=0}^{\infty} h[k]x[n-k] = h[0]x[n] + h[1]x[n-1] + h[2]x[n-2] + \dots,$$

y la salida no depende de muestras futuras de la entrada.

Propiedades de los *SLIT*

Causalidad de los *SLIT*

Ejemplo de sistema no causal y causal



Propiedades de los *SLIT*

Causalidad de los *SLIT*

Observaciones

- Se llama secuencia causal a toda secuencia $x[n]$ que cumple que $x[n] = 0$ en $n < 0$ porque podría ser la respuesta al impulso de un sistema causal.
- Los filtros no causales son irrealizables en la práctica. No es posible construir un filtro no causal que opere en tiempo real.
- Cuando se trabaja en una computadora, la señal de entrada y de salida del filtro son secuencias de números almacenadas en memoria. En este caso, la salida puede depender de cualquier muestra de la entrada.

Propiedades de los *SLIT*

Resumen

- Las propiedades de los sistemas lineales invariantes en el tiempo están determinadas por las propiedades de la operación convolución.
- Como consecuencia, quedan completamente caracterizados por su respuesta al impulso.
- Sistemas en serie: La respuesta al impulso total de sistemas conectados en serie es la convolución de las respuestas al impulso de cada filtro de la serie.
- Sistemas en cascada: la respuesta al impulso total de sistemas en cascada es la suma de las respuestas al impulso de cada sistema en la cascada.
- Estabilidad: Un *SLIT* es estable si su respuesta al impulso es absolutamente sumable,

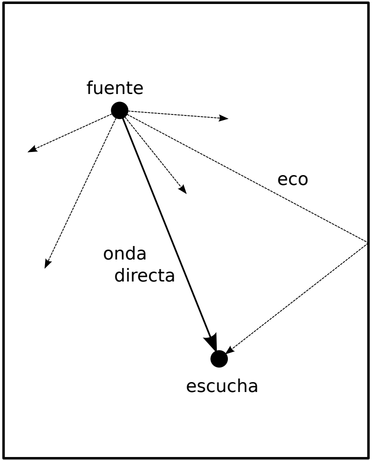
$$S = \sum_{k=-\infty}^{\infty} |h[k]| \leq \infty.$$

- Causalidad: Un *SLIT* es causal si su respuesta al impulso cumple que

$$h[n] = 0, \qquad n < 0.$$

Sistemas lineales invariantes en el tiempo

Aplicación: reverberación artificial



- Reverberación es lo que le ocurre a un sonido cuando recorre el camino desde la fuente a los oídos de un escucha.
- La reverberación en un cuarto es el producto de la superposición de muchos ecos.
- Una forma de capturar la respuesta al impulso de una sala es colocando un micrófono en el lugar deseado, generar un impulso sonoro (explosión de un globo o disparo) y grabar todo lo que el micrófono capta.

Sistemas lineales invariantes en el tiempo

Aplicación: reverberación artificial

Cámara anecoica

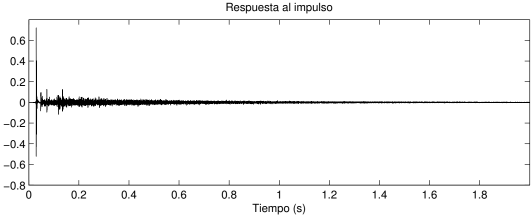
Las cámaras anecoicas están diseñadas para reducir la reflexión del sonido lo mas posible.

- Aisladas del exterior.
- Paredes recubiertas con cuñas en forma de pirámide con la base apoyada sobre la pared.
- Materiales que absorben el sonido y aumentan la difusión del escaso sonido que no es absorbido.

