Sistemas

Modulación y Procesamiento de Señales

Pablo Zinemanas, Mauricio Ramos
{pzinemanas, mramos}@fing.edu.uy

Centro Universitario Regional Este
Sede Rocha
Tecnólogo en Telecomunicaciones

Curso 2017

Sistemas en tiempo discreto

Concepto

Un sistema se define matemáticamente como una transformación u operación que mapea una secuencia de entrada $x[n]$ en una única secuencia de salida $y[n]$.

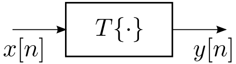
Sistemas en tiempo discreto

Concepto

Un sistema se define matemáticamente como una transformación u operación que mapea una secuencia de entrada $x[n]$ en una única secuencia de salida $y[n]$.

- Los sistemas se usan para procesar señales con el objetivo de resaltar o extraer características de interés.
- Pueden existir como una fórmula en un papel, un loop en un programa de computadora, como un circuito integrado en un chip.
- Un sistema se denota matemáticamente como:

$$y[n] = T\{x[n]\} \qquad (1)$$



  - La ecuación 1 representa una regla o una fórmula para calcular la secuencia de salida a partir de la secuencia de la entrada.
  - El valor de la salida en cada instante n puede depender de $x[n]$ en uno, muchos o todos los valores de n.

Sistemas en tiempo discreto

Ejemplo 1: Sistema Retardo Ideal

- El sistema de retardo se define por la ecuación

$$y[n] = x[n - n_d], \qquad -\infty < n < \infty,$$

donde n_d es un entero fijo que se llama retardo del sistema.

Sistemas en tiempo discreto

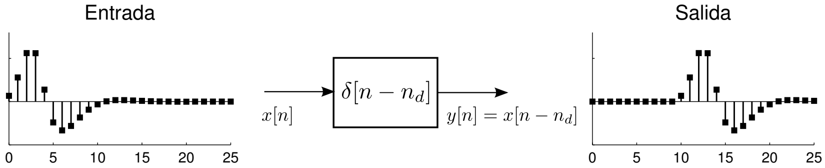
Ejemplo 1: Sistema Retardo Ideal

- El sistema de retardo se define por la ecuación

$$y[n] = x[n - n_d], \qquad -\infty < n < \infty,$$

  donde n_d es un entero fijo que se llama retardo del sistema.

  - El sistema forma la salida desplazando a la secuencia de entrada hacia la derecha una cantidad de n_d muestras (n_d positivo).
  - Si n_d es negativo, el sistema desplaza la secuencia de entrada a la izquierda correspondiendo a un adelanto temporal.



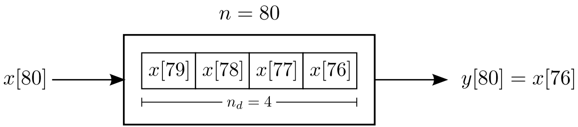
Sistemas en tiempo discreto

Ejemplo 1: Sistema Retardo Ideal

- Observaciones:
  - Solo una muestra de la secuencia de entrada es usada para calcular una muestra de la secuencia de salida. Por ejemplo, si $n_d = 4$:

$$y[80] = x[76], \quad y[81] = x[77], \quad y[82] = x[78], \quad \ldots$$

  - El sistema necesita almacenar n_d muestras de la entrada. Si $n_d = 4$, en $n = 80$ se necesita tener almacenado $x[76]$, $x[77]$, $x[78]$, $x[79]$, para dar la salida en $n = 80$, 81, 82, 83:



  - Si $n_d < 0$, para calcular la salida se necesitan muestras futuras de la entrada. Para eso, el sistema debería poder predecir el futuro.

Sistemas en tiempo discreto

Ejemplo 2: Sistema de Media Móvil

- El sistema de Media Móvil Causal se define por la ecuación

$$\begin{aligned} y[n] &= \frac{1}{M+1}\sum_{k=0}^{M} x[n-k] \\ &= \frac{1}{M+1}\{x[n] + x[n-1] + x[n-2] + \cdots + x[n-M]\} \end{aligned}$$

Ejemplo 2: Sistema de Media Móvil

- El sistema de Media Móvil Causal se define por la ecuación

$$\begin{aligned} y[n] &= \frac{1}{M+1}\sum_{k=0}^{M} x[n-k] \\ &= \frac{1}{M+1}\{x[n] + x[n-1] + x[n-2] + \cdots + x[n-M]\} \end{aligned}$$

- ¿Qué hace el sistema? Considérese la salida en $n = 80$ si $M = 4$:

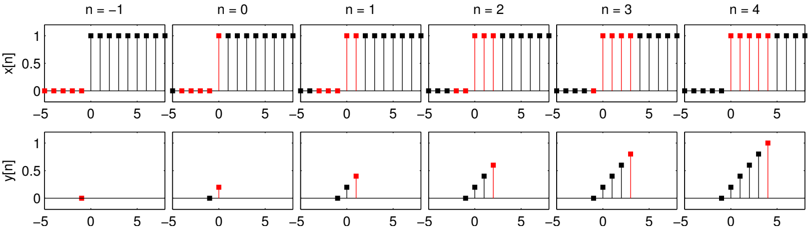
$$y[80] = \frac{x[80] + x[79] + x[78] + x[77] + x[76]}{5}$$

  - El sistema calcula la salida como el promedio de las últimas $M + 1$ muestras de la entrada.
- Observación:
  - La muestra actual de la salida es función de la muestra actual y M muestras previas de la entrada.
  - El sistema tiene que poder almacenar las M muestras previas de la entrada.

