Secuencias y Sistemas

Modulación y Procesamiento de Señales

Ernesto López
Pablo Zinemanas, Mauricio Ramos
{pzinemanas, mramos}@fing.edu.uy

Centro Universitario Regional Este
Sede Rocha
Tecnólogo en Telecomunicaciones

Curso 2016

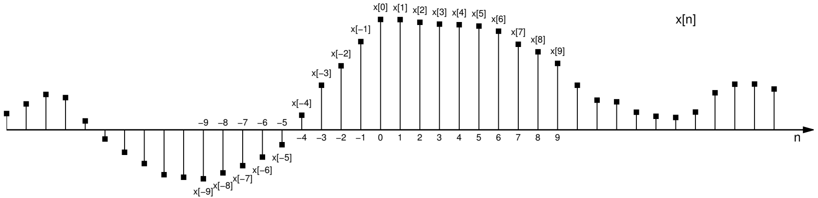
Señales en tiempo discreto: secuencias

Notación y representación

- Una señal discreta se representa como una secuencia de números x, en donde el n-ésimo número de la secuencia se denota como $x[n]$.
- Formalmente se escribe como

$$x = \{x[n]\}, \qquad n \in \mathbb{Z}$$

- Haciendo un abuso de lenguaje, es conveniente referirse a la señal completa como la secuencia $x[n]$.
- Representación gráfica de una señal discreta:



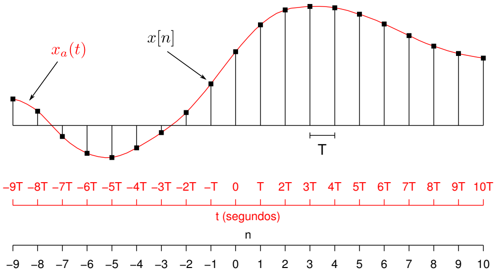
Observación: si bien la abscisa se dibuja como una línea continua, es importante tener en cuenta que $x[n]$ está definida solo en valores enteros de n.

Señales en tiempo discreto

Señal discreta obtenida del muestreo de una señal continua

- Una señal discreta puede obtenerse mediante el muestreo periódico de una señal analógica. Sea $x_a(t)$ la señal analógica.
- El valor numérico de la muestra n-ésima de la señal discreta es igual al valor de la señal analógica en el instante nT:

$$x[n] = x_a(nT), \qquad n \in \mathbb{Z}$$



- T es el intervalo entre muestras y se llama período de muestreo.

$$[T] = \text{segundos}$$

- La cantidad $f_s = \frac{1}{T}$ es la frecuencia de muestreo.

$$[f_s] = \text{Hertz}$$

- Voz en telefonía básica: $f_s = 8000$ Hz, $T = 125$ ms.
- Audio en CD: $f_s = 44100$ Hz, $T \approx 23$ ms.

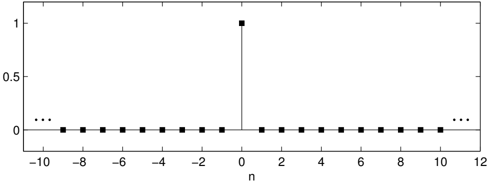
Señales en tiempo discreto

Secuencias básicas

En el estudio de la teoría de señales y sistemas en tiempo discreto, algunas secuencias son de particular interés.

1. Impulso discreto: Se define como la secuencia

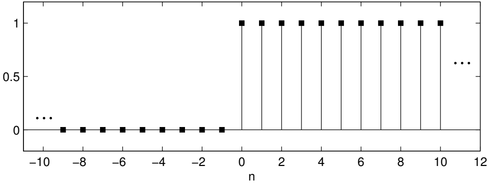
$$\delta[n] = \begin{cases} 0, & n \neq 0 \\ 1, & n = 0 \end{cases}$$



- También se denomina delta de Kronecker o simplemente impulso.