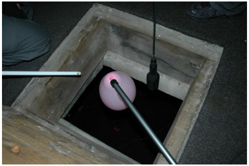
Sistemas lineales invariantes en el tiempo

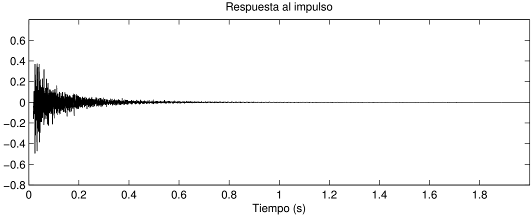
Aplicación: reverberación artificial

Gimnasio, Universidad de York (Inglaterra)



Mazmorra en el Palacio Falkland (Escocia)





Datos obtenidos de la base de datos de respuestas al impulso *Open AIR*.
`http://www.openairlib.net/`

Sistemas lineales invariantes en el tiempo

Ejemplos

- Previamente se estudiaron los siguientes sistemas:

  1. Retardo ideal
  2. Media móvil
  3. Cuadrado de la entrada
  4. Acumulador

- Los sistemas de retardo, media móvil y acumulador son lineales e invariantes en el tiempo, y por lo tanto quedan caracterizados por su respuesta al impulso.
- La respuesta al impulso puede ser encontrada a partir de la definición de transformación de cada sistema.
- Para eso, basta con observar la respuesta del sistema cuando la entrada es $x[n] = \delta[n]$.

- Retardo ideal

Ecuación de transformación	Respuesta al impulso
$y[n] = x[n - n_d]$	$h[n] = \delta[n - n_d]$

Sistemas lineales invariantes en el tiempo

Ejemplos

- Media móvil

  Ecuación de transformación

$$y[n] = \frac{1}{M_1 + M_2 + 1} \sum_{k=-M_1}^{M_2} x[n-k]$$

Respuesta la impulso

$$\begin{aligned}
h[n] &= \frac{1}{M_1 + M_2 + 1} \sum_{k=-M_1}^{M_2} \delta[n-k] \\
&= \frac{1}{M_1 + M_2 + 1} \{\delta[n+M_1] + \delta[n+M_1-1] + \cdots + \delta[n] \\
&\quad + \delta[n-1] + \cdots + \delta[n-M_2]\} \\
&= \begin{cases} \dfrac{1}{M_1 + M_2 + 1}, & -M_1 \leq n \leq M_2 \\ 0, & \text{en otro caso} \end{cases} \\
&= u[n+M_1] - u[n-(M_2+1)].
\end{aligned}$$

Sistemas lineales invariantes en el tiempo

Ejemplos

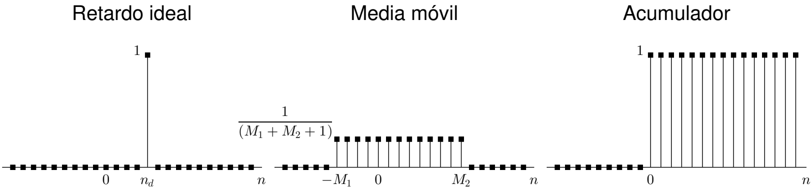
- Acumulador

Ecuación de transformación

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{n} x[k]$$

Respuesta al impulso

$$\begin{aligned} h[n] &= \sum_{k=-\infty}^{n} \delta[k] \\ &= \begin{cases} 1, & n \geq 0 \\ 0, & n < 0 \end{cases} \\ &= u[n] \end{aligned}$$



Sistemas lineales invariantes en el tiempo

Análisis de la causalidad

- A partir de la respuesta al impulso, es fácil averiguar si los sistemas son causales.
- Para eso, hay que ver si la respuesta al impulso es nula en muestras negativas,

$$h[n] = 0, \qquad n < 0.$$

Retardo ideal	Media móvil	Acumulador
Causal si	Causal si	
$n_d \geq 0$	$M \geq 0$	Causal