Sistemas en tiempo discreto

Ejemplo 2: Sistema de Media Móvil

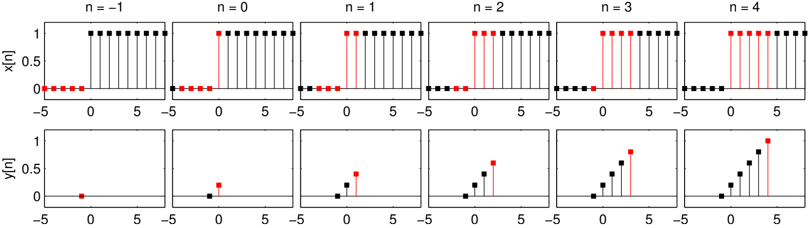
- El nombre del filtro proviene de que la salida es la media de la señal en una ventana deslizante.



Sistemas en tiempo discreto

Ejemplo 2: Sistema de Media Móvil

- El nombre del filtro proviene de que la salida es la media de la señal en una ventana deslizante.



- Implementación como sistema recursivo
  Es posible calcular la salida $y[n]$ realizando menos operaciones si se usa el valor anterior de la salida en el tiempo $n-1$:

$$y[80] = \frac{x[80]+x[79]+x[78]+x[77]+x[76]}{5}$$

$$y[81] = \frac{x[81]+x[80]+x[79]+x[78]+x[77]}{5}$$

$$y[81] = y[80] + \frac{x[81]-x[76]}{5}$$

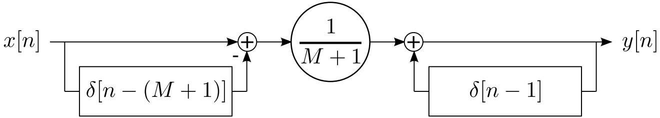
Sistemas en tiempo discreto

Ejemplo 2: Sistema de Media Móvil

- Implementación como sistema recursivo: La ecuación genérica del sistema de media móvil causal es

$$y[n] = y[n-1] + \frac{x[n] - x[n-(M+1)]}{M+1}$$

- Se necesitan solo tres operaciones para calcular la salida.
- Se necesita almacenar solo dos valores, $y[n-1]$ y $x[n-(M+1)]$



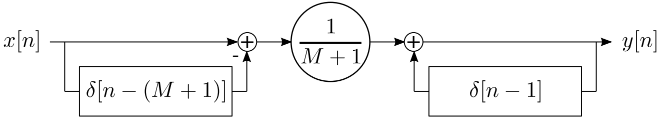
Sistemas en tiempo discreto

Ejemplo 2: Sistema de Media Móvil

- Implementación como sistema recursivo: La ecuación genérica del sistema de media móvil causal es

$$y[n] = y[n-1] + \frac{x[n] - x[n-(M+1)]}{M+1}$$

- Se necesitan solo tres operaciones para calcular la salida.
- Se necesita almacenar solo dos valores, $y[n-1]$ y $x[n-(M+1)]$



- La forma general del filtro de media móvil es

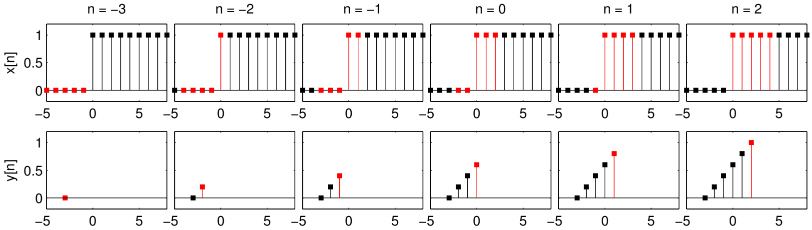
$$\begin{aligned} y[n] &= \frac{1}{M_1+M_2+1} \sum_{k=-M_1}^{M_2} x[n-k] \\ &= \frac{1}{M_1+M_2+1} \{x[n+M_1] + x[n+M_1-1] + \cdots + x[n] \\ &\quad + x[n-1] + \cdots + x[n-M_2]\} \end{aligned}$$

Sistemas en tiempo discreto

Ejemplo 2: Sistema de Media Móvil

- Considérese la salida en $n = 80$ si $M_1 = 2$ y $M_2 = 2$

$$y[80] = \frac{x[82] + x[81] + x[80] + x[79] + x[78]}{5}$$

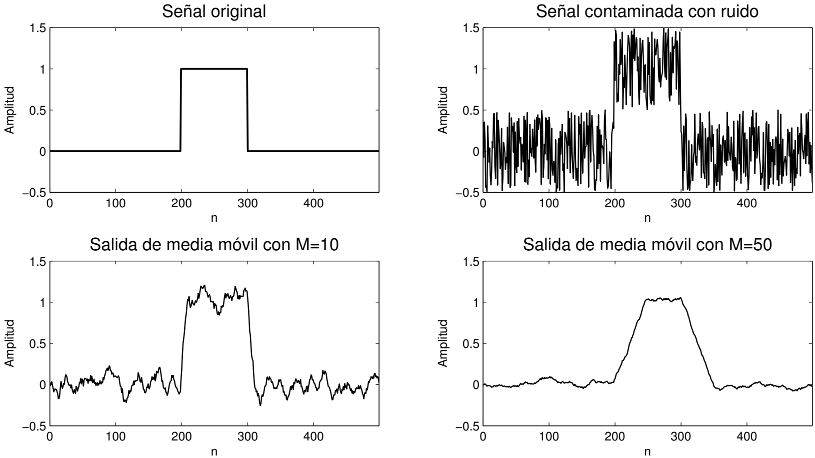


- Observaciones:
  - En el filtro de media móvil general, la salida depende de muestras futuras de la entrada.
  - Para que la salida no dependa de muestras futuras de la entrada se tiene que cumplir que $-M_1 \geq 0$ y $M_2 \geq 0$.

Sistemas en tiempo discreto

Ejemplo 2: Sistema de Media Móvil

Aplicación: el sistema de media móvil tiene desempeño óptimo en reducción de ruido blanco.