2. Escalón: Se define como la secuencia

$$u[n] = \begin{cases} 1, & n \geq 0 \\ 0, & n < 0 \end{cases}$$



Señales en tiempo discreto

Secuencias básicas

3. Secuencia exponencial: Se define como la secuencia

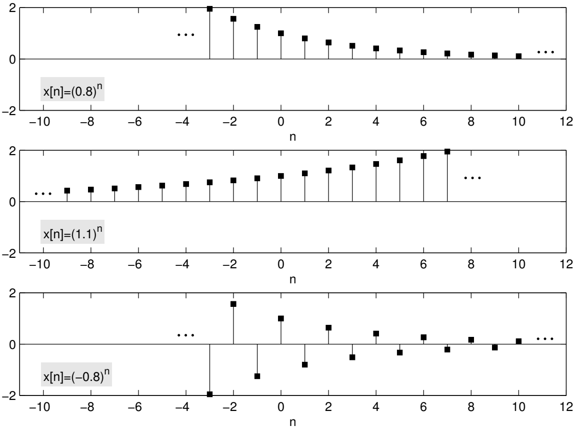
$$x[n] = A\alpha^n$$

- Las secuencias exponenciales son importantes en la representación y análisis de sistemas.

$$0 < \alpha < 1$$

$$\alpha > 1$$

$$-1 < \alpha < 0$$



Señales en tiempo discreto

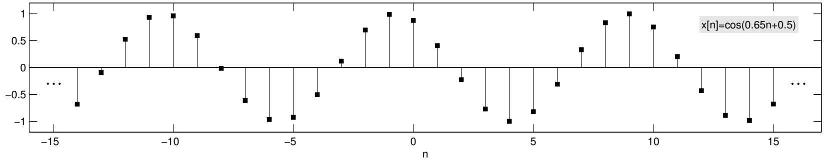
Secuencias básicas

4. Secuencia sinusoidal: Se define como

$$x[n] = A\cos(\omega_0 n + \phi)$$

A, ω_0 y ϕ son constantes reales

- A: amplitud
- ω_0: frecuencia
- ϕ: fase



Señales en tiempo discreto

5. Secuencia exponencial con parámetros complejos:

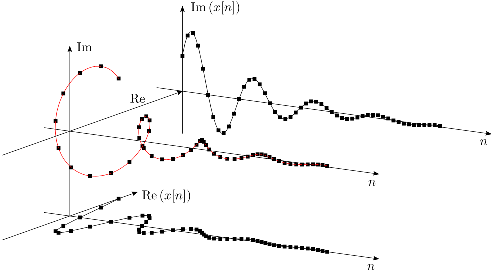
$$x[n] = A\alpha^n, \qquad A,\,\alpha \in \mathbb{C} \quad \text{con} \quad A = |A|e^{j\phi} \quad \text{y} \quad \alpha = |\alpha|e^{j\omega_0}$$

- La secuencia toma valores complejos.

$$\begin{aligned} x[n] = A\alpha^n &= |A|e^{j\phi}|\alpha|^n e^{j\omega_0 n} \\ &= |A||\alpha|^n e^{j(\omega_0 n+\phi)} \\ &\overset{(a)}{=} |A||\alpha|^n \cos\left(\omega_0 n+\phi\right) \\ &\qquad + j|A||\alpha|^n \sin\left(\omega_0 n+\phi\right) \end{aligned}$$

(a) Fórmula de Euler

$$e^{jx} = \cos x + j\sin x$$

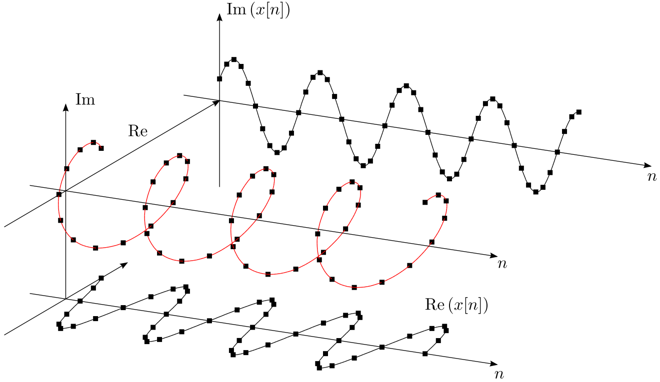


Señales en tiempo discreto

Secuencias básicas

6. Secuencia exponencial compleja:
   - Cuando en el caso anterior $|\alpha| = 1$, la secuencia es referida como exponencial compleja.