Sistemas lineales invariantes en el tiempo

Análisis de la estabilidad

- También es posible averiguar si los sistemas son estables a partir de la respuesta al impulso.
- Para eso, hay que ver si la respuesta al impulso es absolutamente sumable,

$$S = \sum_{k=-\infty}^{\infty} |h[k]| < \infty \tag{5}$$

Retardo ideal	Media móvil	Acumulador
$S = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \lvert\delta[k-n_d]\rvert = 1$	$S = \sum_{k=0}^{M} \frac{1}{M+1} = 1$	$S = \sum_{k=-\infty}^{\infty} u[n] = \sum_{k=0}^{\infty} 1 = \infty$
Estable	Estable	Inestable

Sistemas IIR y FIR

Análisis de la estabilidad

- La respuesta al impulso de los sistemas retardo ideal y media móvil tiene un número finito de muestras no nulas.
- El hecho de que la respuesta al impulso sea de duración finita hace que la condición de estabilidad siempre se cumpla, ya que la sumatoria de la ecuación 5 tiene un número finito de sumandos.
- Por otro lado, el sistema acumulador tiene respuesta al impulso de duración infinita y es un sistema inestable.

Clasificación según la duración de la respuesta al impulso

Respuesta al impulso finita
(*FIR*, Finite impulse response)

- Siempre son estables.
- Se implementan mediante la convolución con la respuesta al impulso.

Respuesta al impulso infinita
(*IIR*, Infinite impulse response)

- Pueden ser inestables.
- Se implementan mediante una ecuación en recurrencia.

Sistemas IIR y FIR

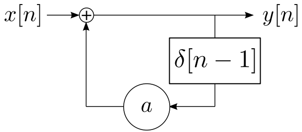
Ejemplo: sistema IIR de primer orden

- Se considera el siguiente sistema IIR de primer orden:

Ecuación en recurrencia

$$y[n] = ay[n-1] + x[n]$$

Diagrama de bloques



- Para calcular la respuesta al impulso, se establece la entrada en $x[n] = \delta[n]$.
- Además, se impone la condición inicial $y[-1] = 0$. Con condiciones iniciales nulas, se dice que el sistema está inicialmente en reposo.
- Resolviendo el sistema recursivamente en $n \geq 0$ se tiene que,

$$\begin{aligned}
y[0] &= ay[-1] + \delta[0] = 1 \\
y[1] &= ay[0] + \delta[1] = a \\
y[2] &= ay[1] + \delta[2] = a^2
\end{aligned}
\qquad
\begin{aligned}
y[3] &= ay[2] + \delta[3] = a^3 \\
&\vdots \\
y[n] &= a^n, \qquad \text{si } n \geq 0
\end{aligned}$$

Sistemas IIR y FIR

Ejemplo: sistema IIR de primer orden

- Para determinar la salida para $n < 0$, se despeja $y[n-1]$ para expresar la ecuación en recurrencia como,

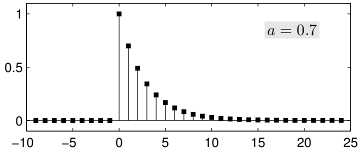
$$y[n-1] = a^{-1}\left(y[n] - x[n]\right)$$

y la salida es

$$y[-2] = a^{-1}\left(y[-1] + \delta[-1]\right) = 0$$
$$y[-3] = a^{-1}(y[-2] + \delta[-2]) = 0$$
$$y[-4] = a^{-1}(y[-3] + \delta[-3]) = 0$$
$$\vdots$$
$$y[n] = 0, \qquad \text{si } n < 0$$

- Combinando los resultados para $n \geq 0$ y $n < 0$, se obtiene que la respuesta al impulso del sistema es

$$h[n] = u[n]a^n$$



Sistemas IIR y FIR

Ejemplo: sistema IIR de primer orden

- Observación: el sistema tiene respuesta al impulso de duración infinita. Esto se debe a la realimentación de la salida a la entrada.
- ¿El sistema es lineal e invariante en el tiempo? Si el sistema se encuentra inicialmente en reposo, es lineal e invariante en el tiempo.
- Análisis de la estabilidad: hay que ver si la respuesta al impulso es absolutamente sumable,

$$
\begin{aligned}
S &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} |h[k]| \\
&= \sum_{k=-\infty}^{\infty} |u[k]a^k| \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} |a|^k \\
&\overset{(1)}{=} \begin{cases} \dfrac{1}{1-|a|}, & |a| < 1 \\ \infty, & |a| \geq 1 \end{cases}
\end{aligned}
$$