Sistemas en tiempo discreto

Clasificación de los sistemas

- Si no se impone ninguna restricción en las características de la transformación $T\{\cdot\}$, los sistemas son tan generales que hace que sean imposibles de tratar y analizar, y usar en la práctica.
- Es posible definir clases de sistemas imponiendo restricciones en las propiedades de la transformación $T\{\cdot\}$.

Sistemas en tiempo discreto

1. Sistemas sin memoria

- Un sistema se dice sin memoria si la salida $y[n]$ en cada valor de n solo depende de la entrada $x[n]$ en el mismo valor de n.

Sistemas en tiempo discreto

1. Sistemas sin memoria

- Un sistema se dice sin memoria si la salida $y[n]$ en cada valor de n solo depende de la entrada $x[n]$ en el mismo valor de n.

Ejemplo 3. Sistema "Cuadrado de la Entrada"

- El sistema en el cual la entrada $x[n]$ y la salida $y[n]$ se relacionan como

$$y[n] = (x[n])^2\,, \qquad \forall n$$

  es un sistema sin memoria.
- Otros sistemas sin memoria son por ejemplo

$$y[n] = Ax[n], \qquad y[n] = \log_{10}(x[n])$$

- ¿Los sistemas retardo ideal y media móvil son sin memoria?

Sistemas en tiempo discreto

1. Sistemas sin memoria

- Un sistema se dice sin memoria si la salida $y[n]$ en cada valor de n solo depende de la entrada $x[n]$ en el mismo valor de n.

Ejemplo 3. Sistema "Cuadrado de la Entrada"

- El sistema en el cual la entrada $x[n]$ y la salida $y[n]$ se relacionan como

$$y[n] = (x[n])^2\,, \qquad \forall n$$

  es un sistema sin memoria.

- Otros sistemas sin memoria son por ejemplo

$$y[n] = Ax[n], \qquad y[n] = \log_{10}(x[n])$$

- ¿Los sistemas retardo ideal y media móvil son sin memoria?
  - Sistema retardo ideal: no es un sistema sin memoria a menos que $n_d = 0$. Como se vió, es necesario almacenar n_d muestras para calcular la salida.
  - Sistema de media móvil: no es un sistema sin memoria a menos que $M_1 = M_2 = 0$.

Sistemas en tiempo discreto

2. Sistemas lineales

- La clase de los sistemas lineales está determinada por el principio de superposición.

Sistemas en tiempo discreto

2. Sistemas lineales

- La clase de los sistemas lineales está determinada por el principio de superposición.
- Definición de sistema lineal: Un sistema es lineal si dado que
  - La entrada $x_1[n]$ produce la salida $y_1[n]$

$$y_1[n] = T\{x_1[n]\}$$

  - La entrada $x_2[n]$ produce la salida $y_2[n]$

$$y_2[n] = T\{x_2[n]\}$$

Sistemas en tiempo discreto

2. Sistemas lineales

- La clase de los sistemas lineales está determinada por el principio de superposición.
- Definición de sistema lineal: Un sistema es lineal si dado que
  - La entrada $x_1[n]$ produce la salida $y_1[n]$

$$y_1[n] = T\{x_1[n]\}$$

  - La entrada $x_2[n]$ produce la salida $y_2[n]$

$$y_2[n] = T\{x_2[n]\}$$

  se cumple que

  1. Propiedad de aditividad: La entrada $x_1[n] + x_2[n]$ produce la salida $y_1[n] + y_2[n]$,

$$T\{x_1[n] + x_2[n]\} = T\{x_1[n]\} + T\{x_2[n]\} = y_1[n] + y_2[n]$$

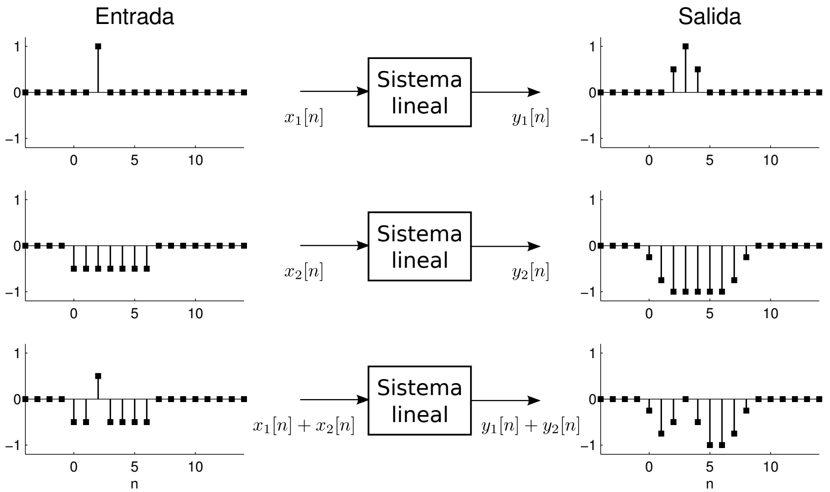
  2. Propiedad de homogeneidad: La entrada $ax_1[n]$ produce la salida $ay_1[n]$,

$$T\{ax_1[n]\} = aT\{x_1[n]\} = ay_1[n], \quad \forall a \text{ constante.}$$

Sistemas en tiempo discreto

2. Sistemas lineales

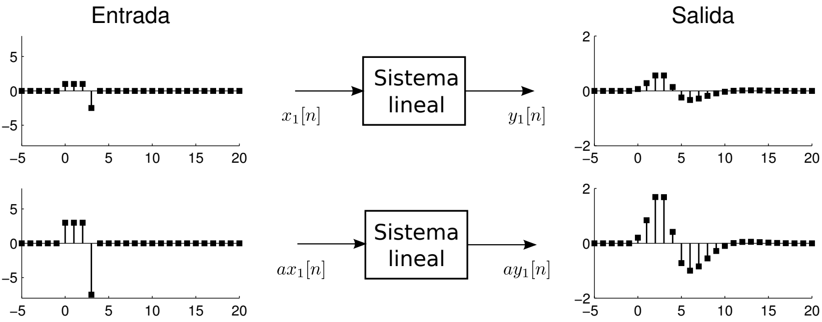
Ilustración de la condición de aditividad