$$x[n] = |A|e^{j(\omega_0 n + \phi)} = |A|\cos(\omega_0 n + \phi) + j|A|\sin(\omega_0 n + \phi)$$



- ω_0: frecuencia
- ϕ: fase

Señales en tiempo discreto

Ejercicio

1. Considere la secuencia $x[n] = \sin\left(\frac{\pi n}{2}\right)$
   (a) Dibuje la secuencia.
   (b) Exprese la secuencia en la forma $x[n] = A\cos(\omega_0 n + \phi)$. Indique los valores de A, ω_0 y ϕ.
2. Considere ahora la secuencia $x[n] = e^{j\pi n}$
   (a) Dibuje la secuencia.
   (b) Considerando que la secuencia es una exponencial compleja, indique los valores de la frecuencia ω_0 y la fase ϕ.
   (c) Muestre que la secuencia es equivalente a las siguientes secuencias:
      - $x[n] = \cos(\pi n)$
      - $x[n] = (-1)^n$

Señales en tiempo discreto

Secuencias periódicas

- En el caso continuo, las señales sinusoidales y las exponenciales complejas son periódicas.
- En el caso discreto, el hecho que la variable independiente n solo tome valores enteros conduce a diferencias sustanciales.

Caso continuo

- Una señal es periódica de periodo T si se cumple que

$$x(t) = x(t+T), \quad \forall t \in \mathbb{R}$$

- Sea la señal sinusoidal $x(t) = A\cos\left(\omega_0 t + \phi\right)$

Magnitud	Frecuencia angular	Frecuencia	Periodo
Símbolo	ω_0	$f = \dfrac{\omega_0}{2\pi}$	$T = \dfrac{1}{f} = \dfrac{2\pi}{\omega_0}$
Unidades	rad/s	1/s (Hz)	s

Señales en tiempo discreto

Secuencias periódicas

- Demostración de que $T = \dfrac{2\pi}{\omega_0}$ es el periodo de la señal sinusoidal:

$$\begin{aligned} x(t+T) &= A\cos\left(\omega_0\left(t+T\right)+\phi\right) \\ &= A\cos\left(\omega_0\left(t+\frac{2\pi}{\omega_0}\right)+\phi\right) \\ &= A\cos\left(\omega_0 t+2\pi+\phi\right) \\ &= A\cos\left(\omega_0 t+\phi\right) \\ &= x(t) \end{aligned}$$

- Ejercicio: Demostrar que la señal exponencial compleja continua $x(t) = Ae^{j(\omega_0 t+\phi)}$ también es periódica de periodo $T = \dfrac{2\pi}{\omega_0}$.

Señales en tiempo discreto

Caso discreto

- Considérese la secuencia sinusoidal $x[n] = A\cos(\omega_0 n + \phi)$.
- Como se mencionó antes, la frecuencia es ω_0.

1. Una primera diferencia respecto al caso continuo son las unidades:
   - $\omega_0 n$ tiene unidades de radianes (por ser un ángulo).
   - Como n es adimensionado, la unidad de ω_0 tiene que ser radianes.
   - Como paralelismo con el caso continuo, se puede especificar que las unidades de n son muestras y las unidades de ω_0 son rad/muestras.
2. Frecuencias que difieren en múltiplos de 2π son indistinguibles.
   - Considérese la señal sinusoidal de frecuencia $\omega_0 + 2\pi$

$$\begin{aligned} x[n] &= A\cos\left((\omega_0 + 2\pi)\,n + \phi\right) \\ &= A\cos(\omega_0 n + 2\pi n + \phi) \\ &= A\cos(\omega_0 n + \phi) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x[n] &= Ae^{j(\omega_0 + 2\pi r)n} \\ &= Ae^{j\omega_0 n}e^{j2\pi rn} \\ &= Ae^{j\omega_0 n} \end{aligned}$$

   - Generalizando, las frecuencias $\omega_0 + 2\pi r$ con r entero son indistinguibles.
   - Cuando se analizan señales sinusoidales o exponenciales complejas discretas, solo es necesario considerar frecuencias en un rango de 2π, por ejemplo, en $0 \leq \omega_0 < 2\pi$ o en $-\pi < \omega_0 \leq \pi$.