(1) Serie geométrica

$$
\sum_{k=0}^{n-1} r^k = \frac{1-r^n}{1-r}, \quad r \neq 1
$$

$$
\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{\infty} r^k &= \lim_{n\to\infty} \frac{1-r^n}{1-r} \\
&= \begin{cases} \dfrac{1}{1-r}, & r < 1 \\ \infty, & r \geq 1 \end{cases}
\end{aligned}
$$

Sistemas IIR y FIR

Ejemplo: sistema IIR de primer orden

- Análisis de la estabilidad: Si $|a| < 1$, la respuesta al impulso es absolutamente sumable y el sistema es estable.
- Observación:
  - Este es un ejemplo de un sistema con respuesta al impulso de duración infinita que es estable.
- Análisis de la causalidad: como se cumple que $h[n] = 0$ en $n < 0$, el sistema es causal.
- Observaciones:
  - En realidad, el sistema es causal gracias a la condición de reposo inicial.
  - Se puede ver que si $y[-1] \neq 0$, no se cumple que $h[n] = 0$ en $n < 0$ (ejercicio).
  - En el caso en que $y[-1] \neq 0$, tampoco se cumple que el sistema sea lineal e invariante en el tiempo (ejercicio).

Sistemas IIR y FIR

Sistemas definidos mediante una ecuación en diferencias

- El ejemplo anterior es un caso particular de una clase de sistemas definido a partir de la ecuación en diferencias.
- La relación entre la entrada y la salida satisface una ecuación en diferencias de orden N de la forma

$$\sum_{k=0}^{N} a_k y[n-k] = \sum_{m=0}^{M} b_m x[n-m].$$

- Asumiendo que $a_0 = 1$ (no se pierde generalidad) se tiene que

$$\begin{aligned} y[n] = b_0 x[n] + b_1 x[n-1] + b_2 x[n-2] + \cdots + b_M x[n-M] \\ - a_1 y[n-1] - a_2 y[n-2] - \cdots - a_N y[n-N]. \end{aligned}$$

- La muestra actual de la salida se calcula como una combinación lineal de la muestra actual y M muestras previas de la entrada y N muestras previas de la salida.

Sistemas IIR y FIR

Sistemas definidos mediante una ecuación en diferencias

$$y[n] = b_0 x[n] + b_1 x[n-1] + b_2 x[n-2] + \cdots + b_M x[n-M]$$
$$- a_1 y[n-1] - a_2 y[n-2] - \cdots - a_N y[n-N].$$

- Las constantes b_i, $i = 1, \ldots, M$ y a_j, $j = 1, \ldots, N$ son los coeficientes del sistema. El filtro queda completamente especificado con los valores de todos los coeficientes.
- Los valores b_i se llaman coeficientes de prealimentación (feedforward) y los valores a_j se llaman coeficientes de realimentación (backward).
- El filtro es recursivo si tiene algún coeficiente de realimentación no nulo. En ese caso, es un filtro IIR.
- Si todos los coeficientes de realimentación son nulos, no hay realimentación y el filtro es FIR.