Sistemas en tiempo discreto

2. Sistemas lineales

Ilustración de la condición de homogeneidad



Sistemas en tiempo discreto

2. Sistemas lineales

- Principio de superposición: Combinando la condición de aditividad y la de homogeneidad se obtiene el principio de superposición:

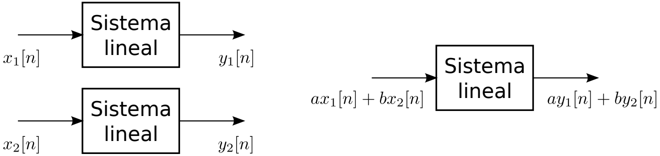
$$T\{ax_1[n] + bx_2[n]\} = aT\{x_1[n]\} + bT\{x_2[n]\} = ay_1[n] + by_2[n]$$

Sistemas en tiempo discreto

2. Sistemas lineales

- Principio de superposición: Combinando la condición de aditividad y la de homogeneidad se obtiene el principio de superposición:

$$T\{ax_1[n] + bx_2[n]\} = aT\{x_1[n]\} + bT\{x_2[n]\} = ay_1[n] + by_2[n]$$

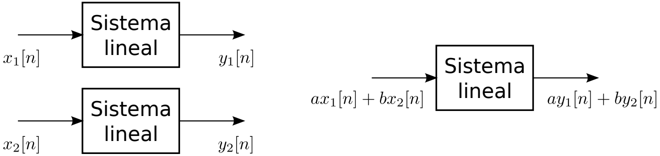


Sistemas en tiempo discreto

2. Sistemas lineales

- Principio de superposición: Combinando la condición de aditividad y la de homogeneidad se obtiene el principio de superposición:

$$T\{ax_1[n] + bx_2[n]\} = aT\{x_1[n]\} + bT\{x_2[n]\} = ay_1[n] + by_2[n]$$



- El principio de superposición puede generalizarse para múltiples entradas.
  - Si la salida de un sistema lineal es $y_k[n]$ cuando la entrada es $x_k[n]$,

Entrada	Salida
$x[n] = \sum_k a_k x_k[n]$	$y[n] = \sum_k a_k y_k[n]$

Sistemas en tiempo discreto

Ejemplo

- Averiguar si el sistema "Cuadrado de la Entrada" es lineal
  - El sistema es lineal si verifica el principio de superposición para todas las entradas posibles.

Sistemas en tiempo discreto

Ejemplo

- Averiguar si el sistema "Cuadrado de la Entrada" es lineal
  - El sistema es lineal si verifica el principio de superposición para todas las entradas posibles.
  - Definiendo dos entradas y sus salidas correspondientes,

$$y_1[n] = T\{x_1[n]\} = (x_1[n])^2, \qquad y_2[n] = T\{x_2[n]\} = (x_2[n])^2$$

Sistemas en tiempo discreto

Ejemplo

- Averiguar si el sistema “Cuadrado de la Entrada” es lineal
  - El sistema es lineal si verifica el principio de superposición para todas las entradas posibles.
  - Definiendo dos entradas y sus salidas correspondientes,

$$y_1[n] = T\{x_1[n]\} = (x_1[n])^2, \qquad y_2[n] = T\{x_2[n]\} = (x_2[n])^2$$

    el principio de superposición se cumple si la entrada

$$x_3[n] = ax_1[n] + bx_2[n]$$

    produce la salida

$$y_3[n] = T\{ax_1[n] + bx_2[n]\}$$

Sistemas en tiempo discreto

Ejemplo

- Averiguar si el sistema "Cuadrado de la Entrada" es lineal
  - El sistema es lineal si verifica el principio de superposición para todas las entradas posibles.
  - Definiendo dos entradas y sus salidas correspondientes,

$$y_1[n] = T\{x_1[n]\} = (x_1[n])^2, \qquad y_2[n] = T\{x_2[n]\} = (x_2[n])^2$$

el principio de superposición se cumple si la entrada

$$x_3[n] = ax_1[n] + bx_2[n]$$

produce la salida

$$\begin{aligned} y_3[n] &= T\{ax_1[n] + bx_2[n]\} \\ &\overset{(a)}{=} aT\{x_1[n]\} + bT\{x_2[n]\} \end{aligned}$$

(a) Principio de superposición

Ejemplo

- Averiguar si el sistema "Cuadrado de la Entrada" es lineal
  - El sistema es lineal si verifica el principio de superposición para todas las entradas posibles.
  - Definiendo dos entradas y sus salidas correspondientes,

$$y_1[n] = T\{x_1[n]\} = (x_1[n])^2, \qquad y_2[n] = T\{x_2[n]\} = (x_2[n])^2$$

el principio de superposición se cumple si la entrada

$$x_3[n] = ax_1[n] + bx_2[n]$$

produce la salida

$$\begin{aligned} y_3[n] &= T\{ax_1[n] + bx_2[n]\} \\ &\overset{(a)}{=} aT\{x_1[n]\} + bT\{x_2[n]\} \\ &= a(x_1[n])^2 + b(x_2[n])^2 \end{aligned}$$

(a) Principio de superposición

Sistemas en tiempo discreto

Ejemplo

- Averiguar si el sistema "Cuadrado de la Entrada" es lineal (cont.)
  - Pero la salida del sistema correspondiente a la entrada $x_3[n]$ es

$$y'_3[n] = T\{x_3[n]\}$$

Sistemas en tiempo discreto

Ejemplo

- Averiguar si el sistema “Cuadrado de la Entrada” es lineal (cont.)
  - Pero la salida del sistema correspondiente a la entrada $x_3[n]$ es

$$
\begin{aligned}
y_3'[n] &= T\{x_3[n]\} \\
&= T\{ax_1[n] + bx_2[n]\}
\end{aligned}
$$

Sistemas en tiempo discreto

Ejemplo

- Averiguar si el sistema "Cuadrado de la Entrada" es lineal (cont.)
  - Pero la salida del sistema correspondiente a la entrada $x_3[n]$ es

$$
\begin{aligned}
y_3'[n] &= T\{x_3[n]\} \\
&= T\{ax_1[n] + bx_2[n]\} \\
&\overset{(a)}{=} (ax_1[n] + bx_2[n])^2
\end{aligned}
$$

(a) El sistema eleva la entrada al cuadrado.