Señales en tiempo discreto

Secuencias periódicas

Definición: señal en tiempo discreto periódica

- Una secuencia es periódica de periodo N si existe N entero tal que

$$x[n] = x[n+N], \qquad \forall n \tag{1}$$

¿Son periódicas las secuencias sinusoidales?

- Haciendo la analogía con el caso continuo, se cumpliría que $x[n] = A\cos(\omega_0 n + \phi)$ tiene periodo $N = \frac{2\pi}{\omega_0}$.
- El problema es que N no es necesariamente entero. Por ejemplo, si $\omega_0 = 1$, $N = 2\pi$ y por lo tanto N no es entero.
- Planteando la condición de periodicidad (ecuación 1), se puede establecer cuando una secuencia sinusoidal es periódica:

$$A\cos(\omega_0 n + \phi) = A\cos(\omega_0(n+N) + \phi) = A\cos(\omega_0 n + \omega_0 N + \phi)$$

  - La igualdad se verifica si existe N tal que ω_0 cumple que $\omega_0 N = 2\pi k$, con k entero.

3. Se concluye que las señales sinusoidales no necesariamente son periódicas.

Señales en tiempo discreto

Ejemplo

- Verificar si las siguientes secuencias son periódicas y encontrar el periodo si corresponde

  (a) $x_1[n] = \cos\left(\dfrac{\pi n}{4}\right)$ (b) $x_2[n] = \cos\left(\dfrac{3\pi n}{8}\right)$ (c) $x_3[n] = \cos(n)$

- Hay que encontrar un par de enteros $(N,\, k)$ que cumplan que $\omega_0 N = 2\pi k$. El menor N encontrado es el periodo.

  (a) La frecuencia de $x_1[n]$ es $\omega_{0_1} = \frac{\pi}{4}$

  $$\frac{\pi}{4}N = 2\pi k \quad \Rightarrow \quad N = 8k \quad \Rightarrow$$

  La igualdad se verifica con $N = 8,\ k = 1$

  Se concluye que el periodo es $N_1 = 8$ muestras.

  (b) La frecuencia de $x_2[n]$ es $\omega_{0_2} = \frac{3\pi}{8}$

  $$\frac{3\pi}{8}N = 2\pi k \quad \Rightarrow \quad 3N = 16k \quad \Rightarrow$$

  La igualdad se verifica con $N = 16,\ k = 3$

  Se concluye que el periodo es $N_2 = 16$ muestras.

  Observación: $\omega_{0_1} < \omega_{0_2}$ pero $N_1 < N_2$

Señales en tiempo discreto

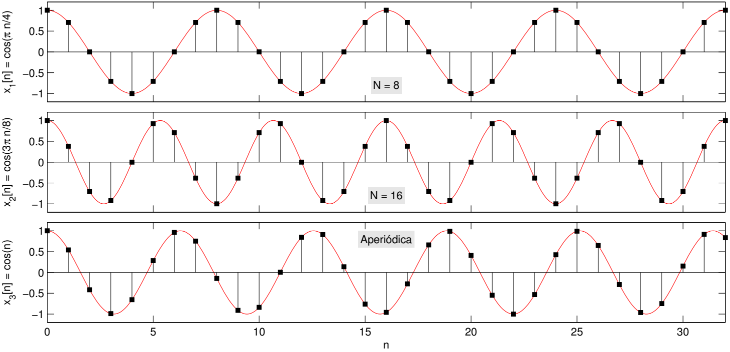
Ejemplo

(c) La frecuencia de $x_3[n]$ es $\omega_{0_3} = 1$

$$N = 2\pi k \quad \Rightarrow \quad \frac{N}{k} = 2\pi \quad \Rightarrow$$

No existen (N, k) enteros que cumplan la igualdad (π es irracional).