Sistemas IIR y FIR

Sistemas definidos mediante una ecuación en diferencias

- Observaciones:
  - En general, un sistema definido mediante una ecuación en diferencias tiene respuesta al impulso infinita.
  - La respuesta al impulso puede calcularse imponiendo que la entrada es $x[n] = \delta[n]$ y resolviendo la ecuación recursivamente.
  - Es posible calcular la salida analíticamente mediante la convolución con la respuesta al impulso,

$$y[n] = x[n] * h[n] = \sum_{k=0}^{\infty} h[k]x[n-k].$$

  - En la práctica, por tratarse de sistemas IIR, no es posible calcular la salida mediante la convolución porque se necesita una cantidad infinita de cuentas para calcular cada muestra de la salida.
  - Para calcular la salida en la práctica hay que usar la ecuación en diferencias.

Sistemas IIR y FIR

Sistemas definidos mediante una ecuación en diferencias

- Observaciones:
  - Los sistemas FIR siempre pueden representarse mediante una ecuación en diferencias.
    - Los coeficientes de prealimentación coinciden con la respuesta al impulso del sistema,
    $$b_k = h[k].$$
    - Los coeficientes de realimentación son nulos.

$$
\begin{aligned}
y[n] &= x[n] * h[n] \\
&= \sum_{k=0}^{M} h[k]x[n-k] \\
&= h[0]x[n] + h[1]x[n-1] + h[2]x[n-2] + \cdots + h[M]x[n-M] \\
&= b_0x[n] + b_1x[n-1] + b_2x[n-2] + \cdots + b_Mx[n-M]
\end{aligned}
$$

Sistemas IIR y FIR

Ejemplos

- Se considera el sistema con la siguiente ecuación en diferencias,

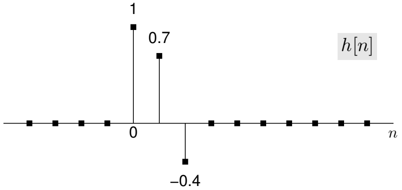
$$y[n] = x[n] + 0.7x[n-1] - 0.4x[n-2]$$

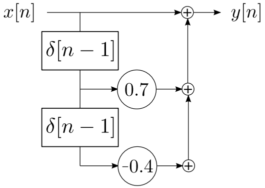
  - Los coeficientes de realimentación son nulos, y por lo tanto, el sistema es FIR (no hay realimentación de la salida en la entrada).
  - Los coeficientes de prealimentación son,

$$b_0 = 1,\ b_1 = 0.7 \text{ y } b_2 = -0.4.$$

  - Como la respuesta al impulso coincide con los coeficientes, esta es

$$h[n] = \delta[n] + 0.7\delta[n-1] - 0.4\delta[n-2]$$





Sistemas IIR y FIR

Ejemplos

- Sistema acumulador

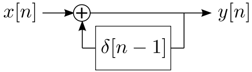
Ecuación de transformación

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{n} x[k]$$

Ecuación en diferencias

$$y[n] = y[n-1] + x[n]$$

Diagrama de bloques



  - Los coeficientes de la ecuación en diferencias son $b_0 = 1$ y $a_1 = -1$.
  - Como tiene un coeficiente de realimentación no nulo, la respuesta al impulso es infinita.
  - Es un sistema IIR de primer orden con $|a| = 1$, y por lo tanto, es inestable.

Ejemplos

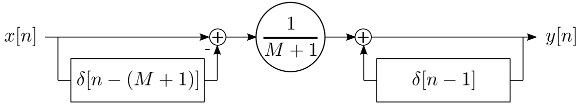
- Sistema de media móvil

Ecuación no recursiva

$$y[n] = \frac{1}{M+1}\sum_{k=0}^{M} x[n-k]$$

Ecuación en recurrencia

$$y[n] = y[n-1] + \frac{x[n] - x[n-(M+1)]}{M+1}$$



- El sistema de media móvil admite mas de una representación en ecuaciones en diferencias, una de forma recursiva y otra de forma no recursiva.
- Atención: es un ejemplo muy particular de un sistema realimentado que tiene respuesta al impulso finita.

Referencias I

Oppenheim, A. V. and Schafer, R. W. (1999).
Discrete-Time Signal Processing, chapter 2.
Prentice Hall, 2nd edition.