Sistemas en tiempo discreto

Ejemplo

- Averiguar si el sistema "Cuadrado de la Entrada" es lineal (cont.)
  - Pero la salida del sistema correspondiente a la entrada $x_3[n]$ es

$$\begin{aligned} y'_3[n] &= T\{x_3[n]\} \\ &= T\{ax_1[n] + bx_2[n]\} \\ &\overset{(a)}{=} (ax_1[n] + bx_2[n])^2 \\ &= a^2(x_1[n])^2 + b^2(x_2[n])^2 + 2abx_1[n]x_2[n] \end{aligned}$$

(a) El sistema eleva la entrada al cuadrado.

Sistemas en tiempo discreto

Ejemplo

- Averiguar si el sistema "Cuadrado de la Entrada" es lineal (cont.)
  - Pero la salida del sistema correspondiente a la entrada $x_3[n]$ es

$$\begin{aligned} y_3'[n] &= T\{x_3[n]\} \\ &= T\{ax_1[n] + bx_2[n]\} \\ &\overset{(a)}{=} (ax_1[n] + bx_2[n])^2 \\ &= a^2(x_1[n])^2 + b^2(x_2[n])^2 + 2abx_1[n]x_2[n] \\ &\neq y_3[n] \end{aligned}$$

(a) El sistema eleva la entrada al cuadrado.

Sistemas en tiempo discreto

Ejemplo

- Averiguar si el sistema "Cuadrado de la Entrada" es lineal (cont.)
  - Pero la salida del sistema correspondiente a la entrada $x_3[n]$ es

$$\begin{aligned}
y_3'[n] &= T\{x_3[n]\} \\
&= T\{ax_1[n] + bx_2[n]\} \\
&\overset{(a)}{=} (ax_1[n] + bx_2[n])^2 \\
&= a^2(x_1[n])^2 + b^2(x_2[n])^2 + 2abx_1[n]x_2[n] \\
&\neq y_3[n]
\end{aligned}$$

(a) El sistema eleva la entrada al cuadrado.

  - El sistema no verifica el principio de superposición
  - Se concluye que el sistema no es lineal.

Ejemplo 4. Sistema acumulador

- La salida del sistema acumulador en el instante n es la suma de todas las muestras de la entrada hasta el instante n.

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{n} x[k]$$

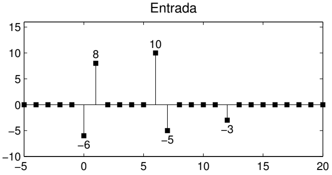
Sistemas en tiempo discreto

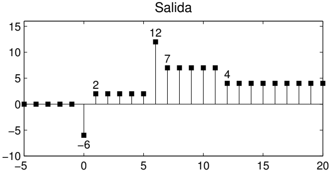
Ejemplo 4. Sistema acumulador

- La salida del sistema acumulador en el instante n es la suma de todas las muestras de la entrada hasta el instante n.

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{n} x[k]$$

- Implementación como sistema recursivo





$$y[80] = \sum_{k=-\infty}^{80} x[k] = x[80] + x[79] + \cdots + x[0] + \ldots$$

$$y[81] = \sum_{k=-\infty}^{81} x[k] = x[81] + x[80] + \cdots + x[0] + \ldots$$

$$y[81] = y[80] + x[81]$$

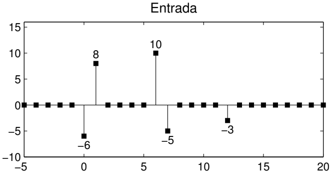
Sistemas en tiempo discreto

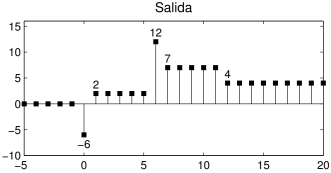
Ejemplo 4. Sistema acumulador

- La salida del sistema acumulador en el instante n es la suma de todas las muestras de la entrada hasta el instante n.

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{n} x[k]$$

- Implementación como sistema recursivo





$$y[80] = \sum_{k=-\infty}^{80} x[k] = x[80] + x[79] + \cdots + x[0] + \ldots$$

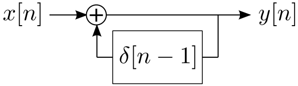
$$y[81] = \sum_{k=-\infty}^{81} x[k] = x[81] + x[80] + \cdots + x[0] + \ldots$$

$$y[81] = y[80] + x[81]$$

Ecuación en recurrencia

$$y[n] = y[n-1] + x[n]$$

Diagrama de bloques



Ejemplo 4. Sistema acumulador

- ¿El sistema acumulador es lineal?
  - Para comprobarlo, se definen dos entradas arbitrarias y las salidas correspondientes,

$$y_1[n] = \sum_{k=-\infty}^{n} x_1[k], \qquad y_2[n] = \sum_{k=-\infty}^{n} x_2[k],$$

y el principio de superposición requiere que si la entrada es $x_3[n] = ax_1[n] + bx_2[n]$, la salida es $y_3[n] = ay_1[n] + by_2[n]$.