Se concluye que x_3 no es periódica.



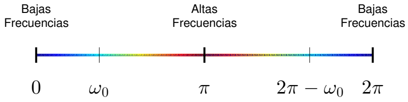
Señales en tiempo discreto

Secuencias periódicas

Bajas y altas frecuencias

- La interpretación de bajas y altas frecuencias es distinta en el caso discreto respecto al caso continuo.
- En una señal sinusoidal continua, cuanto mayor es la frecuencia, la señal oscila mas rápidamente.
- En una señal sinusoidal discreta, ocurre lo siguiente:
  - cuando ω_0 crece de 0 a π, las oscilaciones son cada vez mas rápidas
  - cuando ω_0 crece de π a 2π, las oscilaciones son cada vez mas lentas
- Concretamente, la frecuencia ω_0 es indistinguible de la frecuencia $2\pi - \omega_0$

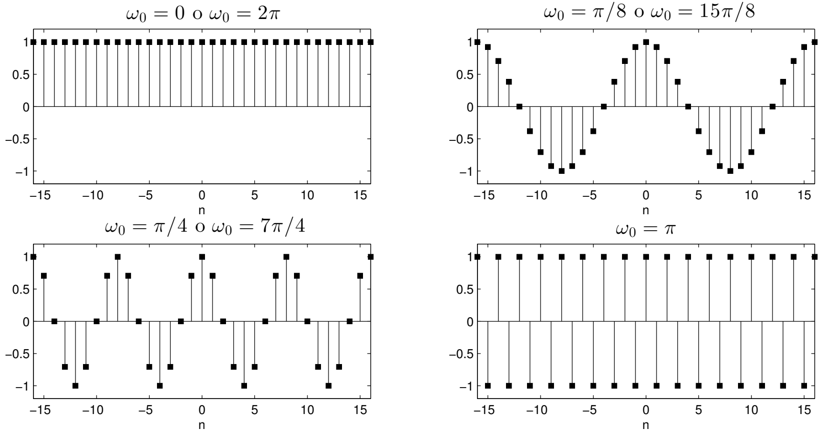
$$\begin{aligned}\cos\left(\left(2\pi - \omega_0\right) n\right) &= \cos\left(2\pi n - \omega_0 n\right)\\ &= \cos\left(-\omega_0 n\right)\\ &= \cos\left(\omega_0 n\right)\end{aligned}$$



Señales en tiempo discreto

Bajas y altas frecuencias

- En consecuencia,
  - frecuencias cercanas a $\omega_0 = 2\pi k$ son referidas como bajas frecuencias (oscilaciones lentas)
  - frecuencias cercanas a $\omega_0 = \pi + 2\pi k$ son referidas como altas frecuencias (oscilaciones rápidas)



Señales en tiempo discreto

Secuencias periódicas: resumen

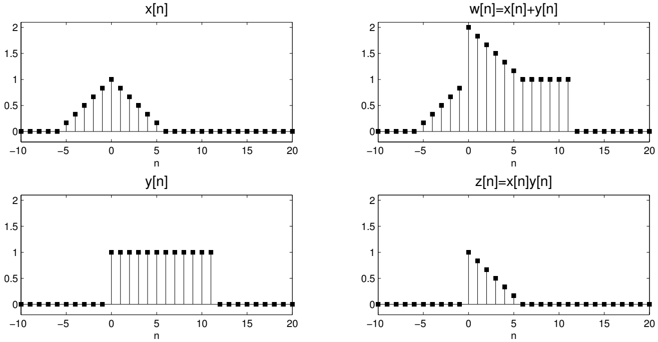
- La unidad de frecuencia en señales discretas es el radián o el radián por muestra (rad o rad/muestra).
- Frecuencias que difieren en múltiplos de 2π son indistinguibles. Por lo tanto solo es necesario considerar frecuencias en un rango de 2π, por ejemplo, en $0 \leq \omega_0 < 2\pi$.
- Definición de periodicidad: una secuencia es periódica de periodo N si existe N entero tal que $x[n] = x[n + N]$.
- Las señales sinusoidales discretas no siempre son periódicas. La condición de periodicidad es que la frecuencia ω_0 se pueda expresar como $\omega_0 N = 2\pi k$, con N y k enteros.
- Las frecuencias cercanas a 0 o a 2π radianes implican oscilaciones lentas (baja frecuencia) y las frecuencias cercanas a π implican oscilaciones rápidas (alta frecuencia).

Todo lo visto es válido tanto para señales sinusoidales como para exponenciales complejas.

Señales en tiempo discreto

Operaciones con secuencias

Suma y producto de secuencias: se definen como la suma y el producto muestra a muestra respectivamente.



Ejemplo: Sean $x[n] = e^{j\omega_0 n}$ $\quad y[n] = e^{-j\omega_0 n}$

- Suma: $w[n] = x[n] + y[n] = e^{j\omega_0 n} + e^{-j\omega_0 n} = 2\cos(\omega_0 n)$
- Producto: $w[n] = x[n]y[n] = e^{j\omega_0 n}e^{-j\omega_0 n} = 1$

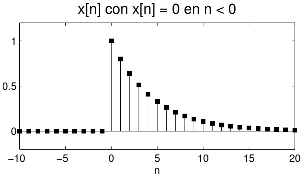
Señales en tiempo discreto

Operaciones con secuencias

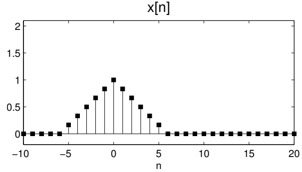
Ejemplo: En la práctica es común trabajar con secuencias que son distintas de cero solo a partir de cierta muestra, por ejemplo, a partir $n = 0$. Para eso es útil la secuencia escalón $u[n]$.

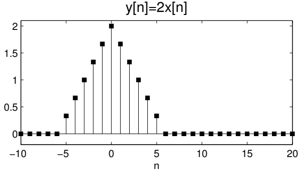
$$x[n] = \begin{cases} A\alpha^n, & n \geq 0 \\ 0, & n < 0 \end{cases}$$

$$x[n] = A\alpha^n u[n]$$



Multiplicación por una constante: la multiplicación de una secuencia $x[n]$ por una constante α se define como la multiplicación de cada muestra de $x[n]$ por α.





Señales en tiempo discreto

Operaciones con secuencias

Retardo: Una secuencia $y[n]$ es una versión retardada o desplazada de $x[n]$ una cantidad de n_0 muestras si

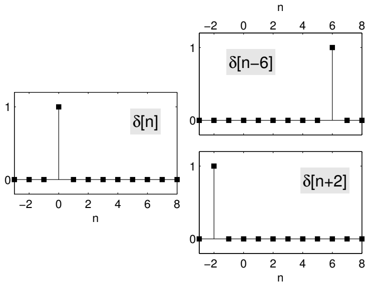
$$y[n] = x[n - n_0]$$

Ejemplos

1. Impulso retardado: el impulso discreto tiene una única muestra no nula en la muestra en donde el argumento se anula,

$$\delta[n-n_0] \underset{n-n_0=0 \Rightarrow n=n_0}{=} \begin{cases} 1, & n = n_0 \\ 0, & n \neq n_0 \end{cases}$$

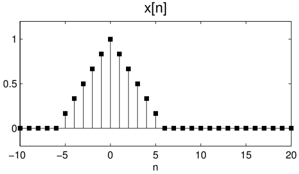
- $n_0 > 0$ es un retardo de la señal (desplazamiento a la derecha)
- $n_0 < 0$ es un adelanto de la señal (desplazamiento a la izquierda)

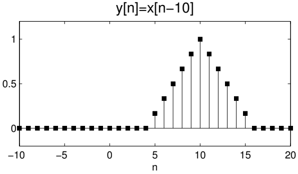


Señales en tiempo discreto

Ejemplos

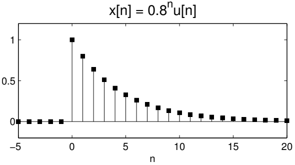
2. Señal arbitraria, triangular en este caso.