Ejemplo 4. Sistema acumulador

- ¿El sistema acumulador es lineal?
  - Para comprobarlo, se definen dos entradas arbitrarias y las salidas correspondientes,

$$y_1[n] = \sum_{k=-\infty}^{n} x_1[k], \qquad y_2[n] = \sum_{k=-\infty}^{n} x_2[k],$$

    y el principio de superposición requiere que si la entrada es $x_3[n] = ax_1[n] + bx_2[n]$, la salida es $y_3[n] = ay_1[n] + by_2[n]$.
  - La salida del acumulador cuando la entrada es $x_3[n]$ es

$$\begin{aligned} y_3'[n] &= \sum_{k=-\infty}^{n} x_3[k] \\ &= \sum_{k=-\infty}^{n} (ax_1[k] + bx_2[k]) \\ &\overset{(a)}{=} a \sum_{k=-\infty}^{n} x_1[k] + b \sum_{k=-\infty}^{n} x_2[k] \\ &= ay_1[n] + by_2[n] \end{aligned}$$

(a) Linealidad de la sumatoria

Ejemplo 4. Sistema acumulador

- ¿El sistema acumulador es lineal?
  - Para comprobarlo, se definen dos entradas arbitrarias y las salidas correspondientes,

$$y_1[n] = \sum_{k=-\infty}^{n} x_1[k], \qquad y_2[n] = \sum_{k=-\infty}^{n} x_2[k],$$

    y el principio de superposición requiere que si la entrada es $x_3[n] = ax_1[n] + bx_2[n]$, la salida es $y_3[n] = ay_1[n] + by_2[n]$.
  - La salida del acumulador cuando la entrada es $x_3[n]$ es

$$\begin{aligned} y_3'[n] &= \sum_{k=-\infty}^{n} x_3[k] \\ &= \sum_{k=-\infty}^{n} (ax_1[k] + bx_2[k]) \\ &\overset{(a)}{=} a \sum_{k=-\infty}^{n} x_1[k] + b \sum_{k=-\infty}^{n} x_2[k] \\ &= ay_1[n] + by_2[n] \end{aligned}$$

(a) Linealidad de la sumatoria

Como $y_3'[n] = y_3[n]$, el sistema acumulador satisface el principio de superposición para todas las entradas y por lo tanto, es lineal.

Sistemas en tiempo discreto

Observación

- Es mas simple demostrar que un sistema no es lineal (si no lo es), ya que alcanza con encontrar solo un par de entradas que no satisfaga el principio de superposición.

Sistemas en tiempo discreto

Observación

- Es mas simple demostrar que un sistema no es lineal (si no lo es), ya que alcanza con encontrar solo un par de entradas que no satisfaga el principio de superposición.
- En cambio, para demostrar que un sistema es lineal, hay que verificar que se cumple el principio de superposición para todas las posibles entradas y para todas las constantes multiplicativas (a y b) de las entradas.

Sistemas en tiempo discreto

Observación

- Es mas simple demostrar que un sistema no es lineal (si no lo es), ya que alcanza con encontrar solo un par de entradas que no satisfaga el principio de superposición.
- En cambio, para demostrar que un sistema es lineal, hay que verificar que se cumple el principio de superposición para todas las posibles entradas y para todas las constantes multiplicativas (a y b) de las entradas.

Ejercicio

- Verificar que los sistemas retardo ideal y media móvil (ejemplos 1 y 2) son lineales.

3. Sistemas invariantes en el tiempo

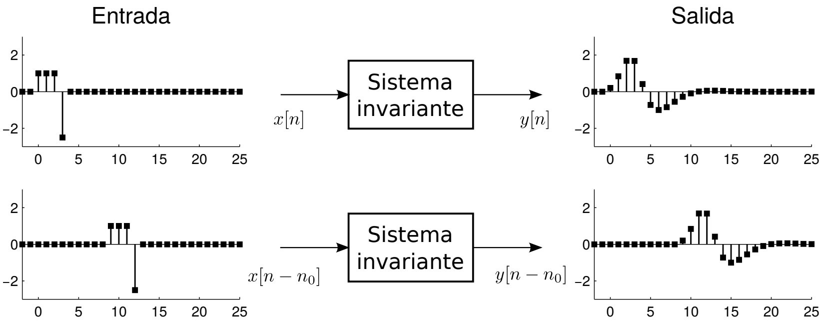
- Un sistema es invariante en el tiempo si un desplazamiento temporal en la entrada produce una salida con el mismo desplazamiento temporal.

3. Sistemas invariantes en el tiempo

- Un sistema es invariante en el tiempo si un desplazamiento temporal en la entrada produce una salida con el mismo desplazamiento temporal.
- Específicamente, si un sistema transforma la entrada $x[n]$ en la salida $y[n]$ se dice que es invariante en el tiempo si transforma la entrada $x[n-n_0]$ en la salida $y[n-n_0]$.
- Conceptualmente, significa que el sistema no cambia con el tiempo.

Sistemas en tiempo discreto

3. Sistemas invariantes en el tiempo



Ejemplo: invarianza del sistema acumulador

- Averiguar si el sistema acumulador es invariante en el tiempo.

Sistemas en tiempo discreto

Ejemplo: invarianza del sistema acumulador

- Averiguar si el sistema acumulador es invariante en el tiempo.
  - Si la entrada es $x[n]$, la salida es $y[n] = \displaystyle\sum_{k=-\infty}^{n} x[k]$,
  - y la salida retardada n_0 muestras es $y[n-n_0] = \displaystyle\sum_{k=-\infty}^{n-n_0} x[k]$.
  - Para probar que es invariante, hay que probar que la entrada retardada n_0 muestras, $x[n-n_0]$, produce la salida $y[n-n_0]$.

Sistemas en tiempo discreto

Ejemplo: invarianza del sistema acumulador

- Averiguar si el sistema acumulador es invariante en el tiempo.
  - Si la entrada es $x[n]$, la salida es $y[n] = \sum_{k=-\infty}^{n} x[k]$,
  - y la salida retardada n_0 muestras es $y[n-n_0] = \sum_{k=-\infty}^{n-n_0} x[k]$.
  - Para probar que es invariante, hay que probar que la entrada retardada n_0 muestras, $x[n-n_0]$, produce la salida $y[n-n_0]$.
  - La respuesta a la entrada retardada n_0 muestras es,

$$
\begin{aligned}
y'[n] &= \sum_{k=-\infty}^{n} x[k-n_0] \\
&\overset{(a)}{=} \sum_{m=-\infty}^{n-n_0} x[m] \\
&= y[n-n_0]
\end{aligned}
$$

(a) Cambio de variable: $m = k - n_0$

Ejemplo: invarianza del sistema acumulador

- Averiguar si el sistema acumulador es invariante en el tiempo.
  - Si la entrada es $x[n]$, la salida es $y[n] = \displaystyle\sum_{k=-\infty}^{n} x[k]$,
  - y la salida retardada n_0 muestras es $y[n-n_0] = \displaystyle\sum_{k=-\infty}^{n-n_0} x[k]$.
  - Para probar que es invariante, hay que probar que la entrada retardada n_0 muestras, $x[n-n_0]$, produce la salida $y[n-n_0]$.
  - La respuesta a la entrada retardada n_0 muestras es,

$$
\begin{aligned}
y'[n] &= \sum_{k=-\infty}^{n} x[k-n_0] \\
&\overset{(a)}{=} \sum_{m=-\infty}^{n-n_0} x[m] \\
&= y[n-n_0]
\end{aligned}
$$

(a) Cambio de variable: $m = k - n_0$

  - Se concluye que el acumulador es invariante en el tiempo.

Sistemas en tiempo discreto

Ejemplo: respuesta al impulso del sistema acumulador

- Por lo visto hasta ahora, el sistema acumulador es lineal e invariante en el tiempo.
- Se verá mas adelante que una forma de caracterizar los sistemas lineales e invariantes en el tiempo es a través de la respuesta al impulso.

Sistemas en tiempo discreto

Ejemplo: respuesta al impulso del sistema acumulador

- Por lo visto hasta ahora, el sistema acumulador es lineal e invariante en el tiempo.
- Se verá mas adelante que una forma de caracterizar los sistemas lineales e invariantes en el tiempo es a través de la respuesta al impulso.
- ¿cuál es la salida del sistema acumulador cuando la entrada es un impulso?

Sistemas en tiempo discreto

Ejemplo: respuesta al impulso del sistema acumulador

- Por lo visto hasta ahora, el sistema acumulador es lineal e invariante en el tiempo.
- Se verá mas adelante que una forma de caracterizar los sistemas lineales e invariantes en el tiempo es a través de la respuesta al impulso.
- ¿cuál es la salida del sistema acumulador cuando la entrada es un impulso?
- Si la entrada es

$$x[n] = \delta[n],$$

- la salida es

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{n} \delta[k]$$

Sistemas en tiempo discreto

Ejemplo: respuesta al impulso del sistema acumulador

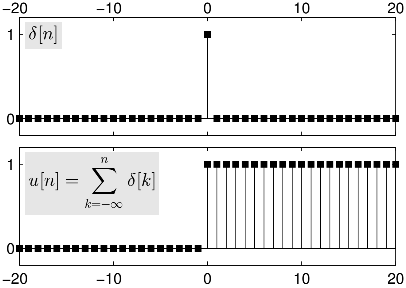
- Por lo visto hasta ahora, el sistema acumulador es lineal e invariante en el tiempo.
- Se verá mas adelante que una forma de caracterizar los sistemas lineales e invariantes en el tiempo es a través de la respuesta al impulso.
- ¿cuál es la salida del sistema acumulador cuando la entrada es un impulso?

- Si la entrada es

$$x[n] = \delta[n],$$

- la salida es

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{n} \delta[k]$$
$$= u[n]$$



Sistemas en tiempo discreto

4. Sistemas causales

- Un sistema es causal si para todo n_0, la salida en el instante $n = n_0$ depende de valores de la entrada en $n \leq n_0$.

Sistemas en tiempo discreto

4. Sistemas causales

- Un sistema es causal si para todo n_0, la salida en el instante $n = n_0$ depende de valores de la entrada en $n \leq n_0$.
- Si un sistema es causal, se cumple que si $x_1[n] = x_2[n]$ para $n \leq n_0$, entonces las salidas correspondientes cumplen que $y_1[n] = y_2[n]$ para $n \leq n_0$.
- Conceptualmente, significa que el sistema es no anticipativo, y por lo tanto, la salida no depende de muestras futuras de la entrada,

$$y[n] = f\left(x[n], x[n-1], x[n-2], \dots\right)$$

4. Sistemas causales

- Un sistema es causal si para todo n_0, la salida en el instante $n = n_0$ depende de valores de la entrada en $n \leq n_0$.
- Si un sistema es causal, se cumple que si $x_1[n] = x_2[n]$ para $n \leq n_0$, entonces las salidas correspondientes cumplen que $y_1[n] = y_2[n]$ para $n \leq n_0$.
- Conceptualmente, significa que el sistema es no anticipativo, y por lo tanto, la salida no depende de muestras futuras de la entrada,

$$y[n] = f\left(x[n], x[n-1], x[n-2], \dots\right)$$

- Ejercicio: Indicar si los siguientes sistemas son causales:
  - Sistema de retardo
  - Sistema de media móvil
  - Acumulador
  - Sistema sin memoria

5. Sistemas estables

- Un sistema es estable en el sentido entrada acotada, salida acotada (*BIBO*, Bounded Input, Bounded Output) si y solo si cada entrada acotada produce una salida acotada.