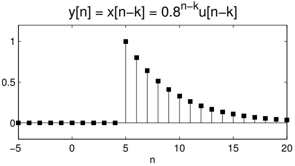
3. Sea la señal exponencial

$$x[n] = A\alpha^n u[n]$$



La señal retardada k muestras es

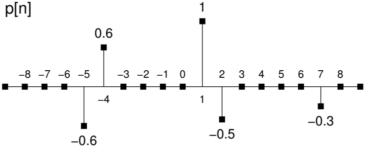
$$\begin{aligned} y[n] &= x[n-k] \\ &= A\alpha^{n-k}u[n-k] \end{aligned}$$



Señales en tiempo discreto

Representación de secuencias a partir de impulsos

- Cualquier secuencia arbitraria puede representarse como suma de impulsos escalados y retardados.
- La descomposición en impulsos es importante ya que es lo que permite conocer la salida a cualquier entrada de un sistema lineal solo conociendo la respuesta al impulso.



$$p[n] = -0.6\delta[n+5] + 0.6\delta[n+4] + \delta[n-1] - 0.5\delta[n-2] - 0.3\delta[n-7]$$

- En el caso general, una secuencia $x[n]$ puede expresarse como

$$x[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]\delta[n-k]$$

donde $x[k]$ es el valor de la muestra k-ésima de $x[n]$.

Señales en tiempo discreto

Representación de secuencias a partir de impulsos

- Ejemplo: La secuencia escalón puede expresarse como:

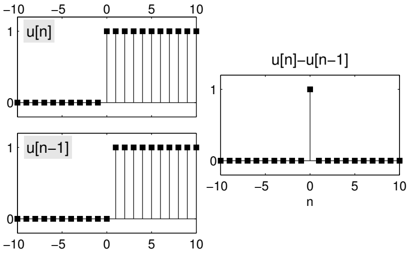
$$u[n] = \delta[n] + \delta[n-1] + \delta[n-2] + \dots$$
$$= \sum_{k=0}^{\infty} \delta[n-k].$$

- Alternativamente, el escalón también puede expresarse como la suma acumulada de todas las muestras hasta el instante n del impulso discreto:

$$u[n] = \sum_{k=-\infty}^{n} \delta[k]$$

- A su vez, el impulso discreto puede expresarse a partir del escalón,

$$\delta[n] = u[n] - u[n-1]$$

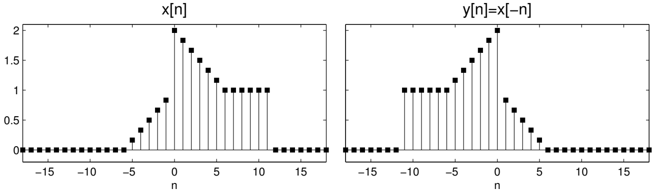


Señales en tiempo discreto

Operaciones con secuencias

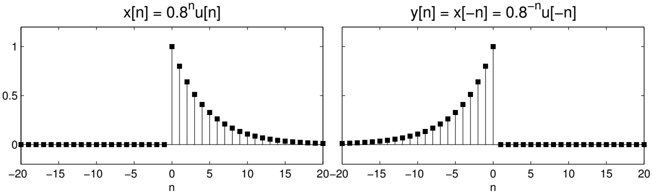
Inversión temporal: Una secuencia $y[n]$ es una inversión temporal de $x[n]$ si:

$$y[n] = x[-n]$$



Ejemplo: Inversión temporal de la exponencial real $x[n] = A\alpha^n u[n]$

$$\begin{aligned} y[n] &= x[-n] \\ &= A\alpha^{-n}u[-n] \end{aligned}$$



secuencia hacia la derecha

secuencia hacia la izquierda

La inversión temporal es uno de los pasos en el producto convolución, operación entre secuencias muy importante para el estudio de sistemas.

Referencias I

Oppenheim, A. V. and Schafer, R. W. (1999).
Discrete-Time Signal Processing, chapter 2.
Prentice Hall, 2nd edition.

Smith, S. W. (1997).
The Scientist & Engineer's Guide to Digital Signal Processing, chapter 5 & 15.
California Technical Pub., 1st edition.