5. Sistemas estables

- Un sistema es estable en el sentido entrada acotada, salida acotada (*BIBO*, Bounded Input, Bounded Output) si y solo si cada entrada acotada produce una salida acotada.
- La entrada $x[n]$ es acotada si existe un número positivo fijo B_x tal que

$$|x[n]| \leq B_x < \infty, \qquad \forall n.$$

Sistemas en tiempo discreto

5. Sistemas estables

- Un sistema es estable en el sentido entrada acotada, salida acotada (*BIBO*, Bounded Input, Bounded Output) si y solo si cada entrada acotada produce una salida acotada.
- La entrada $x[n]$ es acotada si existe un número positivo fijo B_x tal que
$$|x[n]| \leq B_x < \infty, \qquad \forall n.$$
- La propiedad de estabilidad requiere que para toda entrada acotada, debe existir un número positivo fijo B_y tal que
$$|y[n]| \leq B_y < \infty, \qquad \forall n.$$

Sistemas en tiempo discreto

Ejemplos

- Estabilidad del sistema "Cuadrado de la Entrada"
  - Para ver si el sistema es estable, se debe observar que para una entrada arbitraria acotada,

$$|x[n]| \leq B_x, \qquad \forall n,$$

la salida $y[n]$ debe ser acotada, es decir, existe B_y finito tal que

$$|y[n]| \leq B_y, \qquad \forall n.$$

Sistemas en tiempo discreto

Ejemplos

- Estabilidad del sistema "Cuadrado de la Entrada"
  - Para ver si el sistema es estable, se debe observar que para una entrada arbitraria acotada,

    $$|x[n]| \leq B_x, \qquad \forall n,$$

    la salida $y[n]$ debe ser acotada, es decir, existe B_y finito tal que

    $$|y[n]| \leq B_y, \qquad \forall n.$$

  - En este caso se tiene que

$$y[n] = (x[n])^2 \quad \text{con} \quad |x[n]| \leq B_x,\ \forall n \qquad \Rightarrow \qquad \begin{aligned} |y[n]| &= |x[n]|^2 \\ &\leq B_x^2,\ \forall n. \end{aligned}$$

Sistemas en tiempo discreto

Ejemplos

- Estabilidad del sistema "Cuadrado de la Entrada"
  - Para ver si el sistema es estable, se debe observar que para una entrada arbitraria acotada,

$$|x[n]| \leq B_x, \qquad \forall n,$$

la salida $y[n]$ debe ser acotada, es decir, existe B_y finito tal que

$$|y[n]| \leq B_y, \qquad \forall n.$$

  - En este caso se tiene que

$$y[n] = (x[n])^2 \quad \text{con} \quad |x[n]| \leq B_x,\ \forall n \qquad \Rightarrow \qquad \begin{aligned} |y[n]| &= |x[n]|^2 \\ &\leq B_x^2,\ \forall n. \end{aligned}$$

  - Por lo tanto, eligiendo $B_y = B_x^2$, se cumple que

$$|y[n]| \leq B_y, \qquad \forall n.$$

  - Se concluye que el sistema es estable.

Sistemas en tiempo discreto

Ejemplos

- Estabilidad del sistema $y[n] = \log_{10}(x[n])$

Sistemas en tiempo discreto

Ejemplos

- Estabilidad del sistema $y[n] = \log_{10}(x[n])$
  - Si existe algún n_0 tal que $x[n_0] = 0$, se tiene que

    $$y[n_0] = \log_{10}(x[n_0]) = \log_{10}(0) = -\infty,$$

    y por lo tanto, el sistema es inestable.

Sistemas en tiempo discreto

Ejemplos

- Estabilidad del sistema $y[n] = \log_{10}(x[n])$
  - Si existe algún n_0 tal que $x[n_0] = 0$, se tiene que

$$y[n_0] = \log_{10}(x[n_0]) = \log_{10}(0) = -\infty,$$

    y por lo tanto, el sistema es inestable.

Observaciones

- Notar que existen entradas acotadas que producen salidas acotadas.
  - Cualquier entrada que cumple que $x[n] > 0$ para todo n.
- El hecho de haber encontrado una entrada que produce una salida no acotada, ya indica que el sistema no es estable.
- Para demostrar que el sistema es estable, hay que probar que la salida es acotada para todas las entradas acotadas existentes. Si la salida es acotada para una entrada particular, no garantiza que el sistema sea estable.

Sistemas en tiempo discreto

Ejemplos

- Estabilidad del sistema Acumulador
  - Se considera el caso en que la entrada es el escalón, $x[n] = u[n]$, que es acotada por $B_x = 1$.

Ejemplos

- Estabilidad del sistema Acumulador
  - Se considera el caso en que la entrada es el escalón, $x[n] = u[n]$, que es acotada por $B_x = 1$.
  - La correspondiente salida del acumulador es

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{n} u[k] = \begin{cases} 0, & n < 0 \\ n+1, & n \geq 0 \end{cases}$$

Sistemas en tiempo discreto

Ejemplos

- Estabilidad del sistema Acumulador
  - Se considera el caso en que la entrada es el escalón, $x[n] = u[n]$, que es acotada por $B_x = 1$.
  - La correspondiente salida del acumulador es

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{n} u[k] = \begin{cases} 0, & n < 0 \\ n+1, & n \geq 0 \end{cases}$$

  - No existe B_y tal que

$$y[n] \leq B_y, \qquad \forall n$$

    ya que siempre se puede encontrar un n tal que

$$y[n] = n + 1 > B_y.$$

  - Se concluye que el acumulador es inestable.

Sistemas en tiempo discreto

Ejercicio

- Estudiar la estabilidad de los siguientes sistemas:
  - Sistema de retardo
  - Sistema de media móvil

Referencias I

Oppenheim, A. V. and Schafer, R. W. (1999).
Discrete-Time Signal Processing, chapter 2.
Prentice Hall, 2nd edition.

Smith, S. W. (1997).
The Scientist & Engineer's Guide to Digital Signal Processing, chapter 5 & 15.
California Technical Pub., 1st edition.